数理解析研究所講究録
第 528 巻 1984 年 97-114

時間おくれのあるフィードバックによる発展方程式の安定化について

東大・理 山本 昌宏 (Masahiro Yamamoto)

§1. Introduction

Hilbert 空間 X における放物型方程式

(1.1) $$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0 \qquad (t \geqq 0)$$

を考え、系(1.1)が作用素ノルム $\|e^{-tA}\|_{X \to X}$ が、$t \to \infty$ の時 指数関数的に大きくなるという意味で、不安定であると仮定する。その時、次のような"フィードバック安定化問題"とよばれる問題が、さまざまな人々の関心を集めてきた。(Sakawa and Matsushita [8], Nambu [6], Triggiani [11])

すなわち、ある与えられた有界線形作用素 $S: X \longrightarrow \mathbb{C}^N$ に対して、適当な線形作用素 $T: \mathbb{C}^N \longrightarrow X$ をえらぶことによって、

(1.2) $$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = TSu(t) \qquad (t \geqq 0)$$

なる形の"フィードバック・システム"とよばれる新しい

システムを構成して、ある正の定数 M, ω に対して

$$\| e^{-t(A-TS)} \|_{X \to X} \leqq M e^{-t\omega}$$

を、成り立たせたい。 ここで (1.2) は、実用的見地から次のように考えることができる； すなわち、

時刻 t でのある観測量 $Su(t)$ が 同時刻 t で $TSu(t)$ の 形で、もとの系 (1.1) に "フィードバック" されている。

筆者は、最近、鈴木氏と共に フィードバック安定化問題について、S の可観測性と T の可制御性との関係を、作用素論的立場から 整理することができた。
(Suzuki and Yamamoto [9], Yamamoto and Suzuki [13])

ここでは、その結果もふまえて、フィードバック・システムとして、別のタイプのモデルを考える。

$$(1.2)_\tau \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = TSu(t-\tau) & (t>0) \\ u(t) = \varphi(t) & (-\tau \leqq t \leqq 0) \end{cases} .$$

すなわち、 $Su(t)$ を 系 (1.1) に、フィードバックする際にかかる時間 τ を、考慮したモデルである。
特に、我々は 系 (1.1) が、あとで述べるような意味で、安定化されるような T を、S に対して、構成できるよう

付てその上限について考察したい。(c.f. Yamamoto[12])

§2. Formulation

以下、X は内積 $(\cdot,\cdot)$ をもつHilbert空間とする。(1.1) にあらわれる作用素 $-A$ に対して、次のような仮定をしておく。([9])

1) $-A$ は、X における解析半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geqq 0}$ の生成作用素であり、ある $t_0>0$ が存在して e^{-t_0A} はコンパクト作用素である。

2) A のスペクトラム $\sigma(A)$ は、2つの部分集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{l}$ と Σ_1 に分割される。しかも、λ_i は全て、有限な重複度 m_i をもつ固有値であって、

(2.1) $$k_0=\sup_{1\leqq i\leqq l}\mathrm{Re}\,\lambda_i\leqq 0<\inf_{\lambda\in\Sigma_1}\mathrm{Re}\,\lambda$$

が、成り立つ。以下、P を

(2.2) $$P=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Gamma}(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda$$

で定義しておく。ここで Γ は $\{\lambda_i\}_{i=1}^{l}$ を囲み、$\{\lambda_i\}_{i=1}^{l}$ と Σ_1 を、分離するJordan閉曲線とする。

3）　評価

(2.3)　$\|(1-P)e^{-tA}\|_{X\to X} \leqq M_1 e^{-t\kappa_1} \quad (t\geqq 0)$

が、$\kappa_1>\kappa_0$ なる　ある κ_1 と M_1 に対して成り立つ。　//

以上の仮定の下で、まず、Travis and Webb [10] に従って、$(1.2)_\tau$ を適当なBanach空間における発展方程式にかきかえて、半群理論より、その適切性や安定性などについて考えることができる。(Borisovič and Turbabin [2] も参照のこと）すなわち、以下にあげる事実が知られている。

$$M_\tau \equiv L^1((-\tau,0)\to X)\oplus X$$

として、M_τに、直積Banach空間としてのノルムを入れておく。$t\geqq 0$ に対して、M_τ からM_τ への線形作用素 $U_\tau(t)$ を、次のように定義しておく。

$$\begin{pmatrix}\varphi(\cdot)\\ \varphi_0\end{pmatrix}\in M_\tau \text{ に対して } U_\tau(t)\begin{pmatrix}\varphi(\cdot)\\ \varphi_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t+\cdot)\\ u(t)\end{pmatrix}$$

但し、$u(t)$は　初期値$(\varphi(\cdot),\varphi_0)$に対する初期値問題

$$\begin{cases} u(t) = e^{-tA}\varphi_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)A}\, TS\, u(s-\tau)\, ds \qquad (t\geqq 0) \\ u(t) = \varphi(t) \qquad -\tau\leqq t<0 \\ u(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

の解※とする。

※以下では mild solution とよばれるある種の弱解を考える時でも単に解とよぶことにする。

このとき、$\{U_\tau(t)\}_{t\geqq 0}$ は M_τ で (C_0) ~~半群~~をなすことがわかる。さらに A_{U_τ} をその生成作用素とすると、

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A_{U_\tau})} Re\lambda < 0 \iff$$

ある正定数、M, ε が存在して $(1.2)_\tau$ の全ての解に対して

$$(2.4)\quad \|u(t)\|_X \leqq Me^{-t\varepsilon}\|(\varphi(\cdot),\ \varphi)\|_{M_\tau}\quad (t\geqq 0)$$

が成り立つ。

なることも示せる。

これ故ち、我々は S, T を適当にえらんで (2.4) なる評価が成り立つようにできるとき、(1.1) は "(フィードバック) 安定化可能" であるとよぶことにする。

(1.1) を安定化するような T がとれる τ の限界は、T をどのような範囲故ちとるか、すなわち、T の値域 $R(T)$ を X のどのような部分集合からとるか、に依存する。

そこで、我々は、次の定義をもうける。

Definition 1. $Y\supset X_0$, 但し、$X_0 = PX$ とする。$(0,\infty)$ の部分集合 $D(S,Y)$ を

$$D(S, Y) = \{ \tau \geqq 0 \,;\, \text{ある線形作用素 } T : \mathbb{C}^N \longrightarrow X \text{ が存在して}, \sup_{\lambda \in \sigma(A_{U_\tau})} \mathrm{Re}\lambda < 0 \}$$

によって定義する。 //

注意2.1. $Y \supset X_0$ は S についての適当な条件の下で $D(S, Y) \neq \phi$ なることを保証する条件である。([9]) //

$D(S, Y)$は、(1.1)の τ についての安定化可能帯というべきものであるが、$D(S, Y)$については、次の事実がまず示せる。

Proposition 1. $D(S, Y)$ は, $[0, \infty)$ で開集合である。 //

さて、Sについて、次の概念を導入する。([9])

Definition 2. $Z \subset X$ を閉線形部分空間とする。有界線形作用素 $S : X \longrightarrow \mathbb{C}^N$ が(X において、e^{-tA} に関して)"Z-observable" であるとは、

" $a \in Z,\ Se^{-tA}a = 0 \ (0 \leqq t < \infty) \Longrightarrow a = 0$ "

が成り立つことと定義する。 //

$Z = X$ のとき、この定義は、通常の可観測性と一致する。

注意2.2. Sをある $g_k \in X$ $(1 \leqq k \leqq N)$ に対して、

$$Su = ((u, g_1), \cdots, (u, g_N)) \in \mathbb{C}^N$$

の形に、かいたとすると次が成り立つ。([9])

S が X_0-observable $\Longleftrightarrow$

$\mathrm{rank}\ M_i = n_i \quad (1 \leqq i \leqq l)$

ここで M_i は $M_i = ((\varphi_{ij}, g_k))_{1 \leqq k \leqq N,\ 1 \leqq j \leqq n_i}$

なる $N \times n_i$ 行列であり、$\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ は $\mathrm{Ker}(\lambda_i - A)$ の基底である。X_0 は A の固有ベクトル以外の元を含んでいる場合でも、X_0 に含まれる A の固有ベクトルのみに関する条件によって、S の X_0-observability が判定できることに注意すべきである。 //

さて、[9], [13] の Theorem 1. と、同様の論法により

<u>Proposition 2.</u> (i) $D(S, Y) \neq \phi$ $\Longleftrightarrow$ S が、X_0-observable である。

(ii) (i) の下で、ある正数 δ が存在して、

$$D(S, Y) \supset (0, \delta) .$$ //

Proposition 2. によって、$D(S, Y)$ は、0 からはじまって、ある十分小さな δ まで延長されていることがわかるが、δ を越えて、どの程度までのびているかはわからない。そこで問題を、単純化して次の§で考察を加えてみたい。

§3. <u>Examples</u>

ここでは、以下を仮定しておく。

(仮定)　A は、自己共役であるとし、$\sigma(A)$ は全て孤立した重複度有限の固有値 λ_i ($i=1, 2, \cdots$) のみからなり、

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots\cdots \longrightarrow \infty$

である。さらに λ_1 は単純である(すなわち重複度が1である)とする。　//

注意3.1.　$\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ を $Ker(\lambda_i - A)$ の基底とすると、

$$X_0 = span\{\varphi_{11}\}$$

となる。　//

$Su = (u \cdot g)$ ($g \in X$) なる S を考える。まず、

Proposition 3.　S が X_0-observable ならば、

$$D(S, X_0) = [0, \frac{1}{|\lambda_1|})$$

である。(もし $\lambda_1 = 0$ ならば、$D(S, X_0) = [0, +\infty)$ がいわれる。)　//

証明(概略)：　$w \in \mathbb{C}$ に対して、T は $Tw = w(\alpha\varphi_{11})$ とかくことができる。$\alpha \in \mathbb{C}$ をえらぶことが目標になる。

$(1.2)_\tau$　$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = (u(t-\tau), g)\alpha\varphi_{11}$$

に P, 1-P を、ほどこすと、

(3.1)　$$\frac{du_0(t)}{dt} = -PAu_0(t) + (u_0(t-\tau), g)\alpha\varphi_{11} + (u_1(t-\tau); g)\alpha\varphi_{11}.$$

$$(3.2) \qquad \frac{du_1(t)}{dt} = -(1-P)Au_1(t)$$

但し、 $u_0 = Pu \quad u_1 = (1-P)u$ とおいた。(3.2)と仮定より、$t \to \infty$のとき、$u_1(t)$ は 指数関数的に0に収束するので、(3.1)から u_1 を含む項をとった方程式

$$(3.3) \qquad \frac{dv(t)}{dt} = -PAv(t) + (v, g)\alpha\varphi_{11}$$

$$(v(t) \in X_0)$$

の解 $v(t)$ が $t \to \infty$ のとき、指数関数のオーダーで0に収束するようにαをえらべば、(1.2)$_\tau$の解 $u(t)$ についても同じことが示せる。 $u_0(t) = x(t)\varphi_{11}$ とおくことができるので、(3.3)は

$$(3.3)' \qquad \frac{dx(t)}{dt} = -\lambda_1 x(t) + \alpha\beta x(t-\tau)$$

$$(\beta \equiv (\varphi_{11} \cdot g))$$

とかける。(3.3)′の零解の安定性は、(3.3)′の特性方程式

$$(3.4) \qquad \lambda + \lambda_1 - \alpha\beta e^{-\lambda\tau} = 0$$

の解の実部の符号により、判定できる。（Hale [4], Bellman and Cooke [1]）すなわち、(3.4)の解（一般には可算個存在する。）の実部が全て負であるならば、正数 M, ε が存在して、(3.3)の全ての解 $x(t)$ に対して、

$$|x(t)| \leqq Me^{-t\varepsilon} \quad (t \geqq 0)$$

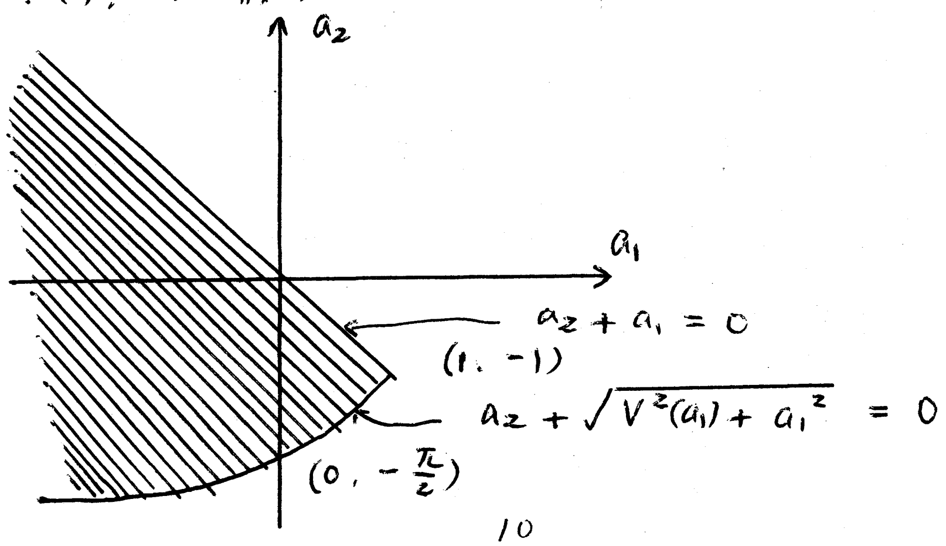
となる。従って、安定性を調べるためには、超越方程式(3.4)の解の実部が全て負になるための係数 λ_1, $-\alpha\beta$ に

関する条件を知ることが、必要になる。これは代数方程式（$\tau = 0$ の場合に相当する。）に対しては、Routh - Hurwitz の安定条件とよばれる条件（たとえば、Sakawa〔7〕）であらわされることはよく知られている。しかし、一般に、(3.4) のような方程式に対して、条件を explicit にかくことはきわめて困難であるが、さいわいにしてこの場合に限り、Hayes による結果が知られている。（Hayes〔5〕，Bellman and Cooke〔1〕）すなわち、

$\lambda e^{\lambda} - a_1 e^{\lambda} - a_2 = 0$ の全ての解 λ の実部が負である。$\Longleftrightarrow$ (i) $a_1 < 1$

(ii) $a_1 < -a_2 < \sqrt{V^2(a_1) + a_1^2}$，ここで $V(a_1) =$ "$v = a_1 \tan v$ の $(0, \pi)$ での解 但し $V(0) = \frac{\pi}{2}$ とおく"

（図の斜線部（境界は含まない）に (a_1, a_2) が存在することと、(i), (ii) が成り立つことは同値である。）



よって $-\lambda_1\tau<1$ ならば

$$-\lambda_1\tau < -\alpha\beta\tau < \sqrt{V^2(-\lambda_1\tau)+\lambda_1^2\tau^2}$$

となるように α をとればよいことがわかる。（SはX_0-observable なので 次の注意により $\beta\equiv(\varphi_{11}\cdot g)\neq 0$ に注意）逆に、$-\lambda_1\tau\geqq 1$ ならば、α をどのようにとっても 〔5〕より (3.4) の解で実部が正なるものが存在する。以上で証明がおわる。 //

Proposition 3. によれば $\tau>-\frac{1}{\lambda_1}$ ならば $R(T)<X_0$ なる T をどのようにとっても、もとの系を安定化することは不可能である。もし、我々が、$R(T)$ をもっと広いクラスからとるならば、$D(S, Y)$は $D(S, X_0)$ より広がることが期待される。実際、次がわかる。

<u>Proposition 4.</u>　(i) X_k を φ_{11} と φ_{k1} $(k>1)$ によってはられる線形部分空間とする。Sが、X_k-observable ならば

$$(3.5)\qquad D(S, X_k)\supset\left(0,\ \frac{1}{|\lambda_1|}-\frac{1}{\lambda_k}+\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_k^2}}\right)$$

(ii) $X_{k,m}$ を φ_{11}, φ_{k1}, φ_{m1} $(k>m>1)$ によってはられる線形部分空間とする。Sが $X_{k,m}$-observable ならば

$$(3.6)\quad D(S, X_{k,m}) \supset \left(0,\ \frac{1}{|\lambda_1|} - \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_m} + \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_m^2} + 2\sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_k^2 + \lambda_m^2}{\lambda_1^2\lambda_k^2\lambda_m^2}}}\ \right)$$

//

注意3.2. 1°) (i), (ii)において、それぞれ、SがX_k-observable, $X_{k,m}$-observableであると仮定しないと$D(S, X_k)$, $D(S, X_{k,m})$が$\left(0, \frac{1}{|\lambda_1|}\right)$に一致するかもしれない。

2°) (i)において、$\lambda_k \to \infty$とすると$D(S, X_k)$は$\frac{2}{|\lambda_1|}$までのばせる。さらに、(3.5)の右辺の半開区間は(3.6)の右辺に真に含まれる。このPropositionは、$D(S, X_k)$ $D(S, X_{k,m})$そのものについてはあまりくわしい情報を与えるものではないが、それらの集合が"少なくともどこまではのびているか"について示唆を与えるものである。 //

証明（概略）： 証明方法を明らかにするため(i)のみを示す。$w \in \mathbb{C}$に対して、Tは、$Tw = w(\alpha\varphi_{11} + \beta\varphi_{k1})$とかける。Sは、$X_k$-observableなので、$(\varphi_{11}, g) = (\varphi_{k1}, g) = 1$と仮定してよい。

Proposition 3.の証明と同様にして、(1.2)をX_k上で考え、X_kの基底$\{\varphi_{11}, \varphi_{k1}\}$に関して、成分表示することにより、

$$(3.7)\qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

の解が、$t \to \infty$ のとき指数関数のオーダーで0に収束するように、α, β をとればよいことがわかる。それには、(3.7)の特性方程式

$$(3.8)\qquad G(\lambda) \equiv \det\left(\lambda - \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_k \end{pmatrix} - e^{-\lambda\tau}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix}\right) = 0$$

の解 λ の実部が、全て負になるための条件が必要になるが、前にもふれたようにそれを知ることは困難である。そのため、ここでは Datko〔3〕による手法を応用してみる。〔3〕では、次のような事実が示されている。

与えられた α, β に対して、(3.8)で $\tau = 0$ とした時の解の実部が負であるとする。(3.8)の解が虚軸上に存在するような τ の下限を、τ_0 とする時、$0 \leqq \tau < \tau_0$ なる τ に対して、(3.8)の解の実部は全て負である。

この事実は

$$H(\tau) \equiv \sup_{\lambda \in \sigma(A_{U_\tau})} \operatorname{Re}\lambda$$

とおいた時、$H(\tau)$ が τ の連続関数となること、及び、$H(0) < 0$ なることから示される。〔3〕では、与えられた系につ

いて、すなわち、α, β を固定して考えているわけであるが、ここでは、α, β を自由にとって、τ_0 をなるべく"大きく"することが重要になる。

まず、$\tau = 0$ のとき、(3.8)の解の実部が、全て負であるためには

(3.9) $$-\lambda_1 - \lambda_k + \alpha + \beta < 0$$

(3.10) $$\lambda_1 \lambda_k - \lambda_1 \beta - \lambda_k \alpha > 0$$

が、必要十分である。

(3.11) $$G(\sqrt{-1}\,\mu) = 0 \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

とする。(3.11)を $e^{-\sqrt{-1}\mu\tau}$ について解き、$\mu \in \mathbb{R}$ のときに $|e^{-\sqrt{-1}\mu\tau}| = 1$ なることに注意すると、(3.8)が"虚軸"上に解 $\sqrt{-1}\,\mu$ をもつならば、μ は

(3.12) $$\begin{aligned} & a^2\mu^6 + (b^2 + a^2c^2 - 2a^2\lambda_1\lambda_k - a^4)\mu^4 \\ & + (b^2c^2 + a^2\lambda_1^2\lambda_k^2 - 2\lambda_1\lambda_k b^2 - 2a^2b^2)\mu^2 \\ & + (\lambda_1^2\lambda_k^2 b^2 - b^4) \qquad = 0 \end{aligned}$$

の実解でなくてはならない。但し

$$a \equiv \alpha + \beta$$

$$b \equiv -\lambda_1\beta - \lambda_k\alpha$$

$$c \equiv -\lambda_1 - \lambda_k$$

とおいた。このとき、(3.12)の実解 μ に対して、τ は(3.13)式で定まる；

$$(3.13) \qquad \tau = -\frac{1}{\mu}\tan^{-1}\frac{a\mu^3+(bc-a\lambda_1\lambda_k)\mu}{(b-ac)\mu^2-b\lambda_1\lambda_k} \equiv J(\mu).$$

〔3〕をこの場合に用いて

$$\min J(\mu)$$

（min は（3.12）の実解 μ についてとるものとする。）

が、なるべく大きくなるように、α, β をえらぶことになる。

さて、（3.12）の実解を調べる際に、計算を簡単にするため、1つの案として、特に、

$$(3.14) \qquad a = -\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_k^2}$$

とおいてみる。（勿論、これは（3.9）を満たす。）

このとき、（3.12）は

$$(3.15) \qquad (\lambda_1^2+\lambda_k^2)\mu^6 + b^2\mu^4 + (\lambda_1^2\lambda_k^4+\lambda_1^4\lambda_k^2-\lambda_k^2 b^2-\lambda_1^2 b^2)\mu^2 + (\lambda_1^2\lambda_k^2 b^2 - b^4) = 0$$

となって、（3.12）にくらべ、実解についての解析がより簡単になる。残されたことは b をきめることである。ここで、α, β を

$$(3.16) \qquad b \equiv -\lambda_1\beta-\lambda_k\alpha \downarrow -\lambda_1\lambda_k$$

となるようにとると、（3.15）の任意の実解は0に近づくことが示される。（このことは、（3.15）において、$b=-\lambda_1\lambda_k$ とおいた方程式の実解が0のみであることに注意すればわか

3。— 実は そのように、実解が 0だけになるように、a, b を決めたわけである。)

(3.13)において、(3.16)となるように α, β をとると、$\mu \to 0$ となり、(3.14)も考慮して、τは

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_k} + \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_k^2}}$$

に近づくことがわかる。これで (i)が示された。 //

<u>注意 3.3.</u> 以上の証明からわかるように、(3.5)の右辺の半開区間の上端の値は、最良のものではないが、ここでは $D(S, Y)$ の Y を X_0 より広くとることにより、$D(S, X_0)$ を真に含むようにできることを示すのが 1つの目的であった。 //

上にあげた方法は、一般の場合にも適用できるが、その際に要する計算は、かなり複雑である。

References

〔1〕 Bellman, R. and Cooke, K.L., Differential-difference equations, Academic Press, New York, (1963).

〔2〕 Borisovič, Ju. G. and Turbabin, A. S., On the Cauchy problem for linear nonhomogeneous differential equations with retarded argument, Soviet Math. Dokl., 10, No.2, 401-405 (1969).

〔3〕 Datko, R., A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations, Quart. Applied Math., 36, 279-292 (1978).

〔4〕 Hale, J., Theory of functional differential equations, Springer-verlag, New York - Heidelberg - Berlin, (1977).

〔5〕 Hayes, N. D., Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equations, J. London Math. Soc., 25, 226-232 (1950).

〔6〕 Nambu, T., Feedback stabilization for distributed parameter systems of parabolic type, J. Differential Equations, 33, 167-188 (1979).

〔7〕 坂和愛幸, 線形システム制御論, 朝倉書店, (1979).

〔8〕 Sakawa, Y. and Matsushita, T., Feedback stabilization of a class of distributed systems and construction of a state estimator, IEEE Trans. Automat. Control, AC-20, 748-753 (1975).

〔9〕 Suzuki, T. and Yamamoto, M., Observability, controllability, and feedback stabilizability for evolution equations, I., submitted to Japan Journal of Applied Mathematics.

[10] Travis, C.C. and Webb, G.F., Existence and stability for partial functional differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 200, 395-418 (1974).

[11] Triggiani, R., On Nambu's boundary stabilizability problem for diffusion processes, J. Differential Equations, 33, 189-200 (1979).

[12] Yamamoto, M., On the stabilization of parabolic equations by time-delay feedbacks, (preprint).

[13] Yamamoto, M. and Suzuki, T., Observability, controllability, and feedback stabilizability for evolution equations, 数理解析研究所講究録（"解の構造" 昭和58年 11月7日 − 10日） to appear.