

測度係数常微分方程式の確率的扱いについて

東北大理 岡田達也 (Tatsuya Okada)

東北大理 岡田正巳 (Masami Okada)

§ 0. まえがきと謝辞. 次の 2 階楕円型作用素 P_1 , P_2 を考える。 $P_1 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $P_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ 但し a_{ij} は有界だが、一般には滑らかとは限らない函数とし、 (a_{ij}) は非負対称行列とする。 P_1 と P_2 を、そして両者の違いを調べよ、という問題提起は、例えば、M. Bony (C.I.M.E. 1969 Potential Theory) にもある。これを次の非常に特別な場合に考えてみよう、というのが我々の目的である。(であった!)

目標 $Q_1 = 1_{x < 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2 1_{x > 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $Q_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(1_{x < 0} \frac{\partial}{\partial x} + a^2 1_{x > 0} \frac{\partial}{\partial x} \right)$
 $= Q_1 + (a^2 - 1) \delta \frac{\partial}{\partial x}$ の違いを調べる。但し a は 1 と異なる正の常数。

局所時間による、もっと確率的な研究としては、参考文献を見てほしい。我々の仕事は、局所時間を用いなくて、直接、微分方程式との関連を目指している。

2月に小川氏の企画された数理研シンポジウムの際に志賀・本尾・西氏、他に Le Gall 氏らによって測度を drift に持つ確率微分方程式が解かれていることを御本人達にうかがうことができたし、さらにディスカッションによって大へんに啓発されたことを、ここに記し、あわせて感謝します。

§ 1 直観的概略 ----- $\alpha \neq 0$ に対して $\Phi_{n,\alpha}$ を

$$\Phi_{n,\alpha}(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4n}(1-\alpha) & \text{---} \quad x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{4}(\alpha-1)x^2 + \frac{1}{2}(\alpha+1)x & \text{---} \quad -\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n} \\ \alpha x + \frac{1}{4n}(1-\alpha) & \text{---} \quad \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

で定義する。 $\Phi'_{n,\alpha} = \frac{d\Phi_{n,\alpha}}{dx}$ とし、 x_t^n を S.D.E.

$$\begin{cases} dx_t^n = \frac{1}{\Phi'_{n,\alpha}(x_t^n)} dB_t & n=1, 2, 3, \dots \\ x_0^n = x(0) \end{cases}$$

の解とする。 x_t^n の生成作用素は $\frac{1}{2(\Phi'_{n,\alpha})^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ である。

つぎに $y_t^n = \Phi_{n,\alpha}(x_t^n)$ とおく。 y_t^n の生成作用素は、

$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\Phi''_{n,\alpha}}{(\Phi'_{n,\alpha})^2} \circ \Phi_{n,\alpha}^{-1} \frac{\partial}{\partial y}$ である。但し $\Phi_{n,\alpha}^{-1}$ は $\Phi_{n,\alpha}$ の逆函数である。 $C_{n,\alpha}(y) = \frac{1}{2} \frac{\Phi''_{n,\alpha}}{(\Phi'_{n,\alpha})^2} \circ \Phi_{n,\alpha}^{-1}(y)$ とおけば、 Support $C_{n,\alpha}$

$= [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ であり、 $\int C_{n,\alpha}(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\Phi''_{n,\alpha}}{\Phi'_{n,\alpha}}(x) dx = \frac{1}{2} [\log \Phi_{n,\alpha}(x)]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \log \alpha$ 따라서 $C_{n,\alpha}(y) \rightarrow \frac{1}{2} \log \alpha \delta$ ($n \rightarrow +\infty$) である。

これより $y_t = \lim_{n \rightarrow \infty} y_t^n$ なる拡散過程の存在と一意性がいえる。即ち、 $x_t = \lim_{n \rightarrow \infty} x_t^n$ の存在と一意性が示されれば、 y_t は $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \log \alpha \delta \frac{\partial}{\partial y}$ を“生成作用素”

とする拡散過程であると思ってよいわけである。さら

に x_t^n がマルティンゲール $\Leftrightarrow \Phi_{n,\alpha}^{-1}(y_t^n)$ マルティンゲール、

だから $\Phi_{n,\alpha}^{-1}$ は $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_{n,\alpha}''}{(\Phi_{n,\alpha}')^2} \circ \Phi_{n,\alpha}^{-1}(y) \frac{\partial}{\partial y}$ に対応する

“調和函数”であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n,\alpha}^{-1}(y) = \Phi_{\frac{1}{\alpha}}(y) = \begin{cases} y & \dots y \leq 0 \\ \frac{1}{\alpha} y & \dots y > 0 \end{cases}$

は $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \log \alpha \delta \frac{\partial}{\partial y}$ に対応する“調和函数”である

と考えられる。以上が rough な あらまし、である。

§2 時刻変更 …… まず、以下の S, D, E_S は少く

とも同値の意味で一意的に与えられることがわかっている

$$\bullet \quad \begin{cases} dx_t^n = \frac{1}{\Phi_{n,\alpha}'(x_t^n)} db_t \\ x_0^n = x(0) \end{cases}, \quad \begin{cases} dx_t = \mathcal{P}_{\frac{1}{\alpha}}(x_t) db_t \\ x_0 = x(0) \end{cases}$$

$$\text{但し } \mathcal{P}_{\frac{1}{\alpha}}(x) = \begin{cases} 1 & \dots x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\alpha}) & \dots x = 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \dots x > 0 \end{cases} \quad \bullet \quad \text{これだけでは、} x_t^n$$

が $x_t \equiv x_t^{(\alpha)}$ に収束するかわからないが、実は、

$$x_t^n = x(0) + b_{\mathcal{P}_{n,t}^{-1}}, \quad x_t = x(0) + b_{\mathcal{P}_t^{-1}} \quad \text{但し } \mathcal{P}_{n,t} \text{ と } \mathcal{P}_t \text{ は、夫々}$$

$$\mathcal{P}_{n,t} = \int_0^t (\Phi_{n,\alpha}')^2 (x(0) + b_s) ds, \quad \mathcal{P}_t = \int_0^t \frac{1}{(\mathcal{P}_{\frac{1}{\alpha}})^2} (x(0) + b_s) ds \text{ と}$$

表わされることが知られている (例えば [5]) ので、

$n \rightarrow +\infty$ の時、 $\mathcal{P}_{n,t} \rightarrow \mathcal{P}_t$ 従って $x_t^n \rightarrow x_t$ p.p. がわか

る。 x_t の生成作用素は $\frac{1}{2} 1_{x < 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2\alpha^2} 1_{x > 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ であり、 x_t^n の

その極限であること、 $f(x_t)$ マルティンゲール $\Leftrightarrow f$ は

$$\text{一次函数 } \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} 1_{x < 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2\alpha^2} 1_{x > 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f = 0 \text{ なること、}$$

に注意しておこう。

§ 3 空間の変換 ----- つぎに $y_t = \Phi_\alpha(x_t)$ とおく。

ここで $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \alpha x & x > 0 \end{cases}$ は \mathbb{R} の同相写像だから明らか

かに y_t も、マルコフ過程である。 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$y_0 \neq 0$ なら $E\left[\frac{f(y_t) - f(y_0)}{t}\right] \rightarrow \frac{1}{2} f''(y_0) (t \downarrow 0)$ で

あるが $y_0 = 0$ においては $C_\alpha y'(0)$ に収束する。この

C_α を決めるために、 $h(y_t)$ をマルティンゲールにする h

を探す。 $h(y_t)$ マルティンゲール $\Leftrightarrow h \circ \Phi_\alpha(x_t)$ マルティ

ンゲール $\Leftrightarrow h \circ \Phi_\alpha$ は \mathbb{R}_\pm で一次函数、かつ $(h \circ \Phi_\alpha)'(-0)$

$= (h \circ \Phi_\alpha)'(+0) \Leftrightarrow$ // かつ $h'(-0) = \alpha h'(+0)$

だから、例えば $h = \Phi_{\frac{1}{\alpha}}$ は、そうである。従って §1,

§2 から y_t は $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \log \alpha \delta \frac{\partial}{\partial y}$ を生成作用素と

する、即ち $C_\alpha = \frac{1}{2} \log \alpha$ であることがわかる。

§4 2階の係数も、不連続のとき ----- 一般に、 Z_t

$= \Phi_\beta(x_t^{(\alpha)})$ において α, β を動かすことにより、

$\alpha > 0$ における2階微分係数と、 $\alpha = 0$ での drift の

係数を任意に変えたものが扱えるか考えてみよう。ま

ず、明らかに $Z_t \leftrightarrow L = \frac{1}{2} 1_{x < 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} 1_{x > 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} +$

$c \delta \frac{\partial}{\partial x}$ と予想され、 c さえ決めればよいのではない

か、と思われるのだが、実は、そう簡単ではない。と

りあえず $L_n = \frac{1}{2} 1_{x < 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} 1_{x > 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c \frac{\pi}{2} 1_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$

で L を近似してみる。 L_n に対しては、 $I = [-1, 1]$ で、

次の“ディリクレ問題”が、有効である。

$$\begin{cases} L_n u_n = 0 \\ u_n(-1) = 0 \\ u_n(1) = 1 \\ u_n \in C^1(I) \end{cases}$$

$x = \pm \frac{1}{n}$, 0 での接続条件から一意解が求まることが初等的計算よりわかる。 $n \rightarrow +\infty$ のときの近似計算より、 $u_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ が存在するが、このとき $\frac{1}{u_\infty(0)} = 1 + e^{-c(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2})}$ となる。他方で $u_\infty(z_t)$ マルティンゲール $\Leftrightarrow u_\infty \circ \Phi_t$ は一次函数だから、結局、 $C = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \log \beta$ として値が確定する。L を L_n の極限と思った時は以上の如しであるが、一般に $\alpha \neq \beta$ のとき、L を別のものの極限と考えると、C は違った値になってしまう！ 例えば、

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{x < 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \mathbb{1}_{x > 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c n \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, 0]} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{に 対 する、}$$

C^1 解 \tilde{u}_n を上と同様に考えて計算すると $C = \frac{1}{2} \log \beta$.

になり、 $\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{x < 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \mathbb{1}_{x > 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \frac{\partial}{\partial x}$ には $C = \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \log \beta$ になってしまう。即ち次の結論を得る。

結論: $L = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{x < 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbb{1}_{x > 0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial}{\partial x}$ に 対 応 する拡散過程を考える為には、L に、どんな近づき方をするのか指定しなければならない。 δ も、どのような函数列で近似するのによって異なるものになるからである。例えば $\frac{n}{2} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$ $\rightarrow \delta$ と考えるならば、求める拡散過程は $\Phi_\beta(x_t^{(\alpha)})$ 、但し $\alpha = \frac{1}{a} e^{\frac{\delta(\alpha^2+1)}{\alpha^2}}$, $\beta = e^{\frac{\delta(\alpha^2+1)}{\alpha^2}}$ である。

§5. …… $a \neq 1$ の時は drift の係数に δ がある場合既に困難な状況が現われたが $a=1$ の時は、drift の係数を、もっと一般化してもよいことを以下、簡単に骨子を述べる。 $L_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x}$ を考えよう。ここで μ は測度で次の条件をみたすものとする。

$$\exists 0 \leq M < \infty \text{ s.t. } \forall J \text{ 区間, } |\mu(J)| \leq M.$$

μ が \mathbb{R} 上の有界ボレル測度なら勿論よい。3つの方法が考えられる。(本質的に同じことではあるが)

(i) μ を discrete measure の列 $\mu_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} \delta_{x_{nj}}$ で近似して、今までのやり方を組みあわせて拡散過程を構成して、 $n \rightarrow +\infty$ とする。

(ii) サポートがコンパクトで、なめらかな非負関数 χ により正則化して $\psi_\varepsilon = \chi_\varepsilon * \mu$ を考え §1 における $\overline{\mathbb{P}}_{n,\alpha}$ のかわりに $\overline{\Psi}_\varepsilon(x) = \int_0^x e^{2\int_0^y \psi_\varepsilon(z) dz} dy$ を考えて、同様にして S.D.E. を解いて拡散過程を作り $\varepsilon \downarrow 0$ とする。

(iii) 近似をとることなく $\overline{\Psi}(x) = \int_0^x e^{2\mu(0,y)} dy$ で同様に作る。

注意 $\frac{1}{2} y'' + \mu y = 0$ を $\frac{y''}{y'} = -2\mu$, $\log y' = -2\mu(0,x)$ + const だから $y(x) = C_1 \int_0^x e^{-2\mu(0,y)} dy + C_2$ として、常微分方程式の範囲で、“解ける”ことは当然であるがまたフーリエ変換をとって扱うことも可能であろう。

参考文献

- [1] J.M. Harrison & L.A. Shepp , Ann. of Prob. 9
(1981) p. 309-313
- [2] J.B. Walsh , Astérisque 52-53 (1978) p.37-45
- [3] M. Motoo - T. Shiga , Personal communication
- [4] Le Gall , Thèse , Université Paris VI (1982) 90P.
- [5] 渡辺信三 , 確率微分方程式 , 産業図書, (1975)

後注 : 他に[4]の参考文献等、関連した文献は数多い
と考えられるが、我々は可能な限り目を通した、
というわけではないので、上のもの以外に見落
としているかもしれないことを、お断りしてお
きます。