数理解析研究所講究録
第 529 巻 1984 年 1-20

内部領域における消散項を持つ非線型双曲型方程式の大域解

筑波大 数学系 柴田 良弘

§1. 結果. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 有界領域, $\partial\Omega$をその境界でコンパクト, C^∞とする。$x=(x_1 \cdots x_n)$を空間, tを時間変数とし, 微分記号として, $\partial_t = \partial_0 = \partial/\partial t$, $\partial_x = (\partial_1, \dots \partial_n)$ ($\partial_j = \partial/\partial x_j$)等を用いる。次の混合問題を考える。

(1.1) $\Phi(u) = \mathcal{L}u + F(t, x, \Lambda u) = f(t, x)$ in $[0\ \infty) \times \Omega$

$u(t\ x) = 0$ on $[0, \infty) \times \partial\Omega$.

$u(0\ x) = \phi_0(x)$, $\partial_t u(0\ x) = \phi_1(x)$ in Ω.

ここで作用素 $\mathcal{L}$, Λ 及び非線形関数 F に次の仮定をおく。

(1.2) 仮定. A° $\mathcal{L}$は

$$\mathcal{L}u = \partial_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(t.x)\partial_j u) + \sum_{j=1}^n a_j(t.x)\partial_j\partial_t u + \sum_{j=0}^n b_j(t.x)\partial_j u + c(t.x)u + d(t.x)u$$

の形をしており, 係数は次の条件を満足する。

1° 係数 a_{ij}, a_j, b_j, c, d はすべて real-valued $\mathcal{B}^\infty([0\ \infty) \times \overline{\Omega})$ functions である。

2° $a_{ij}=a_{ji}$ かつある正定数 k_0 に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqq 2k_0|\xi|^2$$

が任意の $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(t\cdot x)\in[0\ \infty)\times\Omega$ について成立する。

3° $c(t,x)\geqq 0$.

4° ある正定数 k_1, T_0 に対して

$$b_0(t,x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\partial_i a_i(t\cdot x)\geqq 2k_1$$

が任意の $(t\cdot x)\in[0,\infty)\times\Omega$ について成立する。

5° $$\lim_{t\to\infty}\{\sup_{x\in\overline{\Omega}}[\sum_{i,j=1}^{n}|\partial_t a_{ij}(t\cdot x)|+\sum_{j=1}^{n}|\partial_t a_j(t\cdot x)|+\sum_{j=1}^{n}|b_j(t\cdot x)|$$

$$+|d(t\cdot x)|+|\partial_t c(t\cdot x)|]\}=0$$

が成立する。

B° $\Lambda u=(u,\partial_0 u,\ldots,\partial_n u;\ \partial_i\partial_j u, 0\leqq i\leqq j\leqq n)$ また作用素 Λ に対応する変数を $\lambda=(\lambda^*;\lambda_0,\ldots,\lambda_n;\ \lambda_{ij}\ 0\leqq i\leqq j\leqq n)$ とする。

さらに関数 $F(t,x,\lambda)$ は次の性質をもつ。

1° $F\in\mathcal{B}^\infty([0,\infty)\times\overline{\Omega}\times\{|\lambda|\leqq 1\})$

2° F は real valued

3° $F(t\cdot x\cdot 0)=0$, $\mathrm{grad}_\lambda F(t\cdot x\cdot 0)=0$ for all $(t\cdot x)\in[0\cdot\infty)\times\overline{\Omega}$

以上の仮定の下で次の(1.1)に対する大域解の存在と一意性及び、解の t についての減少の order に関する結果が得られる。

定理 1. (存在). $K\geq 0$, fixed number, $m\geq 2$ 整数, 仮定(1.2)が成立しているとする。この時次の事が成立する。

十分小なる正定数 δ_m と十分大なる正整数 M_m (共に m のみに依存する.)があって, data, ϕ_0, ϕ_1, f が m 回の整合条件(後に定義)を満足し, さらに

$$\sup_{x\in\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\le M_m+2}|\partial_x^\alpha\phi_0(x)|+\sum_{|\alpha|\le M_m+1}|\partial_x^\alpha\phi_1(x)|\Big\}+\sup_{\substack{x\in\bar\Omega\\ t\geq 0}}\Big\{\sum_{|\alpha|+j\le M_m}(1+t)^K|\partial_x^\alpha\partial_t^j f(t,x)|\Big\}\le\delta_m$$

であれば, (1.1) の古典解 $u\in C^m([0,\infty)\times\bar\Omega)$ で

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\ t\geq 0}}\sum_{|\alpha|+j\le m}(1+t)^K|\partial_x^\alpha\partial_t^j u(t,x)|\le C\delta_m$$

なるものが存在する。ここで C は δ_m, M_m, ϕ_0, ϕ_1, f には独立の定数である。☒

定理 2 (一意性). $m\geq 3$ 整数. 仮定(1.2)が成立しているとする。δ_m, M_m を定理 1 のものとする。この時ある $\delta_m'(\le\delta_m)$ が存在して, data ϕ_0 ϕ_1, f は δ_m', M_m について定理 1 の条件を満足しているものとする。u を定理 1 で保証された (1.1) の C^m class の解とする。もし $v\in C^m([0,\infty)\times\bar\Omega)$ が (1.1) に対するもう一つの解であれば, $u=v$ である。☒

[注] (1.1)の解という時は $|\nabla v|\le 1$ なる条件は満足されている。☒

定理 3. (exponential decay) $m\geq 3$ 整数. この時 ある δ_m''

で次の性質を満足するものが存在する。; M_m. δ_m を定理1のものとし. $0<\delta_m''\leq\delta_m$. ϕ_0, ϕ_1, f を $K=0$. M_m. δ_m'' に対して定理1の条件を満足しているものとする。さらに f は

$$\int_\Omega |f(t,x)|^2 dx \leq Ce^{-\beta t} \qquad t\geq 0$$

をある定数 $\beta>0$, $C>0$ に対して満足しているものとし. u を (1.1) の定理1. で保証されている解とする。ならば

$$\int_\Omega [\,|\partial_t u(t,x)|^2 + \textstyle\sum_{i=1}^n |\partial_i u(t,x)|^2]dx \leq C'e^{-\beta' t}, \ t\geq 0$$

がある定数 $\beta'>0$. $C'>0$ に対して成立する。 $\boxtimes$

定理1の証明は，線形化した問題に対しての一様な decay 評価を用いて，smoothing process をもつ quadratic iteration scheme を作ることにより行なわれる。これはいわゆる Nash-Moser technique として良く知られている。

以下定理1の証明の概略を述べる。尚定理2, 3の証明は省略するが，簡単に言えば，例えば定理2であれば，$w=u-v$ とおいて問題を

$\mathcal{L}w+\int_0^1 \partial_\lambda F(t,x,\Lambda v+\theta\Lambda w)d\theta\cdot\Lambda w=0$ in $(0,\infty)\times\Omega$, $w=0$ on $[0,\infty)\times\partial\Omega$

$w(0,x)=\partial_t w(0,x)=0$ in Ω と w についての線形な双曲型混合問題にして. w. $v\in C^3$ の仮定から通常の energy method を用いて $w\equiv 0$ を示す。

§2. 準備.

2.1. 記号. ここで述べないものについては通常の記号とする。 semi-norms: $\|\phi\|_{p,N} = \sum_{|\alpha|\le N} \|\partial_x^\alpha \phi\|_{L_p(\Omega)}$

$$|f|_{p,N,[a,b]} = \sup_{a\le t\le b} \sum_{j+|\alpha|\le N} \|\partial_t^j\partial_x^\alpha f(t,\cdot)\|_{L_p(\Omega)}$$

$$|f|_{p,N,K} = \sup_{t\ge 0}(1+t)^K \sum_{j+|\alpha|\le N}\|\partial_t^j\partial_x^\alpha f(t,\cdot)\|_{L_p(\Omega)}$$

$f=(f_1,\dots f_s)$. vector の時

$$|\partial_t^j\partial_x^\alpha f|_{p,N,[a,b]} = \sum_{k=1}^{s} |\partial_t^j\partial_x^\alpha f_k|_{p,N,[a,b]}$$

$$|\partial_t^j\partial_x^\alpha f|_{p,N,K} = \sum_{k=1}^{s} |\partial_t^j\partial_x^\alpha f_k|_{p,N,K}$$

関数 F の Λ についての微分.

$$\partial_\Lambda^k F(t,x,\Lambda u)(\Lambda v_1,\dots,\Lambda v_k) = \partial_{\theta_1}\cdots\partial_{\theta_k} F(t,x,\Lambda u+\theta_1\Lambda v_1+\cdots+\theta_k\Lambda v_k)\Big|_{\theta_1=\cdots=\theta_k=0}$$

$$\Lambda_1 u = (u,\partial_1 u,\dots,\partial_n u),\quad \Lambda_2 u = (u,\partial_i u,\dots,\partial_n u,\ \partial_i\partial_j u\ \ 1\le i\le j\le n)$$

$$F(t,x,\Lambda u) = F(t,x,\Lambda_2 u,\Lambda_1\partial_t u,\partial_t^2 u).$$

また C, $C_{p_1\dots p_s}$ を夫々絶対定数, 本質的に量 $p_1\dots p_s$ にのみ依存する定数を表わすものとする。

2.2. 補間不等式.

2.1で定義された semi-norms に対して (Seeley's ext theorem と) 次の補間不等式が成立することが重要である。これは村松の表現定理を用いて示されるが、この定理を用いれば、もっと一般に円錐条件を満たす領域について変数によって異なる norm をもつ semi-norms の族について補間不等式を示すことが可能である。

Lemma 2.1. $0 \le M \le N$, 整数, $1 \le p \le \infty$, $K \geqq 0$ real number.

(i) $$\sum_{|\alpha|=M} \| \partial_x^\alpha \phi \|_{L_p(\Omega)} \le C_{N,p} \left(\|\phi\|_{L_p(\Omega)} \right)^{1-\frac{M}{N}} \left(\|\phi\|_{p,N} \right)^{\frac{M}{N}}$$

(ii) $$\sum_{j+|\alpha|=M} |\partial_t^j \partial_x^\alpha f|_{p,0,K} \le C_{p,N,K} \left(|f|_{p,0,K} \right)^{1-\frac{M}{N}} \left(|f|_{p,N,K} \right)^{\frac{M}{N}}$$

(iii) $$\sum_{j+|\alpha|=M} |\partial_t^j \partial_x^\alpha f|_{p,0,[a,b]} \le C_{p,N,a,b} \left(|f|_{p,0,[a,b]} \right)^{1-\frac{M}{N}} \left(|f|_{p,N,[a,b]} \right)^{\frac{M}{N}}$$

Lemma 2.1 と Hölder's ineq. $a \cdot b \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$

を用いて次が示せる。

Lemma 2.2. 1° $\|\phi\|_{p,N} \|\chi\|_{q,M} \le C \left[\|\phi\|_{p,k} \|\chi\|_{q,M+N-k} + \|\phi\|_{p,N+M-l} \|\chi\|_{q,l} \right]$

2° $\|\phi\|_{p,N} |f|_{q,M,[a,b]} \le C \left[\|\phi\|_{p,k} |f|_{q,N+M-k,[a,b]} + \|\phi\|_{p,N+M-l} |f|_{q,l,[a,b]} \right]$

3° $\|\phi\|_{p,N} |f|_{q,M,K} \le C \left[\|\phi\|_{p,k} |f|_{q,N+M-k,K} + \|\phi\|_{p,N+M-l} |f|_{q,l,K} \right]$

4° $$|f|_{p,N,[a,b]} |g|_{q,M,[a',b']} \le C \left[|f|_{p,N+M-l,[a,b]} |g|_{q,l,[a',b']} + |f|_{p,k,[a,b]} |g|_{q,N+M-k,[a',b']} \right]$$

5° $$|f|_{p,N,[a,b]} |g|_{q,M,K} \le C \left[|f|_{p,k,[a,b]} |g|_{q,N+M-k,K} + |f|_{p,N+M-l,[a,b]} |g|_{q,l,K} \right]$$

6° $$|f|_{p,N,K} |g|_{q,M,K'} \le C \left[|f|_{p,k,K} |g|_{q,N+M-k,K'} + |f|_{p,N+M-l,K} |g|_{q,l,K'} \right]$$

但し定数 C はそれぞれの量 $p, q, a, b, a', b', N, M, k, K'$ に依存し

k, l, N, M は正整数で $0 \le k \le N$, $0 \le l \le M$ を満足し,

$1 \le p, q \le \infty$, a, b, a', b' は実数 ($a \le b$, $a' \le b'$) $K, K' \geqq 0$

$\boxtimes$

2.3 整合条件。 $u \in C^\infty$ と簡単の為に仮定する。u に対して f, ϕ_0, ϕ_1 を

(ア) $f = \Phi(u)$, $u(0,x) = \phi_0(x)$, $\partial_t u(0,x) = \phi_1$

とおく。さらに

(イ) $u_j(x) = (\partial_t^p u)(0,x)$ $p \geq 2$; $u_0 = \phi_0$, $u_1 = \phi_1$

とおく。以下 u_j $(j \geq 2)$ を f, ϕ_0, ϕ_1 で評価し、さらに整合条件を導入する。定義から

(ウ) $$u_2 + a_1^{(0)}(0,x,\partial_x)u_1 + a_2^{(0)}(0,x,\partial_x)u_0 + F(0,x,\Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2) = f(0,x)$$

但し $$a_1^{(j)}(t,x,\partial_x)\chi(x) = \sum_{k=1}^n \partial_t^j a_k(t,x)\partial_k \chi(x) + \partial_t^j b_0(t,x)\chi(x)$$

$$a_2^{(j)}(t,x,\partial_x)\chi(x) = \sum_{i,k=1}^n \partial_i(\partial_t^j a_{ik}(t,x)\partial_k \phi(x)) + \sum_{i=1}^n \partial_t^j b_i(t,x)\partial_i \chi(x) + (\partial_t^j c(t,x) + \partial_t^j d(t,x))\chi(x).$$

今 $F(t,x,0)=0$, $\partial_\lambda F(t,x,0)=0$ より陰関数の定理を用いて、ある十分小なる正定数 σ_0 と $U(x,\lambda_1,\lambda_2,g) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \{(\lambda_1,\lambda_2,g) : |\lambda_1|+|\lambda_2|+|g| \leq \sigma_0\})$ があって、U は一意的に決まり、かつ $U(x,0,0,0)=0$ また、非線形方程式:

$$U - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(0,x)\lambda_{ij} - \sum_{ij} \partial_i a_{ij}(0,x)\lambda_j + \sum_{j=1}^n a_j(0,x)\lambda_{0j} + \sum_{j=0}^n b_j(0,x)\lambda_j + c(0,x)\lambda^* + d(0,x)\lambda^* + F(0,x,\hat{\lambda}_2,\hat{\lambda}_1,U) - g = 0$$

を満足する。($\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_1$ は Λ_2, Λ_1 に対応する変数)こうして、もし $\|\Lambda_2 \phi_0\|_\infty + \|\Lambda_1 \phi_1\|_\infty + \|f(0,\cdot)\|_\infty \leq \sigma_0 \Rightarrow$

$$u_2(x) = U(x, \Lambda_2\phi_0, \Lambda_1\phi_1, f(0,x))$$

さらに、帰納法により、ある C^∞ functions $G^{(j)}_{\alpha,\beta,\gamma}$ $(j=0,1,\dots,p-2)$ があって

(i) $\partial_t^{p-2} \bar{F}(0,x,\Lambda_2 u,\Lambda_1 \partial_t u,\partial_t^2 u)|_{t=0} = \partial_{\lambda_{0,0}} \bar{F}(0,x,\Lambda_2 u_0,\Lambda_1 u_1,u_2)u_p +$
$+ \sum_{\alpha,\beta,\gamma} G^{(0)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\Lambda_2 u_0,\Lambda_1 u_1,u_2)(\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1}\cdots(\Lambda_2 u_{p-2})^{\alpha_{p-2}}(\Lambda_1 u_1)^{\beta_1}\cdots(\Lambda_1 u_{p-1})^{\beta_{p-2}}\cdot$
$(u_3)^{\beta_{p-2}}\cdots(u_{p-1})^{\gamma_{p-3}}$,

$(|\alpha_1| + \cdots + (p-2)|\alpha_{p-2}| + |\beta_1| + \cdots + (p-2)|\beta_{p-2}| + \gamma_1 + \cdots + (p-3)\gamma_{p-3} = p-2)$

(ii) $\partial_t^{p-2-j} \bar{F}^{(j)}(0,x,\Lambda_2 u,\partial_t \Lambda_1 u,\partial_t^2 u)|_{t=0} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} G^{(j)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\Lambda_2 u_0,\Lambda_1 u_1,u_2) \times$
$\times (\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1}\cdots(\Lambda_2 u_{p-2-j})^{\alpha_{p-2-j}}(\Lambda_1 u_2)^{\beta_1}\cdots(\Lambda_1 u_{p-1-j})^{\beta_{p-2-j}}(u_3)^{\gamma_1}\cdots(u_{p-j})^{\gamma_{p-2-j}}$ $(j \geq 1)$

$(\sum_{l=1}^{p-2-j} l(|\alpha_l| + |\beta_l| + \gamma_l) = p-2-j)$

但し、$\bar{F}^{(j)}(0,x,\lambda) = \partial_t^j \bar{F}(t,x,\lambda)|_{t=0}$ とおいた。

が成立する。以上より $\bar{F}(0,x,0)=0$、$\partial_\lambda \bar{F}(0,x,0) = 0$、

$\Gamma(x,0,0,0) = 0$、に注意して帰納的に次の事が示せる。

Lemma 2.2 を用いて

Lemma 2.3. u に対して ϕ_0, ϕ_1, f, u_j を (ア)、(イ) で定義されたものとする。この時ある十分小なる正定数 σ_1 があってもし $\|\phi_0\|_{\infty,2} + \|\phi_1\|_{\infty,1} + |f|_{\infty,0,[0,1]} \leq \sigma_1$ であれば

$$\|u_p\|_{\infty,L} \leq C_L \{\|\phi_0\|_{\infty,L+p} + \|\phi_1\|_{\infty,L+p-1} + |f|_{\infty,L+p-2,[0,1]}\}$$

を満足する。 図

定義 2.4. $\phi_0 \in C^L(\bar{\Omega})$、$\phi_1 \in C^{L-1}(\bar{\Omega})$、$f \in C^{L-2}([0,\infty) \times \bar{\Omega})$ とし σ_1 を Lemma 2.3 のものとする。

ϕ_0, ϕ_1, f が L 階の整合条件を満足するとは次の2つの条件を満足することを云う。

(i) $\|\phi_0\|_{\infty,2} + \|\phi_1\|_{\infty,1} + |f|_{\infty,0,[0,1]} \leq \sigma_1$

(ii) $u_j(x)$ を $u_2(x)$ は (5) で定義されたもの. $j \geq 3$ について

$$u_j(x) = -(1 + \partial_{\lambda_{0,0}} F(0, x, \Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2))^{-1} \times$$

$$\times \Big\{ \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-2}{k} [a_1^{(k)}(0, x, \partial_x) u_{p-1-k} + a_2^{(k)}(0, x, \partial_x) u_{p-2-k}] +$$

$$\sum_{j=0}^{p-2} \frac{(p-2)!}{(p-2-j)!\, j!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} G^{(j)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x, \Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2)(\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1} \cdots (\Lambda_2 u_{p-2-j})^{\alpha_{p-2-j}} \times$$

$$\times (\Lambda_1 u_2)^{\beta_1} \cdots (\Lambda_1 u_{p-1-j})^{\beta_{p-2-j}} (u_3)^{\gamma_1} \cdots (u_{p-j})^{\gamma_{p-2-j}} - \partial_t^{p-2} f(0, x) \Big\}$$

とおいた時.

$$\phi_0(x) = 0, \quad \phi_1(x) = 0, \quad u_j(x) = 0 \ (j = 2 \cdots L-1) \text{ on } \Omega \text{ 閉}$$

2.4. "*Smoothing operator*" $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x) dx = 0 \ (|\alpha| \geq 1)$ なるものとする。また $\chi^j(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ を $\chi^j(t) = 0$ for $t \leq 0, t \geq 1/2$, $\int_0^\infty \chi^j(t) dt = 1$, $\int_0^\infty t^k \chi^j(t) dt = 0$, $1 \leq k \leq j$, なるものとする。さらに $\hat{u}(t, x)$ を t を parameter とみて, u を $\mathbb{R}^n$ の関数に良く知られた Seeley の方法により拡張したものとする。$\hat{u}$ は次の性質をもつ

(ア) $\hat{u}(t, x) = u(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times \overline{\Omega}$

(イ) $\sum_{j=0}^{M} \|\partial_t^j \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n), M-j} \leq C_{p,L} \sum_{j=0}^{M} \|\partial_t^j u(t, \cdot)\|_{p, M-j}$

$\quad (\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n), M-j} = \sum_{|\alpha| \leq M-j} \|\partial_x^\alpha \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})$

さらに $u\in C^M([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ の時 $\hat{u}\in C^M([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, また $\partial_t^j u(0,x)=0$ の時は $\partial_t^j\hat{u}(0,x)=0$ を満足する様に出来る。

$\theta\geq 1$ に対して <u>j-階の smoothing operator $S^j(\theta)$</u> を

$$S^j(\theta)u=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\theta^{n+1}\chi^{j-1}(\theta(t-s))\,\phi(\theta(x-y))\,\hat{u}(s,y)\,ds\,dy$$

で定義する。この時次の基本的な性質をもつことがわかる。

Lemma. 2.5. $K\geq 0$, $\theta\geq 1$, $1\leq p\leq\infty$, j, L を自然数とする。この時次の事柄が成立する。

(i) $\mathcal{E}^{N,p,K}=\{f;\ |f|_{p,N,K}<\infty\}$ とする。この時 $S^j(\theta)u\in C^\infty([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ かつ.

$$\partial_t^k S^j(\theta)u\,|_{t=0}=0\quad,\quad k=0,1,2,\cdots\cdots$$

(ii) $u\in\mathcal{E}^{j,p,K}\cap C^j$ の時は.

$$|(1-S^j(\theta))u|_{p,0,K}\leq C_{p,j,K}\,\theta^{-j}\,|u|_{p,j,K}.$$

(iii) M, N を $0\leq M\leq N$ なる整数とする。$u\in\mathcal{E}^{N,p,K}\cap C^N$ が $\partial_t^i u(0,x)=0$ for $i=0,\cdots,N-1$ を満足するとする。ならば.

$$|S^j(\theta)u|_{p,M,K}\leq C_{p,M,N,K,j}\,\theta^{M-N}|u|_{p,N,K}.\quad\square$$

§3. 線形化された方程式について。ここでは次の線形作用素を考える。

$$(3.1)\quad A_0\partial_t^2u-\sum_{i,j=1}^n\partial_i(A_{ij}\partial_ju)+\sum_{j=1}^nA_j\partial_j\partial_tu+B_0\partial_tu+\sum_{j=1}^nB_j\partial_ju$$

$$+\,Cu+Du=F\qquad\text{in } [0,\infty)\times\Omega$$

$$u=0\qquad\text{on } [0,\infty)\times\partial\Omega$$

$u(0.x) = \partial_t u(0\ x) = 0$ in Ω.

但し F は $\partial_t^j F(0,x) = 0$ for $j = 0, 1, \ldots, \hat{m}-3$

を満足するもの と以下仮定する。また

$\hat{m} = 2\{\max([n/2]+2, m-1)\} + 4 + [n/2]$。

今 係数に次の仮定をおく。

(3.2) 仮定 1° 係数 A_{ij}, A_j, B_j, C, D はすべて real-valued $\mathcal{B}^\infty([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ functions とする。

2° $A_{ij} = A_{ji}$, $\sum_{ij=1}^n A_{ij}\xi_i\xi_j \geq k_0|\xi|^2$, $\frac{1}{2} \leq A_0 \leq \frac{3}{2}$, $C > 0$.

3° $B_0 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^n \partial_j A_j \geq k_1$ for any $(t.x) \in [T_0.\infty)\times\overline{\Omega}$.

4° $\sum_{ij=1}^n |A_{ij}|_{\infty,0.0} + \sum_{j=1}^n |A_j|_{\infty,0.0} + |B_0|_{\infty.0.0} + |C|_{\infty.0.0} +$

$+ \sum_{j=0}^n |\partial_j A_j|_{\infty,0.0} + \sum_{ijk=1}^n |\partial_k A_{ij}|_{\infty.0.0} \leq C_0$

但し $C_0 = 2[\sum_{ij=1}^n (|a_{ij}|_{\infty.0.0} + \sum_{k=1}^n |\partial_k a_{ij}|_{\infty.0.0}) + \sum_{j=1}^n |\partial_j a_j|_{\infty.0.0}$

$+ |b_0|_{\infty.0.0} + |c|_{\infty.0.0}]$ ▨

energy を $E(t.x) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega \{A_0(t.x)(\partial_t u(t.x))^2 + \sum_{ij=1}^n A_{ij}(t.x)\partial_i u(t.x)\partial_j u(t.x)$

$+ C(t.x)(u(t.x))^2\}\,dx$ とおいて, Poincaré's inequality と部分積分より次が従う。

Theorem 3.1. $T>0$. 任意の定数, (3.2)の 1°, 2° を仮定する。

$\mathcal{A}_N = |(A_i, i=0,\ldots,n; A_{ij}, i.j=1\ldots n; B_j, j=0,\ldots,n; C.\ D)|_{\infty,N,0}$

$C_1 = 2[\sum_{ij=1}^n |a_{ij}|_{\infty,1,0} + \sum_{j=1}^n |a_j|_{\infty,1,0} + \sum_{j=0}^n |b_j|_{\infty,1,0} + |c|_{\infty,1,0} + |d|_{\infty,1,0}$

$+ 1]$

とおく。$\mathcal{A}_1 \leq C_1$ を仮定する。今 $\partial_t^j F(0\ x) = 0$. $j=0,1,\ldots,\hat{m}-3$

$|F|_{2,\hat{m}-1,0}$ に対して (3.1)の解 u が $[0,T]$で存在し $\partial_t^j u(0,x)=0$
$j=0,\dots,\hat{m}-1$ を満たし、さらに

$$|u|_{2,N,[0,T]} \le C_{T,N}\left(|F|_{2,N-1,[0,T]} + \mathcal{A}_N|F|_{2,0,[0,T]}\right)$$

である。但し

$$|f|_{2,N,[0,T]} = \sup_{0\le t\le T}\sum_{|\alpha|+j\le N}\|\partial_t^j\partial_x^\alpha f(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}.$$ ☒

次に decay estimate を示す。これもまた方程式(3.1)に u と $\partial_t u$ をかけてまた部分積分することと、Poincaré's inequality から示せる。

Theorem 3.2. (3.2) 1°~4° を仮定する。$K\ge 0$.

$$\mathcal{B}(t) \equiv \|(\partial_t A_{ij}(t,\cdot),\ i,j=1,\dots,n;\ \partial_t A_j(t,\cdot),\ j=0,\dots,n;\ B_j(t,\cdot),\ j=1,\dots,n;$$
$$\partial_t C(t,\cdot);\ D(t,\cdot))\|_{\infty,0}$$

とおく。この時次の性質を満たす正定数 $K_{\hat{m}}$, $T_{\hat{m}}$ が存在する。[性質] (i) $K_{\hat{m}}$, $T_{\hat{m}}$ は本質的に c_0, $\hat{m}$ にのみ依存する。

(ii) $\mathcal{A}_1 \le C_1$ さらに $\mathcal{B}(t) \le K_{\hat{m}}$ if $t\ge T_{\hat{m}}$ を仮定する。この時 Theorem 3.1 で保証される data F に対する (3.1) の解 u について次の一様な decay estimate が成立する。

$$|u|_{2,N,K} \le C_{\hat{m},K}\left[|F|_{2,N-1,K} + \mathcal{A}_N|F|_{2,0,K}\right]$$

for any integer $N\in[1,\hat{m}]$。ここで $C_{\hat{m},K}$ は本質的に $\hat{m}$, K, c_0, C_1, k_0, k_1, $T_{\hat{m}}$ にのみ依存する定数である。☒

§4. Iteration scheme. 2.3節の考察より，初期data φ_0 φ_1とfは$\hat{m}$階の整合条件を満足するものとする。さらに u_j $(j \geq 0)$ を φ_0 φ_1 fに対応して2.3節で逐次決定したものとする。この時，$\rho(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$を $\rho(t)=1$ near $t=0$，$\rho=0$ $|t| \geq 1/2$ なるものとして，

$$v(t,x) = \left[\sum_{j=0}^{\hat{m}-1} \frac{t^j}{j!} u_j(x)\right] \rho(t)$$

とおく。$\hat{m}$階の整合条件を満足するから．$v|_{\partial\Omega \times [0,\infty)} = 0$ である。さらに

$$|v|_{\infty,N,K} \leq C_{N,K}[\|\phi_0\|_{\infty,N+\hat{m}-1} + \|\phi_1\|_{\infty,N+\hat{m}-2} + |f|_{\infty,N+\hat{m}-3,K}]$$

である。今 $u = v + w$ の形で解を求めるとして，wについての方程式を書き直せば，Taylor展開により

$$(4.1) \quad \begin{cases} \mathcal{L}w + (\partial_\lambda F)(t,x,\Lambda v)\Lambda w + G(t,x,\Lambda w) = g(t,x) & \text{in } [0,\infty)\times\Omega \\ w = 0 & \text{on } [0,\infty)\times\partial\Omega \\ w(0,x) = 0 \qquad (\partial_t w)(0,x) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

但し $g(t,x) = f(t,x) - \Phi(v(t,x))$．

$$G(t,x,\lambda) = \int_0^1 (1-\theta)\, \partial_\lambda^2 F(t,x,\Lambda v + \theta\lambda)(\lambda,\lambda)\, d\theta$$

である。2.3節の考察から特に $(\partial_t^j g)(0,x) = 0$，$0 \leq j \leq \hat{m}-3$ が従う。そこで

$$\hat{\mathcal{L}}w = \mathcal{L}w + (\partial_\lambda F)(t,x,\Lambda v)\Lambda w = (1+\hat{a}_0)\partial_t^2 w - \sum_{j=1}^n \partial_i(\hat{a}_{ij}\partial_j w)$$
$$+ \sum_{j=1}^n \hat{a}_j \partial_j \partial_t w + \hat{b}_0 \partial_t w + \sum_{j=1}^n \hat{b}_j \partial_j w + cw + \hat{d}w$$

(c ははじめのもの)とおくと $\partial_\lambda F(t,x,0) = 0$ より，

初期dataを十分小にとれば

(4.2) (i) $\sum_{i,j=1}^{n} \hat{a}_{ij}\xi_i\xi_j \geq \frac{3}{2}k_0|\xi|^2$, $\frac{3}{4} \leq 1+\hat{a}_0 \leq \frac{5}{4}$, $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$

(ii) $\hat{b}_0(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \partial_i \hat{a}_i(t,x) \geq \frac{3}{2}k_1$ if $t \geq T_0$

(iii) $\sum_{i,j=1}^{n} |\hat{a}_{ij}|_{\infty,0,0} + \sum_{i,j,k=1}^{n} |\partial_k \hat{a}_{ij}|_{\infty,0,0} + |\hat{b}_0|_{\infty,0,0} + |c|_{\infty,0,0}$

$+ \sum_{j=0}^{n} |\partial_j \hat{a}_j|_{\infty,0,0} + \sum_{i,j,k=1}^{n} |\partial_k \hat{a}_{ij}|_{\infty,0,0} \leq \frac{3}{4}C_0$

(iv) $|(\hat{a}_{ij}, i,j=1,\dots,n;\ 1+\hat{a}_0;\ \hat{a}_j, j=1,\dots,n;\ \hat{b}_j, j=0,\dots,n;\ c;\ \hat{d})|_{\infty,1,0}$

$\leq \frac{3}{2}C_1$

また $v(t,x)=0$ $t \geq 1/2$ より $\hat{a}_0 = 0$, $\hat{a}_{ij} = a_{ij}$ $\hat{a}_j = a_j$

$b_j = \hat{b}_j$, $\hat{d} = d$ if $t \geq 1/2$ が成立する。 $\boxed{}$

そこで次の様に iteration scheme を作る。まず w_0 を

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}w = g \quad \text{in } [0,\infty)\times\Omega, \quad w=0 \text{ on } (0,\infty)\times\partial\Omega \\ w(0,x) = \partial_t w(0,x) = 0 \qquad \text{in } \Omega \end{cases}$$

の定理 3.1, 3.2 で保証された解とする。 w_{p+1} を順次

$$w_{p+1} = w_p + \dot{w}_p = \sum_{j=0}^{p} \dot{w}_j + w_0$$

で与えるとして、今 $\dot{w}_0, \dots, \dot{w}_p$ が既に与えられているとする。 $B>1$ を fixed constant として

$$S_p w = S^{\hat{L}}(B^p)w$$

とおく。但し

$$\hat{L} = 2\max(m-1, [n/2]+2)+1.$$

次に 2階の線形作用素 L_p を

$$L_p w = \hat{\mathcal{L}}w + \partial_\lambda G(t,x,S_p\Lambda w_p)\Lambda w$$

とおく。剰余項 e_p', e_p'', e_p は,

$$e_p' = \partial_\lambda G(t, x, \Lambda w_p)\Lambda \dot{w}_p - \partial_\lambda G(t, x, s_p \Lambda w_p)\Lambda \dot{w}_p$$

$$e_p'' = \mathcal{L} w_{p+1} + G(t, x, \Lambda w_{p+1}) - (\mathcal{L} w_p + G(t, x, \Lambda w_p))$$
$$- (\mathcal{L} \dot{w}_p + \partial_\lambda G(t, x, \Lambda w_p)\Lambda \dot{w}_p)$$

$$e_p = e_p' + e_p''$$

とおく。最後に,

$$g_0 = - S_0 [G(t, x, \Lambda w_0)]$$

$$g_{p+1} = -(s_{p+1} - s_p)E_p - s_{p+1} e_p - (s_{p+1} - s_p) G(t, x, \Lambda w_0)$$

但し $E_p = \sum_{j=0}^{p-1} e_j$ とおく。この時 $\dot{w}_{p+1}$ を

$$\begin{cases} L_{p+1} w = g_{p+1} \text{ in } [0, \infty) \times \Omega, & w = 0 \text{ on } [0, \infty) \times \partial\Omega \\ w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

の解として定義する。特に

$$\mathcal{L} w_{p+1} + G(t, x, \Lambda w_{p+1})$$
$$= g + e_p + (1 - s_p) E_p + (1 - s_p) G(t, x, \Lambda w_0)$$

を満足する.

3章の評価を用いて帰納的に次が示せる。

Lemma 4.1. $0 < \delta$ を十分小なる定数とする。この時 $\delta_m > 0$ が δ に応じて決まって もし data φ_0, φ_1, f が

$$\|\varphi_0\|_{\infty, 2\hat{m}+1} + \|\varphi_1\|_{\infty, 2\hat{m}} + |f|_{\infty, 2\hat{m}-1, K} \leq \delta_m$$

を満足し、さらに $\hat{m}$ 回の整合条件を満足すれば, 次の三つの事柄が成立する。 $\theta_j = 13^j$ とおく。

(i) $\partial_t^k \dot{w}_j(0, x) = 0$, for $k = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 0, 1, 2 \ldots$

(ii) $|\Lambda \dot{w}_j|_{2, L, K} \le \delta \theta_j^{-\beta + L}$ for any integer $L \in [0, \hat{L}]$

(iii) $|\Lambda \dot{w}_j|_{\infty, L, K} \le \delta \theta_j^{-\beta + L}$ for any integer $L \in [0, \hat{L}]$.

where

$$\beta = \max([n/2] + 2, m - 1).$$

$$\hat{L} = 2\beta + 1, \qquad \hat{m} = \hat{L} + 3 + [n/2]$$ 図

以下おおまかに，上の補題を示す。まず w_0 については定理 3.2 から，

(4.3) $$|w_0| \le C_{\hat{m}, K} |g|_{2, \hat{m}-1, K}$$
$$\le C [\|\phi_0\|_{\infty, 2\hat{m}} + \|\phi_1\|_{\infty, 2\hat{m}-1} + |f|_{\infty, 2\hat{m}-2, K}]$$

よって，δ_mを十分小にとっておけば，（δに応じて）

Lemma 4.2. もし $\|\phi_0\|_{\infty, 2\hat{m}} + \|\phi_1\|_{\infty, 2\hat{m}-1} + |f|_{\infty, 2\hat{m}-2, K} \le \delta_m \Rightarrow$

(i) $\partial_t^k w_0(0, x) = 0$ $k = 0, 1, 2, \ldots, \hat{m} - 1$

(ii) $|\Lambda w_0|_{2, \hat{L}, K} \le \delta$.

(iii) $|\Lambda w_0|_{\infty, \hat{L}, K} \le \delta$. 図

そこで，$\dot{w}_j$, $j = 0, \ldots, p$ に対して既に Lemma 4.1 が示されているとする。この時次の補題が帰納法の仮定と smoothing operator の性質，補間不等式及び等比数列の計算により従う。

Lemma 4.3. $w_j = w_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \dot{w}_k \quad j=1,\dots,p+1;$

(i) $|S_j \Lambda w_j|_{\ell,L,K} \le C_L \delta\, \theta_j^{-\beta+L}$ if $-\beta+L \ge \tau$

(ii) $|S_j \Lambda w_j|_{\ell,L,K} \le C \delta$ if $-\beta+L \le \tau$

(iii) $|(1-S_j)\Lambda w_j|_{\ell,L,K} \le C\delta\, \theta_j^{-\beta}$ if $0 \le L \le \tilde{\tau}$

(iv) $\partial_t^k w_j(0,x) = 0, \quad k=0,1,\dots,\tilde{m}-1$

但し これ以下 τは十分小なる正定数. また ℓ は 2 又は ∞を表わしているものとする。 □

Lemma 4.4. δ_mを十分小にとって

(A) $\|\phi_0\|_{\infty,2\tilde{m}+1} + \|\phi_1\|_{\infty,2\tilde{m}} + |f|_{\infty,2\tilde{m}-1,K} \le \delta_m$

が成立しているとする。次の estimate が従う。$0 \le L \le \tilde{m}$,

(i) $|\partial_\lambda G(t,x,S_j\Lambda w_j)|_{\infty,L,0} \le C\delta\, \theta_j^{-\beta+L}$ if $-\beta+L \ge \tau$

$|\partial_\lambda G(t,x,S_j\Lambda w_j)|_{\infty,L,0} \le C\delta$ if $-\beta+L \le -\tau$

(ii) $|\partial_\lambda^2 G(t,x,S_j\Lambda w_j + \theta(1-S_j)\Lambda w_j)|_{\infty,L,0} \le C(1+\delta\,\theta_j^{-\beta+L})$

for $0 \le L \le \tilde{\tau}$, $-\beta+L \ge \tau$

$|\partial_\lambda^2 G(t,x,S_j\Lambda w_j + \theta(1-S_j)\Lambda w_j)|_{\infty,L,0} \le C$ for $-\beta+L \le -\tau$.

(iii) $|\partial_\lambda^2 G(t,x,\Lambda w_j + \theta\Lambda \dot{w}_j)|_{\infty,L,0} \le C(1+\delta\,\theta_j^{-\beta+L})$

for $-\beta+L \ge \tau$, $0 \le L \le \tilde{\tau}$

$|\partial_\lambda^2 G(t,x,\Lambda w_j + \theta\Lambda \dot{w}_j)|_{\infty,L,0} \le C$ if $-\beta+L \le -\tau$. □

e_j' e_j'' の表現と Lemmas 4.3, 4.4 を用いて

Lemma 4.5. 上の (A) が十分小なる δ_mで成立しているとする。

$\Rightarrow$ (i) $|e_j|_{\ell,L,K} \le C\delta^2\theta_j^{-2\beta+L}$ for $0 \le L \le \tilde{L}$

(ii) $\partial_t^k e_j(0, x) = 0$, $k = 0, 1, 2 \cdots$

for $\ell = 2$ or ∞, $j = 0, 1, 2 \cdots p$ $\square$

最後に次のlemmaも同様にして今までのlemmasを用いて示せる。

Lemma 4.6. (A)が成立しているとする。

(ア) (i) $\partial_t^j G(t, x, \Lambda w_0)\big|_{t=0} = 0$ $j = 0, 1, 2, \ldots, \tilde{L}-1$.

(ii) $|G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty,L,K} \le C\delta^2$,

(iii) $|(1-S_p)G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty,L,K} \le C\delta^2\theta_p^{-2\beta+L}$ if $0 \le L \le \tilde{L}$,

(iv) $|(1-S_{p+1})G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty,L,K} \le C\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ if $0 \le L \le \tilde{L}$

(v) $|(S_{p+1}-S_p)G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty,L,K} \le C_L\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ if $L \ge 0$.

(イ) (i) $\partial_t^k E_p(0, x) = 0$, $k = 0, 1, 2, \cdots$

(ii) $|E_p|_{\infty,L,K} \le C\delta^2\theta_p^{-2\beta+L}$ if $-2\beta+L \ge \tau$, $L \le \tilde{L}$.

(iii) $|E_p|_{\infty,L,K} \le C\delta^2$ if $-2\beta+L \le -\tau$

(iv) $|(1-S_p)E_p|_{\infty,L,K} \le C\delta^2\theta_p^{-2\beta+L}$ if $0 \le L \le \tilde{L}$

(v) $|(1-S_{p+1})E_p|_{\infty,L,K} \le C\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ if $0 \le L \le \tilde{L}$

(vi) $|(S_{p+1}-S_p)E_p|_{\infty,L,K} \le C_L\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ if $L \ge 0$.

以上をあわせて特に

(ウ) (i) $\partial_t^j g_0(0, x) = \partial_t^j g_{p+1}(0, x) = 0$, $j = 0, 1, 2 \cdots$

(ii) $|g_0|_{\infty,L,K} \le C_L\delta^2\theta_0^{-2\beta+L}$ for $L \ge 0$

(iii) $|g_{p+1}|_{\infty,L,K} \le C_L\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ for $L \ge 0$.

ここで Lemma 4.1 を Lemma 4.6 (ii) と Theorem 3.2 を用いて示す。 まず Lemma 4.4 (ii) より δ を十分小にとれば、
$L_{p+1} w = \hat{\mathcal{L}} w + (\partial_\lambda G)(t, x, S_{p+1}\Lambda w_{p+1})\Lambda w$ の係数は、定理3.2の仮定をすべて満足する。こうして、定理3.2より
$0 \le L \le \tilde{m}-2$ に対して

$$|\Lambda \dot{w}_{p+1}|_{2,L,K} \le C\,[\,|g_{p+1}|_{2,L+1,K} +$$

$$(1+|(\partial_\lambda G(t,x,S_{p+1}\Lambda w_{p+1})|_{\infty,L+2,0})\,|g_{p+1}|_{2,0,K}\,]$$

$$\le C_L\, \delta^2\, \theta_{p+1}^{-2\beta+L+1}$$

特に、$\beta>1$ より $\left(\max_{0\le L\le \tilde{m}-2} C_L\right)\delta \le 1$ に δ を十分小にとって

$$|\Lambda \dot{w}_{p+1}|_{2,L,K} \le \delta\, \theta_{p+1}^{-\beta+L} \quad \text{for } \forall L\in[0, \tilde{L}]$$

が従う。また Sobolev's inequality より、 $0\le L\le \tilde{L} \Rightarrow$

$$|\Lambda \dot{w}_{p+1}|_{\infty,L,K} \le C_s\, C_{L+[n/2]+1}\,\delta^2\,\theta_{p+1}^{-2\beta+L+[n/2]+2}$$

今 $\beta = \max([n/2]+2, m-1)$ であるから δ を十分小にとって $C_s\left(\max_{0\le L\le\tilde{L}} C_{L+[\frac{n}{2}]+1}\right)\cdot\delta \le 1$ にとって

$$|\Lambda \dot{w}_{p+1}|_{\infty,L,K} \le \delta\, \theta_{p+1}^{-\beta+L}$$

が示せた。以上で Lemma 4.1 の証明は完結した。
最後に定理の証明をする。Lemma 4.1 から容易に

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\Lambda \dot{w}_p|_{\infty, m-2, K} + |\Lambda w_0|_{\infty, m-2, K} \leq \frac{2B}{B-1} \cdot \delta$$

が従う。こうして $w \in C^m([0, \infty) \times \bar{\Omega})$ で

$$w = w_0 + \sum_{p=0}^{\infty} \dot{w}_p$$

$$|w|_{\infty, m, K} \leq \left(\frac{2B}{B-1}\right) \cdot \delta$$

の存在はわかる。さらに

$$|\hat{\mathcal{L}} w + G(t, x, \Lambda w) - g|_{\infty, 0, 0}$$

$$\leq |\hat{\mathcal{L}} w + G(t, x, \Lambda w) - (\hat{\mathcal{L}} w_{p+1} + G(t, x, \Lambda w_{p+1}))|_{\infty, 0, 0}$$

$$+ |e_p|_{\infty, 0, 0} + |(1 - S_p) E_p|_{\infty, 0, 0} + |(1 - S_p) G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty, 0, 0}$$

$$\leq C \left[\sum_{j=p+2}^{\infty} |\Lambda \dot{w}_j|_{\infty, 0, 0} + \theta_{p+1}^{-\beta} \right]$$

が任意の p について成立する。こうして

$$\hat{\mathcal{L}} w + G(t, x, \Lambda w) = g \quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega$$

を満足し w の作り方から明らかに $w = 0$ on $(0, \infty) \times \partial\Omega$

$w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0$ in Ω が従う。こうして w が所求の解である。

Q.E.D.

参考文献: Y. SHIBATA: On the global existence of classical solutions of mixed problem for some second order non-linear hyperbolic operators with dissipative term in the interior domain, to appear.