

Multiplicative System and Generalized
Takagi Functions

京大教養 河野 敬雄 (Norio Kôno)

§1. Introduction. Weierstrass は、到るところで微分不可能な連続関数が存在し得ることと示して当時 (1875 年) の数学界にセンセーションを巻き起こした。彼の例は、フーリエ級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x, \quad 0 < a < 1, \\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

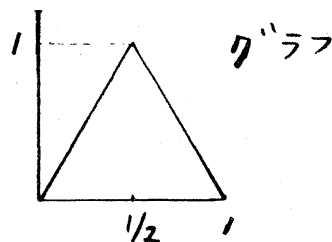
で定義される。但し、 b は奇数である。この場合の微分可能性は、微係数として $+\infty$ 又は $-\infty$ を許している。もし有限な微係数が到るところで存在しないという意味であれば、 $ab \geq 1$ の条件で十分であることを Hardy が示している [9]。これは、 $f(x)$ を形式的に微分してみると

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n \pi \sin b^n \pi x$$

から予想され得ることである。

その後このような関数については多くの数学者の興味を引
き数学に対する認識が深まったのであるが、高木貞治は1903
年に、到るところ有限な微係数をもたまり連続関数の簡単な
例を与えた。彼の例は次のようなものである。

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 2x, \quad \forall 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ &= 2(1-x), \quad \forall \frac{1}{2} \leq x \leq 1.\end{aligned}$$



と定義する。 φ は $[0, 1]$ から $[0, 1]$ の上への連続関数
であるから、いく度でも合成写像を定義することができ
る。これを、 $\varphi^{(n)}$ とする。つまり、 $\varphi^{(0)} = \varphi$, $\varphi^{(n)} = \varphi(\varphi^{(n-1)})$
, $n = 1, 2, \dots$ 。 $\varphi^{(n)}$ は又、次のように定義することも
できる。今、 φ を周期関数として実数軸上の関数に拡張す
ると、 $\varphi^{(n)}(x) = \varphi(2^{n-1}x)$ である。この時、高木は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi^{(n)}(x)$$

で定義される連続関数は到るところ有限な微係数をもたまり
ことを示した。

最近、Hata-Yamaguti [2, 3] は、高木の関数の
一般化を微分又は差分方程式の立場から解析し、種々の結果
を得ている。我々は、これを確率論的立場から解析したい。

§2. Multiplicative System.

まず、確率空間として $[0, 1]$ 上のルベーグ測度をとり、以後、a.s. (almost sure) 等の確率論的用語はこの確率空間に関するものとする。従って $\{\varphi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は、この確率空間で定義された確率変数とみなすことができる。そうすると、平均 $\int_0^1 \varphi^{(n)}(x) dx$ は $\frac{1}{2}$ である。そこで平均 0 の確率変数を考える方が自然であつかりゆすいから、

$$\varphi_{*}^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \frac{1}{2}, \quad n=1, 2, \dots$$

とおく。 $\{\varphi_{*}^{(n)}\}$ はどのような確率変数列であるか。今、点 $x \in [0, 1)$ を 2 進展開で表す。即ち、

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}, \quad \varepsilon_k = 0 \text{ 又は } 1.$$

連続関数又は a.s. の語をしてりる限り、表現の一意性は問題にならなかりが、後に影響のある場合もあるので、例えば、

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-1} \quad \text{は、右辺で表わすことにする。そうすると}$$

$\varepsilon_1 = 0$ の時 $\varphi(x) = 2x$ であるから、

$$\varphi_{*}(x) = - \sum_{k=2}^{\infty} (1 - 2\varepsilon_k) 2^{-k}$$

又、 $\varepsilon_1 = 1$ の時は、 $\varphi(x) = 2 - 2x$ であるから、

$$\varphi_{**}(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (1-2E_k) 2^{-k}$$

と表わされる。Rademacher の関数 $X_n(x) = 1-2E_n$ を導入すると、結局 $x \in [0, 1)$ に対し

$$(2.1) \quad \varphi_{**}(x) = -X_1(x) \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x) 2^{-k}$$

と表わされる。一般の n に対し

$$(2.2) \quad \varphi_{**}^{(n)}(x) = \varphi_{**}(2^{n-1}x)$$

を用いて、($\varphi_{**}(x)$ も周期関数として実軸上の関数に拡張しておく。)

$$\begin{aligned} (2.3) \quad \varphi_{**}^{(n)}(x) &= \varphi_{**} \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{k+n-1} 2^{-k} \right) \\ &= -X_n(x) \sum_{k=2}^{\infty} X_{k+n-1}(x) 2^{-k} \\ &= -2^{n-1} X_n(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} X_k(x) 2^{-k} \end{aligned}$$

と表わされる。この表現から直ちに次の定理を得る。

定理 1 (i) $\{\varphi_{**}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ は Multiplicative System をなす。即ち、

任意の正整数 r と, $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ に対し

$$\int_0^1 \varphi_x^{(n_1)} \cdots \varphi_x^{(n_r)} dx = 0.$$

$$(ii) \quad \int_0^1 |\varphi_x^{(n)}|^2 dx = \frac{1}{12}$$

$$(iii) \quad \int_0^1 |\varphi_x^{(n)}|^2 \varphi_x^{(n_1)} \cdots \varphi_x^{(n_r)} dx = 0 \quad \text{if}$$

$$n \geq \min(n_1, \dots, n_r)$$

$$= (-1)^r 2^{-2(n_r - n + 1)} / 3 \quad \text{if}$$

$$n < n_1 < \dots < n_r$$

$$(iv) \quad \frac{1}{24} \leq \int_0^1 |\varphi_x^{(n)}|^{2n+p} \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + \gamma_k \varphi_x^{(n+k)}) dx \leq \frac{1}{8}$$

ここで, $\gamma_k = 1$ または -1 .

(V) E をルベーグ測度正のボレル集合とすると, 正数 c が存在して, すべての n に対し

$$\int_E |\varphi_x^{(n)}|^2 dx \geq c.$$

(V) の証明には $\varphi^{(n)}(x)$ の分布が n に無関係にルベーグ測度であることを用いる必要がある。

さて, Multiplicative System の種々の定義 (必ずしも同値でない) は Alexits [1] の本に導入してあるが, Móricz [4] は最も弱い定義 (Weakly Multiplicative System) の下で, L^2 -収束から概収束が従う等独立確率変数列に対して成立する定理の拡張に成功した。我々の場合に適用すると, 次の結果を得る。但し (iii) は彼の方法をまねて, 定理 1 の (iv) を用いて独自に証明する必要がある。

定理 2 (i) $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$ ならば,

$$f_{\#}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_x^{(n)}(x)$$

は概収束する。(勿論 L^2 収束している)

(ii) ルベーグ測度正をもつホルレル集合 E が存在して, E の上で $\left\{ \sum_{n=1}^m c_n \varphi_x^{(n)}(x) \right\}_{m=1}^{\infty}$ が一様有界, 又は上の $f_{\#}(x)$ が有界ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

(iii) 区間 I があって、次の条件のうちの一つが成立すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$$

である。条件とは

$$(a) \left\{ \sum_{n=1}^m c_n \varphi_n^{(m)}(x) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ が } I \text{ 上で上から (又は下から)}$$

一様に有界、

(b) $f_*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n^{(m)}(x)$ が I 上で絶対収束して、本質的に上から (又は下から) 有界、

$$(c) f_*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n^{(m)}(x) \text{ が } I \text{ 上のすべての点で収束。}$$

勿論、 $\{c_n\} \in \ell^1$ ならば $f_*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n^{(m)}(x)$ は絶対収束して連続関数を定義するから、上記の条件はどれも満たされる。

次に、関数列 $\{\varphi_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ で展開した場合を考える。 $\varphi_n^{(m)}$ は $\varphi_n^{(m)}$ と定数しか変わらないから上記定理の系として次のことがいえる、Hata-Yamaguti [3] の結果の別証をもちえてい

る。

系 区間 I があって、次の条件のうち 1 つが成立すれば、 $\{c_n\} \in \ell^1$ である。条件とは

(a) $\left\{ \sum_{n=1}^m c_n \varphi^{(n)}(x) \right\}$ は I 上で一様有界である。

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^{(n)}(x)$ は I 上のすべての点で収束する。

§3. Generalized Takagi Functions.

この § では $\{\varphi_n^{(m)}\}$ 又は $\{\varphi^{(m)}\}$ で展開される連続関数を考える。両者は定数の違いしかありません。以下では

$$(3.1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^{(n)}(x), \quad \{c_n\} \in \ell^1$$

を考える。 $c_n = 2^{-n}$ の時が高木の関数である。たわいてある。

定理 3. (3.1) の関数を考える。この時

(i) $\{2^n c_n\} \in \ell^2 \iff f(x)$ は絶対連続で導関数は

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n X_n(x) \quad \text{a.s.}$$

で与えられる。ここで $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は Rademach の関数。

(ii) $\{2^n c_n\} \notin \ell^2$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n c_n = 0 \iff$

$f(x)$ はほとんど到るところ微分不可能であるが、連続濃度の集合上で微分可能で、微係数の値はすべての実数値を取り得る。従って、この関数は singular である。

(iii) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2^n |c_n| > 0 \iff f(x)$ は到るところ有限な微係数をもたない。

この定理からわかるように $f(x)$ はほとんどの場合をめぐる関数を表わしてはいない。くわしくいふと、連続関数 $f(x)$ が Zygmund の意味で "smooth" であるとは $\forall x \in (0,1)$ に対して

$$f(x+r) + f(x-r) - 2f(x) = o(r)$$

が成立する時をいふ。[6]. generalized Takagi 関数の場合、smooth であるのは次の場合に限る。

定理 4. 関数 (3.1) が "smooth" であるならば $f(x) = ax(1-x)$ と表わされる。

次に、関数 (3.1) の連続性の程度について調べよう。一般に、連続性の上からの評価は

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h| \sum_{n=1}^{n(x)} 2^n |c_n| + \sum_{n > n(x)} |c_n|$$

で表わす。ここで $n(x)$ は $\log_2 |h|$ の整数部分を表わす。一方、確率論でよく知られているように、Brown 運動の path の連続性はくわしく調べられている。この類似を考えると次の定理を得る。

定理 5 $\{2^n c_n\} \in \ell^2$ かつ、 $K > 0$ があって $2^n |c_n| \leq K$ がすべての n に対して成立するとき

(uniform modulus continuity)

$$(i) \overline{\lim}_{|x-y| \downarrow 0} \frac{f(x) - f(y)}{(x-y) \sigma_u(|x-y|)} = 1 \quad \text{かつ}$$

$$\underline{\lim}_{|x-y| \downarrow 0} \frac{f(x) - f(y)}{(x-y) \sigma_u(|x-y|)} = -1$$

ここで $\sigma_u(r)$ は

$$\sigma_u(2^{-p}) = \sum_{n=1}^p 2^n |c_n|$$

を満たす単調非増加関数。

(local modulus of continuity)

(iii) $h \rightarrow 0$ になるときの x に対し

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h \sigma_e(|R|) \sqrt{2 \log \log |R|} / \sigma_e(|R|)} = 1 \quad h \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h \sigma_e(|R|) \sqrt{2 \log \log |R|} / \sigma_e(|R|)} = -1,$$

ここで $\sigma_e(R)$ は

$$\sigma_e(2^p) = \sqrt{\sum_{n=1}^p 2^{2n} |c_n|^2}$$

を満たす単調非増加関数。

定理 3~5 の証明の outline. 点 x と $x+h$ を 2 進展開で表わす。即ち,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}, \quad x+h = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon'_k 2^{-k}.$$

ここで $2^{-p-1} < h \leq 2^{-p}$ を満たす整数 p を定める。次に

$$k_0 = \max\{k; \varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_k = \varepsilon'_k\}$$

$$= 0 \quad \text{if } \{k\} = \emptyset$$

とおく。2 進展開において $\sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-p}$ を右辺で表わす

ことにすると, $h \downarrow 0$ の時 $k_0 \uparrow +\infty$ とする。

この時、次の Lemma を得る。

Lemma 1. (i) $0 \leq k_0 \leq P,$

(ii) $\varepsilon_{k_0+1} = 0, \varepsilon'_{k_0+1} = 1,$

(iii) $\exists \delta \mid k_0+2 \leq P \notin \mathbb{N}^n, k_0+2 \leq k \leq P$ に対し $\varepsilon_k = 1, \varepsilon'_k = 0$ である。

この Lemma と (2.3) を合せると次の Lemmas を得る。

Lemma 2.

$$f(x+th) - f(x) = h \sum_{n=1}^{k_0} 2^n c_n X_n(x) +$$

$$\left\{ \sum_{k=p+1}^{\infty} (1 - \varepsilon'_k - \varepsilon_k) 2^{-k} \right\} \sum_{n=k_0+1}^P 2^n c_n X_n(x) +$$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} 2^{n-1} c_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (X_n(x) X_k(x) - X_n(x+th) X_k(x+th)) 2^{-k}.$$

Lemma 3. 特に $2^n |c_n| = O(1)$ ($o(1)$ -resp.)

とす時、Lemma 2 の第 3 項は $O(h)$ ($o(h)$ -resp.) である。

Lemmas の証明は初等的であるから省略する。

§ Miscellany .

B. B. Mandelbrot の本 [8] をながめてみると, 至るところ微分不可能な関数を逐次グラフを描いて構成する方法が図示してある。この時重要なことは scaling 又は相似ということである。彼の本の 389 ~ 390 頁に述べてある Weierstrass 関数 (少し modify してある) に対する scaling property の考え方を我々の場合に応用すると, $\frac{1}{2} < t < 1$ に対して

$$f_t(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} t^n \varphi(2^{n+1}x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

とおく。この条件からこれは収束して連続関数を得る。

$$f_t(x) = \frac{2t}{2t-1}x + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \varphi^{(n)}(x)$$

と表わすれ, $2^n t^n > 1$ であるから至るところ微分不可能である。この関数は女子意味で "scaling property" を持つ。つまり, $a = 2^{-h}$, $h \in \mathbb{N}$ に対して,

$$f_t(ax) = \sum_{-\infty}^{\infty} t^n \varphi(2^{n-h+1}x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+H} \varphi(2^{n+1}x) \\
 &= a^{\log_2 1/t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \varphi(2^{n+1}x) \\
 &= a^H f_t(x), \quad H = \log_2 1/t.
 \end{aligned}$$

又、この関数の Hölder 連続性は定理4の後に書いたように、簡単に計算できて

$$|f_t(x+R) - f_t(x)| \leq K R^H$$

となる。この上からの評価によって、 $f_t(x)$ のグラフ $G_t = \{(x, f_t(x)) ; 0 \leq x \leq 1\}$ の Hausdorff 次元は $2-H$ 以上であることがわかる。下からの評価はたっくして、現在証明されているよりも思われるが、グラフの次元 $(= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \log N_\varepsilon(G_t) / \log 1/\varepsilon)$ は $2-H$ 以上であることは比較的簡単にわかる。ここで $N_\varepsilon(G_t)$ は半径 ε の円板で G_t を覆った時の最小個数。又、レベル集合、 $G_x = \{0 \leq y \leq 1 ; f_t(y) = x\}$ の Hausdorff 次元をほとんど到るところの x に対して $2-H$ であると思われる。無責任な予想を述べると $1-H$ ではないかと。理由は、またたくの類似であるが、確率過程の self-similar

process を考える。確率過程 $\{X(t, \omega), 0 \leq t < \infty\}$ が self-similar であるとは

$$(i) \quad X(0, \omega) = 0 \quad a.s.$$

(ii) $\exists H > 0 \quad \forall a$ に対して, $\{X(at, \omega)\}$ と $\{a^H X(t)\}$ の有限次元分布が等しい ことがあふ。この時, H が H を決定 (必ずしも fractional Brown 運動でなくてもよい) の下で, path $\{(t, X(t, \omega))\}$ の Hausdorff 次元は $2-H$ (但し $0 < H < 1$ を決定) であることがわかる。 (未発表) 又, fractional Brown 運動の場合は, レベル集合の Hausdorff 次元は $1-H$ であることが知られている (Marcus) である。

1984年4月23日

References

- [1] G. Alexits, Convergence of orthogonal series, Pergamon Press-Akademiai Kiado(Budapest, 1961).
- [2] M. Hata and M. Yamaguti, Weierstrass's function and chaos, Hokkaido Math. J. 12(1983), 333-342.
- [3] _____, On Takagi's nowhere differentiable function, pre-print.
- [4] F. Móricz, On the convergence properties of weakly multiplicative systems, Acta Sci. Math. 38(1976), 127-144.
- [5] T. Takagi, A simple example of the continuous function without derivative, Phys.-Math. Soc. Japan, 1(1903), 176-177. The Collected Papers of T. Takagi, edited by S. Kuroda, Iwanami(1973), 5-6.
- [6] A. Zygmund, Smooth functions, Duke Math. J. 12(k945), 47-76.
- [7] N. Kôno, On generalized Takagi functions, pre-print.
- [8] B.B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, W.H.Freeman and Company San Francisco, 1982,
- [9] G.H. Hardy, Weierstrass's non-differentiable function, Trans. Amer. Math. Soc. 17(1916),301-325.