数理解析研究所講究録
第527巻 1984年 80-94

高木関数とその一般化について

京大理・数　畑 政義　(Masayoshi Hata)
京大理・数　山口昌哉　(Masaya Yamaguti)

高木貞治は、1903年に、連続でかついたるところ微分不可能な関数の例を発表した。その様な関数の例としては、すでにWeierstraßが1872年に発見しているのであるが、Weierstraßの例は、lacunary Fourier級数の形で与えられその微分不可能性の証明は、必らずしも安易ではない。それに反して、高木の例の方は、定義そのものがgeometricalであり、その微分不可能性の証明も、いたって簡単であり、筆者らの知る限りにおいて、最も簡単な例の様である。

ここでは、その高木関数、あるいは、その一般化された関数の持つ、数々の興味深い性質を明らかにしていきたい。

§ 高木関数 $T(x)$.

高木貞治の与えた例というのは、次の様にして定義される。

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}p(2^n x).$$

ただし，$p(x)$ は実軸上の周期２の piece-wise linear な関数で，正確には，

$$p(x)=\left|x-2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|.$$

である。$[y]$ は実数 y の整数部分を表わす記号とする。

$p(x)$ のグラフは，Fig.1 の様である。次に $\frac{1}{2}p(2x)$ のグラフを考えれば，それは，$p(x)$ の周期を半分にし，かつ高さを半分にしたものであるから，そのグラフは，Fig.2 の様になる。この様にして，一般に関数 $\frac{1}{2^n}p(2^n x)$ は，傾き ± 1 のギザギザの関数であり，高木関数は，それらの無限個の和で表わされるものである。

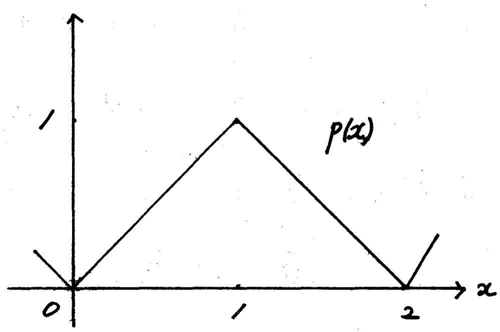


Fig. 1.

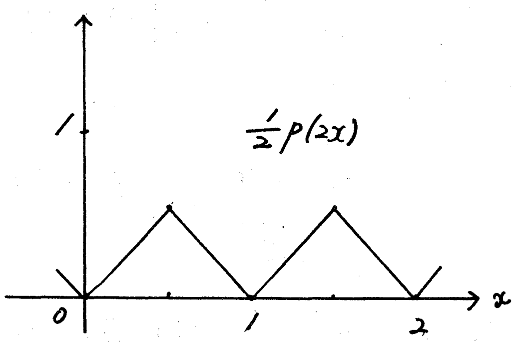


Fig. 2.

高木関数のこうした簡単な構造が，$T(x)$ のいたるところの微分不可能性を示す際に，役立っているのである。

さて，ここで比較のために，Weierstraß の関数 $W(x)$ を考えよう。丁度 $T(x)$ に対応する Weierstraß の関数は，次の

のようなものである。

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos\left(\pi 2^n x\right).$$

実際には、この関数のいたるところの微分不可能性は、1916年に、G.H. Hardy によって示された。

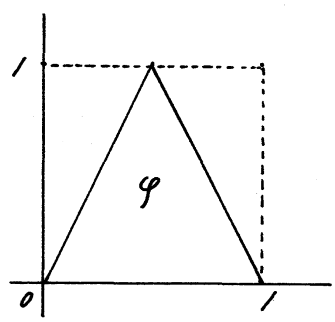
さて、$T(x)$ と $W(x)$ の違いは、周期関数 $p(x)$ と $\cos\pi x$ の違いのみであることがわかる。ともに、ある1つの周期関数を基本にして、それらの倍周期のものをどんどん積み重ねて出来ているという点で共通している。

次に、見方を変えて、次の様な、簡単な一次元力学系 φ を導入しよう。

$$\varphi(x)=\left|2x-2\left[x+\frac{1}{2}\right]\right| \quad , \; x\in[0,1]$$

ここで、

$$\varphi^n=\underbrace{\varphi\circ\cdots\circ\varphi}_{n\text{個}} \quad , \; \varphi^0=Id$$



と約束すれば、$T(x), W(x)$ は、この φ を用いて、次の様に表わせることがわかる。

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\varphi^n(x), \qquad W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos\pi\varphi^n(x).$$

両者ともに、φ を generator とする母関数の形で表わされてい

ることに注意する。　もう1つの注意として，$\mathfrak{W}(x)$ の方は，別の generator $\varphi_0(x)=4x(1-x)$ を用いて，

$$\mathfrak{W}\left(\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\varphi_0^n(x)$$

と表わされる。　$\varphi(x)$ と $\varphi_0(x)$ とは 位相共役の関係にあることが知られている。

de Rham は 1957年に，$T(x)$ と $\mathfrak{W}(x)$ が，ともに次の様な関数方程式の解であることに注目している。

$$F(x)-\frac{1}{2}F(2x)=g(x),\qquad x\in R.$$

ただし，高木の場合は $g(x)=p(x)$，Weierstraß の場合は，$g(x)=\cos\pi x$ である。　de Rham はその後，平面上の不変曲線の方に興味を移していったので，この方面での発展は見られない。

先に導入した φ を用いれば，$T(x)$，$\mathfrak{W}(x)$ は，ともに，次の様な関数方程式の解でもあることがわかる。

$$F(x)-\frac{1}{2}F(\varphi(x))=g(x),\qquad x\in[0,1]$$

ただし，高木の場合は $g(x)=x$，Weierstraß の場合は $g(x)=\cos\pi x$ である。　この関数方程式については，筆者たちによる研究 [1] がある。

84

§ 高木関数の一般化.

前節の φ を用いた高木関数の表現に関連して、単位区間上の連続関数の部分集合 E_0 を次の様に定めるのは自然であろう。

$$E_0 = \left\{ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^n(x) \ ; \ \sum a_n \text{ は絶対収束する級数} \right\}$$

E_0 は $C[0,1]$ の閉部分空間となる。特に、

$$\tilde{T}(x) = T(x) - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi^n(x) \quad , \quad x \in [0,1]$$

であるから、E_0 は、いたるところ微分不可能な元を含んでいるし、また [1] で示されたように、

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi^n(x), \quad x \in [0,1]$$

であるから、なめらかな関数も含んでいる。以下、いくつかの例を用いて、歴史上、特異な連続関数の例として、この E_0 の元が、たびたび用いられてきたことが、わかるであろう。

<u>例 1.</u> (Faber, 1907).

いかなる指数の Lipschitz 条件をも満たさない連続関数の例として、Faber は、次の様な E_0 の元を与えている。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \varphi^{n!}(x).$$

というのは、この $f(x)$ に対し、次の評価が成り立つからである。

$$f(x+h) - f(x) \neq O\left(\frac{1}{|\log|h||}\right).$$

<u>例. 2.</u> (Kahane, 1959).

Kahane は、modulus of continuity $\omega(t)$ が、ある与えられた条件を満たす様な例を構成するために、次の lacunary 高木関数とも言える E_0 の元を利用している。

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_j}} \varphi^{n_j}(x), \qquad n_1 < n_2 < \cdots.$$

Landsberg (1908) が注意している様に、周期関数としてみた $\varphi(x) = p(2x)$ は、次の様に Fourier 展開できる。

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k:\text{奇}} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi k x.$$

したがって、任意の $f \in E_0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^n(x)$ に対しては、

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos 2\pi m x.$$

ただし、$A_0 = -\frac{\pi^2}{8} \sum a_n$, $A_m = \frac{a_n}{k^2}$ $(m = 2^{n-1} k,\ k:\text{奇})$ である。

すると，自然に．複素高木関数なるものが定義される。

$$T_a(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^n k^2}z^m,\qquad m=2^{n-1}\cdot k\ ,\ k:奇$$

明らかに．T_a は $|z|\le 1$ で収束している。このとき，

$$\mathrm{Re}\,T_a(e^{2\pi i\theta})=c_1\tilde{T}(\theta)+c_2$$

という風に．何らかの定数 $c_1\neq 0$, c_2 を用いて．表わされる T_c が $|z|\le 1$ において．次の関数方程式を満たすことがわかる。

$$T_c(z)-\frac{1}{2}T_c(z^2)=\int_0^z\frac{1}{4\xi}\log\frac{1+\xi}{1-\xi}\,d\xi.$$

右辺は．初等関数では表わせないことに注意しておく。

ちなみに，対応するWeierstrass関数については．

$$W_c(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^{2^n}\ ,\qquad |z|\le 1$$

であり．W_c は次の関数方程式を満たしている。

$$W_c(z)-\frac{1}{2}W_c(z^2)=\frac{1}{2}z^2.$$

以上において．高木関数は．lacunary な Fourier 級数で表わされる Weierstraß の様なものとは．本質的に違う型の関数であることがわかるであろう。

§ 定理.

この節では. 集合 E_0 ($C[0,1]$ の部分Banach 空間) について の若干の性質を述べよう。

<u>定理</u>. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^n(x)$ が各点 $x \in [0,1]$ で収束しているとせよ。 そうすれば. 必然的に. $\sum c_n$ は絶対収束する。さらに、その時

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^n(x) \in E_0$$

であるが. u に無関係な正定数 K が存在して.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq K \; \|u\| .$$

が成り立つ. $\|\cdot\|$ は通常の sup-norm である。

この定理の証明は. [2] を見ていただくとして. その証明の要点は. φ の一次元力学系としての. 次の著しい諸性質に. 本質的に依存していることに注目して欲しい。

(i) 任意の symbol 列 $\omega = (\omega_0 \omega_1 \omega_2 \cdots) \in \{A, B\}^N$, i.e. $\omega_j = A$ or B に対し, ある初期値 $x_0 \in [0,1]$ があって. 各 $n \geq 0$ に対し.

$$\varphi^n(x_0) \in \omega_n .$$

ただし. $A = [0, \frac{1}{2}]$, $B = [\frac{1}{2}, 1]$ とそれぞれ同一視している。

(ii). critical 点 $x=\frac{1}{2}$ (i.e. AとBの共通点)の近傍に、初期値にとれば、AかBのいずれかの区間に、いくらでも長い時間とどまっていることができる。

以上の2点が、とても重要なのである。この定理は、次の様に一般化できる。

定理′. $g(x)\in C[0,1]$ とし、次の不等式を満たすものとする。

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right\}>0 \quad , \ \forall x\neq\frac{1}{2}.$$

このとき、級数

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\, g(\varphi^n(x))$$

が、各点 $x\in[0,1]$ で収束していれば、$\sum c_n$ は絶対収束であり、gのみに依存する正定数 K_g があって、

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\le K_g\|u\|.$$

が成り立つ。

この定理′の証明も、[2] を見ていただきたい。

<u>注意</u>. 前定理は. lacunary Fourier 級数に関する. Sidon の定理と類似していると気付かれた方もおられると思う。実際. 定理′ において. $g(x) = -\cos \pi x$ とおくことによって. Sidon の定理の特別の場合を証明することができる。

この様にして. E_0 の元 $f(x) = \sum a_n \varphi^n(x)$ の表示における係数 $\{a_n\}$ と, Fourier係数とは. 類似していると考えることができる。 実際. Fourier 係数に関しては. その減少の割合と. その Fourier 級数の表わす関数のなめらかさには. 密接な関係があるわけだけれども. 我々の場合においても. それに対応した次の結果がある。

<u>定理</u>. (Faber. 1910).

$f \in E_0$ が. ある一点で可微分 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = 0$.

この定理の Fourier 級数版は. Freud の定理であろう。さらに. この定理の逆として. 次の結果が得られた。

<u>定理</u>. (Kōno, 1983).

$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = 0$ $\Rightarrow$ $f \in E_0$ の微分可能な点の集合は. 連続濃度をもつ.

最後に、$f(x)$ の graph の Hausdorff 次元 $\mathrm{Dim}(f)$ に関しては、Besicovitch-Ursell，(1937) の結果があって、我々の場合だと、

$$f_\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\delta 2^n}} \varphi^{2^n}(x), \qquad 0<\delta<1$$

なる $\mathcal{F}_0$ の元 f_δ に対しては、$\mathrm{Dim}(f_\delta) = \dfrac{2}{1+\delta}$ となる。すなわち、いくらでも、その Hausdorff 次元が 2 に近い $\mathcal{F}_0$ の元が存在するのである。したがって、その関数の graph の Hausdorff 次元が 2 である様な連続関数を構成することもできる。また、もっと簡単な $\mathcal{F}_0$ の元、

$$f_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \varphi^n(x), \qquad 0<s<1$$

に対して、$\mathrm{Dim}(f_s) = 2 - \log_2 \dfrac{1}{s}$ となるであろうことが、予想されているが、その証明は、はなはだ難しく、まだ出来ていない。

§ 差分方程式と関数方程式．

関数方程式については、これまでにも、何回か登場しているが、もともと $\mathcal{F}_0$ を考えるきっかけとなったのは、次の様な、差分方程式系を考えたからなのであった。

$$
(*)\begin{cases} u\left(\frac{i}{2^{n-1}}\right)+u\left(\frac{i+1}{2^{n-1}}\right)-2u\left(\frac{2i+1}{2^n}\right)=c_n, \quad 0\le i\le 2^{n-1}-1, \quad n\ge 1. \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}
$$

結論から言えば、この無限個の差分方程式系(*)が、連続解を持つための必要十分条件は、

$$
\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|<\infty
$$

で与えられる。この証明は、前節の最初の定理と、それから、連続関数に対する Schauder 展開を用いて行なわれる。また、解があるとすれば、一意的であることも、すぐに分かる。例えば、$c_n=-2\cdot\frac{1}{2^n}$ であれば $u(x)=\tilde{T}(x)$、また、$c_n=-2\cdot\frac{1}{4^n}$ であれば $u(x)=x(1-x)$ を得るのである。

この差分方程式(*)は、central 差分の型であることに、注意しておく。したがって、ある意味で(*)は、Poisson 方程式 $\Delta u=$ 定数 の差分化なのである。そして、丁度、$c_n=-2\cdot\frac{1}{4^n}$ の時が、この差分方程式は、微分方程式 $\Delta u=-2$ と同値となって、Dirichlet 条件を満たす、なめらかな解、$x(1-x)$ が現われるという具合である。

差分方程式(*)を少し変形して、次の様な方程式系(**)を考えよう。

$$(**)\begin{cases} u\left(\dfrac{2i+1}{2^n}\right) = (1-\alpha)\, u\left(\dfrac{i}{2^{n-1}}\right) + \alpha\, u\left(\dfrac{i+1}{2^{n-1}}\right), & 0 \le i \le 2^{n-1}-1,\ n \ge 1 \\ u(0)=0, \quad u(1)=1 & (\alpha \text{は定数}). \end{cases}$$

これは、丁度、微分方程式との対応で言えば、Δu に、移流項 $\dfrac{du}{dx}$ の付いた方程式の差分化に対応していると考えられる。

この無限個の差分方程式 (**) が一意的連続解を持つための必要十分条件は、$0<\alpha<1$ である。特に $\alpha=\frac{1}{2}$ のときには、丁度、central 差分の場合であるが、なめらかな解 $u(x)=x$ が存在する。実は、これは、例外的な場合であって、$\alpha\neq\frac{1}{2}$, $0<\alpha<1$ であれば、解 $u(x)$ は、特異な関数となるのである。

まず、問題 (**) は、次の de Rham の関数方程式と同値であることがわかる。

$$\begin{cases} U(x) = \alpha\, U(2x) & , \ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ U(x) = (1-\alpha)\, U(2x-1) + \alpha & , \ \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

de Rham 自身は、上の関数方程式は、平面上の不変曲線の研究として導入しているのであるが、彼の結果は、次の通りである。

定理 (de Rham, 1957).

$0<\alpha<1$ ならば、上述の関数方程式は、一意的な連続解 $v_\alpha(x)$ を持ち、しかも v_α は、狭義単調増加で、$\alpha\neq\frac{1}{2}$ ならば、$v_\alpha'(x)=0$ a.e. すなわち、v_α は、Lebesgue の意味の特異関数である。

上定理の関数 v_α は、よく知られた不公平な貨幣投げの分布関数と一致する。また、フラクタルな分布 (de Wijs) を説明するのにも用いられている。

これらの差分方程式 (*), (**) を通して、我々は、次の高木関数と Lebesgue の特異関数とのつながりを見ることができる。

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}v_\alpha(x)\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}=\tilde{T}(x).$$

この関数 v_α については、最初に特異関数として報告したのは Salem (1943) であろう。Salem は、彼の論文の中で、次の様な方程式を考察する。(本当は geometrical な方法によっているが、本質的に同じものである。).

$$(***)\quad\begin{cases} u\left(\frac{2i+1}{2^n}\right)=(1-\alpha_n)\,u\left(\frac{i}{2^{n-1}}\right)+\alpha_n\,u\left(\frac{i+1}{2^{n-1}}\right), & 0\le i\le 2^{n-1}-1,\ n\ge 1. \\ u(0)=0,\quad u(1)=1 \end{cases}$$

方程式 (***) に関する Salem の結果は次の通りである。

<u>定理</u>. (Salem).

$0<\alpha_n<1$, かつ $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\left|\alpha_n-\frac{1}{2}\right|\right\}<\infty$ であれば、方程式 (***) を満たす、連続一意解 $u(x)$ が存在して、狭義単調増加である。かつこのとき、

$$u'(x)=0 \quad \text{a.e.} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-2\alpha_n\right)^2=\infty .$$

§ おわり.

以上の様にして、高木関数について、それに関連して、色々と面白い事実が見い出された。高木関数を、1つの、フラクタルな現象を説明する際の道具として考えられるのではないかという思いで、いろいろと考えてみた次第である。

なお、本文中に関連のある文献については、[1], [2] の References に詳しいので、そちらを参照していただきたい。

参考文献.

[1]. Weierstrass's function and Chaos; Yamaguti-Hata, Hokkaido M.J. 12(1983), 333-342.

[2]. The Takagi Function and its Generalization; Hata-Yamaguti, JJAM. 1(1984).