数理解析研究所講究録
第529巻 1984年 37-61

Flat Cauchy問題のwell-posednessの必要条件と解のregularity-loss

京大 数理研　萬代 武史

§1 Introduction

目標を説明するために、まず次の例を考える。

$$P=D_t^2-t^{2k}D_x^2+t^{k-1}a(t,x)D_x+b(t,x)D_t+c(t,x)$$

(kは正整数, $a,b,c\in C^\infty$, $D_t=-i\partial_t$ etc.)

この作用素については、次のことがわかっている。すなわち、$D_t^2-t^{2k}D_x^2$を主部とする作用素の($t=0$を初期面とする)Cauchy問題がC^∞-well-posedになるには、低階項が上の形をしていることが必要十分であり、このとき$|\mathrm{Im}\,a(0,x)|$が解のregularity-lossを決定する。このように『well-posednessのための条件のぎりぎりの所が解のregularity-lossを支配している。』という現象が我々の興味の対象である。t方向のふるまいのみに注目することによって、特性根のいろいろな接触のしかたを扱って、次の形の定理を求めることをここでの目標とする。『主部をfixしたとき、Cauchy問題がwell-posedになるためには低階項はあ

る種の条件を満たすことが必要であり、そのぎりぎりの所から決まってくるある種の量が、解の regularity-loss に影響する。

我々は次の理由によって、係数を C^∞ には限らないで、もっと広い class で考える。($t=0$ で singular な係数をもつ作用素に対して、well-posedness の必要条件を求めたりすることは、それ自体、もちろん意味のあることであるが、筆者にとっての最大の理由は次のことである。)

次の Tricomi 型の作用素を考えよう。

$$P = D_t^2 - t^{2k-1} D_x^2 + t^{k-1} a(t,x) D_x + b(t,x) D_t + c(t,x)$$

$$(k \text{ は正整数}, \quad a, b, c \in C^\infty)$$

この作用素についても、$D_t^2 - t^{2k-1} D_x^2$ を主部とする作用素の Cauchy 問題が well-posed になるには低階項が上の形をしていることが必要十分であるが、このときは上に述べたような現象はおこらない。すなわち、低階項によらず、一定の regularity-loss しかおこらない。しかし、視点を広げて、C^∞ 以外の係数も考えると、$P = D_t^2 - t^{2k-1} D_x^2 + t^{k-\frac{3}{2}} a(t,x) D_x + b(t,x) D_t + c(t,x)$ $(a, b, c \in C^\infty)$ に対しても、ある意味で Cauchy 問題が well-posed になり、$|\mathrm{Im}\, a(0,x)|$ が解の regularity-loss に影響を与える。又、Fuchsian type の作用素でも同様の現象がおこるはずである。したがって、このような $t=0$ で singular な係数をもつ作用素をも統一的に扱いたいわけである。

§2. 定義と結果

我々の考える作用素は

$$P=\sum_{h=0}^{m} P_{m-h}=\sum_{h=0}^{m}\sum_{j+|\alpha|=m-h} a_{j,\alpha}(t,x)D_t^j D_x^\alpha$$

において、

$$(A-\mu_0, M)\quad \begin{cases} a_{m,0}(t,x)\equiv 1 \\ a_{j,\alpha}\in t^{-m+j+\mu_0|\alpha|}\times E_M \end{cases}$$

を満たすものである。但し、μ_0 は fix した正有理数，M は fix した正整数で、$E_M=\{\varphi\ ;\ \varphi(t^M,x)\in C^\infty([0,T]\times R^n)\}$ かつ、$M\mu_0$ は整数。いいかえると、

$$t^m P(t,x;\tau,\xi)=\sum_{j+|\alpha|\leq m}\tilde{a}_{j,\alpha}(t,x)(t\tau)^j(t^{\mu_0}\xi)^\alpha\ ,\ \tilde{a}_{j,\alpha}\in E_M$$

となる作用素である。

こういう作用素に対しては、普通の意味の初期値問題は考えにくいが、$t=0$ で flat な右辺を与えて、$t=0$ で flat な解を求めるという flat Cauchy 問題を考えることができる。ここでは次の意味の well-posedness を考える。

定義

P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0-well-posed とは、ある原点の近傍 Ω と正定数 C_0 があって、次の２条件をみたすこととする。

$$(E)\quad \begin{cases} \forall f\in C^\infty_{flat}(\Omega^+)\ ,\ \exists u\in C^\infty_{flat}(\Omega^+) \\ \text{s.t.}\quad Pu=f\ \text{ in }\Omega^+ \end{cases}$$

注U

$$(\mathrm{U})\ \begin{cases} \Gamma=\Gamma_{\mu_0}(\hat{t},\hat{x};C_0)\subset\Omega^+ \text{ となるような任意の } (\hat{t},\hat{x})\in\Omega^+ \\ \text{に対して、} \\ u\in C^\infty_{flat}(\Omega^+),\ Pu=0 \text{ in } \Gamma \Rightarrow u=0 \text{ in } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{但し、}\begin{cases} \Omega^+=\{(t,x)\in\Omega;\ t\geqq 0\} \\ C^\infty_{flat}(\Omega^+)=\{\varphi\in C^\infty(\Omega):\ \operatorname{supp}\varphi\subset\Omega^+\} \\ \qquad\qquad =\{\varphi\in C^\infty(\Omega^+):\ \varphi \text{ は } t=0 \text{ で flat}\} \\ \Gamma_{\mu_0}(\hat{t},\hat{x}:C_0)=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1};\ |x-\hat{x}|\leqq C_0(\hat{t}^{\mu_0}-t^{\mu_0}),\ 0\leq t\leq\hat{t}\} \end{cases}$$

注

1. $\mu_0=1$ のときは、(U) は有限伝播速度の存在であり、$\mu_0<1$ のときは、それよりも弱い条件である。
2. C^∞-係数のときの初期値問題や、Fuchsian type の初期値問題は容易に flat Cauchy 問題に reduce できる。
3. 上の意味で well-posed のとき、$P_m(t,x:\tau,\xi)$ は $t>0$ で双曲型になる。すなわち、$P_m(t,x:\tau,\xi)=0$ は τ につき、実根のみをもつ。

さて、ここでは簡単のために $(\tau,\xi)=(0,e_n)=(0,0,\cdots,0,1)$ の方向で考える。

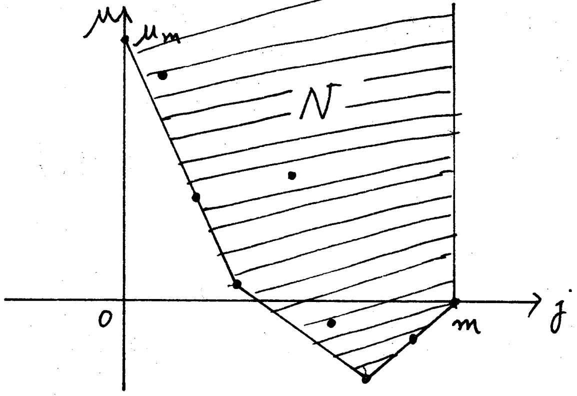
$$\mu^{(h)}_{j,\alpha}=\sup\{\mu\in\mathbb{R};\ \text{ある } g\in\mathcal{E}_M \text{ があって、原点の近傍で、}\ \partial_\tau^{j}\partial_\xi^{\alpha}P_{m-h}(t,x;0,e_n)=t^{\mu}\cdot g(t,x)\}$$

とし、点列 $\{(j,\mu^{(0)}_{j,0})\}_{j=0}^{m}$ を (j,μ)-平面にとり、これから、

Newton polygon N をつくる。すなわち、

$\nu(K)=\min\{\mu_{j,0}^{(0)}+Kj\ ;\ j=0,1,\cdots,m\}$ $(K\in\mathbb{R})$ とし、

$N=\{(j,\mu)\in\{0,1,\cdots,m\}\times(\mathbb{R}\cup\{\infty\})\ ;\ \mu\geq\nu(K)-Kj\ \text{for}\ {}^{\forall}K\in\mathbb{R}\}$.



このNはP_mのみで決まる図形である。(この図形の意味については、補題4.3参照。)

このとき、低階項の条件として、

__定理 1__

$(A-\mu_0, M)$と、Pに対する flat Cauchy 問題が原点でμ_0-well-posed であることを仮定すると、

$(h+j+|\alpha|,\ h+\mu_{j,\alpha}^{(h)}+(1-\mu_0)|\alpha|)\in N$ $(h=0,1,\cdots,m\ ;\ j+|\alpha|\leq m-h)$

特に、$\{(j,\mu_{j,0}^{(h)})\}_{j=0}^{m-h}$ から作られる Newton polygon はNを$(-h,-h)$だけ平行移動したものに含まれる。

次にNの垂直でない一辺 $L:\mu=\nu-Kj$ に注目する。定理1によって、

$\partial_t^{j}\partial_{\xi'}^{\alpha'}P_{m-h}(t,x\,;0,e_n)=j!\,\alpha'!\,t^{\nu-K(j+|\alpha'|+h)-h-(1-\mu_0)|\alpha'|}\cdot b_{j,\alpha'}^{(h)}(t,x)$ ⋯ ①

$b_{j,\alpha'}^{(h)}\in E_M$ $(h=0,1,\cdots,m\ ;\ j+|\alpha'|\leq m-h)$ と表わせる。但し、

$\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$, $\alpha'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$.

$$f^{(h)}_{\alpha'}(\tau)=\sum_{l=0}^{m-h-|\alpha'|} b^{(h)}_{l,\alpha'}(0,0)\,\tau^{l} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

とし、$f^{(0)}_{0}(\tau)=0$ の d重根 τ_0 を1つ考える。これに対して

$$B^{(h)}_{j,\alpha'}=\frac{1}{j!}\sum_{s=0}^{h}\sum_{\mu=0}^{h-s}\sum_{\substack{g_1+\cdots+g_\mu=h-s+\mu\\ g_\sigma\geq 2\,(\forall\sigma)}}\frac{\tau_0^{\mu}}{\mu!\,g_1!\cdots g_\mu!\,i^{h-s}}\left(\partial_\tau^{j+h-s+\mu}f^{(s)}_{\alpha'}\right)(\tau_0)$$

$$\times\prod_{\sigma=1}^{\mu}\{K(K-1)\cdots(K-g_\sigma+2)\} \quad \cdots\cdots ③$$

と定義する。

$$\left(\begin{array}{l} B^{(0)}_{j,\alpha'}=\frac{1}{j!}\left(\partial_\tau^{j}f^{(0)}_{\alpha'}\right)(\tau_0) \\ B^{(1)}_{j,\alpha'}=\frac{1}{j!}\left\{\frac{\tau_0 K}{2i}\left(\partial_\tau^{j+2}f^{(0)}_{\alpha'}\right)(\tau_0)+\left(\partial_\tau^{j}f^{(1)}_{\alpha'}\right)(\tau_0)\right\} \qquad \text{etc.}\end{array}\right)$$

このとき、

<u>定理 2</u>

定理1と同じ仮定のもとで、

$$\left\{\begin{array}{ll} B^{(h)}_{j,\alpha'}=0 & \text{for } h+j+|\alpha'|\leq d-1 \\ B^{(0)}_{d,0}\neq 0. & \end{array}\right. \quad \cdots\cdots ④$$

注

$\partial_\tau^{j}\partial_{\xi'}^{\alpha'}P_{m-h}(t,x;0,e_n)$ は $\tau^{j}\xi'^{\alpha'}\xi_n^{m-h-j-|\alpha'|}$ の係数である。我々の結論は、係数のことばで書けるが、e_nはR^nの1つの標準的な単位ベクトルのしてとっているわけだから、$\partial_\tau^{j}\partial_{\xi'}^{\alpha'}P_{m-h}$として扱うことにする。

次に、$\sum_{h=0}^{d}B^{(h)}_{d-h,0}\,\lambda\left(\lambda-\frac{1}{i}\right)\cdots\left(\lambda-\frac{d-h-1}{i}\right)=0$ の根を、$\lambda_1,\cdots$

λ_d とする。このとき、

定理 3

(A−μ_0, M), ①, ④ を仮定すると、ある定数 C_0 (M, m, ν, K にのみ depend する) が存在して、次のことが成立する。

「

$$\|u\|_{H^p(\Omega^+_\theta)} \leqq C \|Pu\|_{H^q(\Omega^+_\theta)}$$

$$\text{for } {}^\forall u \in C^\infty_{flat}(\Omega^+),\ 0 \leqq {}^\forall\theta \leqq T\ (>0)$$

が成立するとすると、

$$-\mathrm{Im}\,\lambda_l \leqq C_0\ (q+m-p)$$ 」

但し、Ω は原点の近傍，$\Omega^+_\theta = \{(t,x) \in \Omega\ ;\ 0 \leqq t \leqq \theta\}$，
p, q は整数，$\|\cdot\|_{H^p(\Omega^+_\theta)}$ は Ω^+_θ 上の p 次 Sobolev norm
C は u, θ に independent な定数。

(㊟ 上の不等式が成立するとき、$q+m-p \geqq 1$ である。)

この定理 3 は、$\max\{-\mathrm{Im}\,\lambda_l\ ;\ l = 1, \cdots, d:\ \tau_0$ は $f_0^{(0)}(\tau) = 0$ の d 重根$\}$ なる量が大きくなると、必然的に解の regularity-loss が大きくなることを示している。

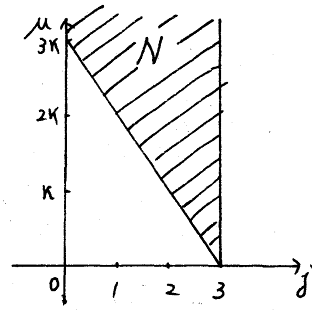
§3. 例

ここであげる例はすべて、$n = 1$ である。

例 1.

$$m = 3\ ,\quad P_3 = (\tau - t^K\xi)(\tau - 2t^K\xi)(\tau - 3t^K\xi)$$

$$= \tau^3 - 6t^{\kappa}\tau^2\xi + 11t^{2\kappa}\tau\xi^2 - 6t^{3\kappa}\xi^3$$



なる主部をもつ作用素を考える。(κは有理数で、$\kappa > -1$)。Newton polygon は右図のようになる。

定理1により、低階項は次の形をしている。

$$\begin{cases} P_2 = At^{-1}\tau^2 + Bt^{\kappa-1}\tau\xi + Ct^{2\kappa-1}\xi^2 \\ P_1 = Et^{-2}\tau + Ft^{\kappa-2}\xi \\ P_0 = Gt^{-3} \qquad\qquad , \ A, B, \cdots, G \in \mathcal{E} = \bigcup_{M \geq 1} \mathcal{E}_M \end{cases}$$

N の辺 $\mu = 3\kappa - \kappa\xi$ ($\nu = 3\kappa$) を考えると、

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^3 - 6\tau^2 + 11\tau - 6 = (\tau-1)(\tau-2)(\tau-3).$$

したがって、単根($d=1$)を $\tau_0 = 1, 2, 3$ と3つ持つ。それぞれのτ_0に対して、

$$B_{0,0}^{(1)} = \begin{cases} -\dfrac{3\kappa}{2} + A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) & \text{(i) } \tau_0 = 1 \text{ のとき)} \\ 4A(0,0) + 2B(0,0) + C(0,0) & \text{(ii) } \tau_0 = 2 \text{ のとき)} \\ \dfrac{9\kappa}{2} + 9A(0,0) + 3B(0,0) + C(0,0) & \text{(iii) } \tau_0 = 3 \text{ のとき)}, \end{cases}$$

$$B_{1,0}^{(0)} = \begin{cases} 2 & \text{((i))} \\ -1 & \text{((ii))} \\ 2 & \text{((iii))} \end{cases}$$ となる。定理3のλ_1は $-\dfrac{B_{0,0}^{(1)}}{B_{1,0}^{(0)}}$ である。

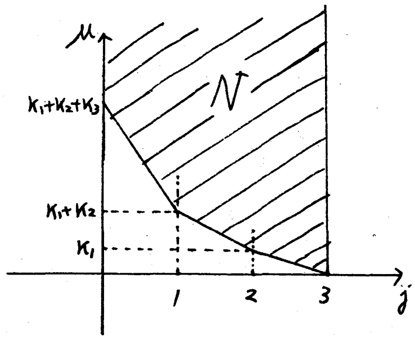
例 2

$m = 3$, $P_3 = (\tau - t^{\kappa_1}\xi)(\tau - t^{\kappa_2}\xi)(\tau - t^{\kappa_3}\xi)$

$$= \tau^3 - (t^{\kappa_1} + t^{\kappa_2} + t^{\kappa_3})\tau^2\xi + (t^{\kappa_1+\kappa_2} + t^{\kappa_1+\kappa_3} + t^{\kappa_2+\kappa_3})\tau\xi^2$$

$$- t^{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3}\xi^3$$ ($\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ は有理数で、$\kappa_3 > \kappa_2 > \kappa_1 > -1$)

を考える。Newton polygon は右図のようになり、定理1によって低階項は次の形をしている。



$$\begin{cases} P_2 = At^{-1}\tau^2 + Bt^{\kappa_1-1}\tau\xi + Ct^{\kappa_1+\kappa_2-1}\xi^2 \\ P_1 = Et^{-2}\tau + Ft^{\kappa_1-2}\xi \\ P_0 = Gt^{-3} \end{cases} , \quad A, B, \cdots, G \in \mathcal{E}$$

Newton polygon の辺は $L_1 : \mu = 3\kappa_1 - \kappa_1 j$, $L_2 : \mu = \kappa_1 + 2\kappa_2 - \kappa_2 j$, $L_3 : \mu = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_3 j$ の3本がある。それぞれに対して B's を計算しよう。

。L_1 について.

$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^3 - \tau^2 = \tau^2(\tau - 1)$ となり、2重根 $(d=2)$, 0 と単根 $(d=1)$, 1 とをもつ。

$d=2$, $\tau_0 = 0$ のとき、

$B_{2,0}^{(0)} = -1$, $\quad B_{0,0}^{(1)} = 0$,

$B_{1,0}^{(1)} = B(0,0)$, $B_{0,0}^{(2)} = F(0,0)$.

$d=1$, $\tau_0 = 1$ のとき.

$B_{1,0}^{(0)} = 1$,

$B_{0,0}^{(1)} = A(0,0) + B(0,0) + \dfrac{2\kappa_1}{i}$.

$B_{0,0}^{(1)} = 0$ だから定理2はすでに満たされている.

。L_2 について.

$f_0^{(0)}(\tau) = -\tau^2 + \tau = -\tau(\tau - 1)$ となり. $d=1$, $\tau_0 = 0, 1$.

$$B_{1,0}^{(0)} = \begin{cases} 1 & (\text{i}) \ \tau_0 = 0 \ ) \\ -1 & (\text{ii}) \ \tau_0 = 1 \ ) \end{cases}$$

$$B_{0,0}^{(1)} = \begin{cases} C(0,0) & (\text{i}) \ ) \\ -\dfrac{\kappa_2}{i} + B(0,0) + C(0,0) & (\text{ii}) \ ) \end{cases}$$

。L_3について.

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau - 1 \quad \text{となり}, \quad d = 1,\ \tau_0 = 1 .$$

$$B^{(0)}_{1,0} = 1 \quad , \quad B^{(1)}_{0,0} = C(0,0)$$

L_1のところででてきたように、この作用素に関しては、$m-2 = 1$階項まで regularity-loss に影響する。

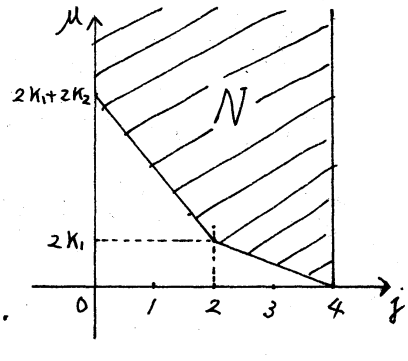
◎以上の例1,2では、定理2は意味がなく、定理1で必要条件としてでた条件は実は十分条件でもある。(R. Sakamoto [2])

例 3

$m=4$, $P_4 = (\tau - t^{\kappa_1}\xi)^2(\tau - t^{\kappa_2}\xi)^2$

$= \tau^4 - 2(t^{\kappa_1} + t^{\kappa_2})\tau^3\xi + (t^{2\kappa_1} + 4t^{\kappa_1+\kappa_2} + t^{2\kappa_2})\tau^2\xi^2$

$- 2(t^{2\kappa_1+\kappa_2} + t^{\kappa_1+2\kappa_2})\tau\xi^3 + t^{2\kappa_1+2\kappa_2}\xi^4$ (κ_1, κ_2は有理数, $\kappa_2 > \kappa_1 > -1$). を考える。



Newton polygon は右図のようになり、定理1によって低階項は次の形。

$$\begin{cases} P_3 = At^{-1}\tau^3 + Bt^{\kappa_1-1}\tau^2\xi + Ct^{2\kappa_1-1}\tau\xi^2 + Et^{2\kappa_1+\kappa_2-1}\xi^3 \\ P_2 = Ft^{-2}\tau^2 + Gt^{\kappa_1-2}\tau\xi + Ht^{2\kappa_1-2}\xi^2 \\ P_1 = It^{-3}\tau + Jt^{\kappa_1-3}\xi \\ P_0 = Kt^{-4} \qquad , \quad A, B, \cdots, K \in E \end{cases}$$

Nの辺は、$L_1: \mu = 4\kappa_1 - \kappa_1 j$, $L_2: \mu = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 - \kappa_2 j$ の2本が

ある。それぞれに対して $B^{i}_{j,0}$ を計算しよう。

。L_1について。

$f^{(0)}_0(\tau) = \tau^4 - 2\tau^3 + \tau^2 = \tau^2(\tau-1)^2$ となり、$d=2$, $\tau_0 = 0, 1$。

$$
\begin{cases}
B^{(0)}_{2,0} = 1 \\
B^{(1)}_{0,0} = \begin{cases} 0 & (\text{i})\ \tau_0 = 0 \text{ のとき}) \\ A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) + \frac{\kappa_1}{i} & (\text{ii})\ \tau_0 = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \\
B^{(1)}_{1,0} = \begin{cases} C(0,0) & (\text{i})\ ) \\ 3A(0,0) + 2B(0,0) + C(0,0) + \frac{6\kappa_1}{i} & (\text{ii})\ ) \end{cases} \\
B^{(2)}_{0,0} = \begin{cases} H(0,0) & (\text{i})\ ) \\ \kappa_1 B(0,0) + F(0,0) + G(0,0) + H(0,0) - 7\kappa_1^2 + 4\kappa_1 & (\text{ii})\ ) \end{cases}
\end{cases}
$$

定理２によって。$\underline{A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) + \frac{\kappa_1}{i} = 0}$

。L_2について。

$f^{(0)}_0(\tau) = \tau^2 - 2\tau + 1 = (\tau-1)^2$ となり、$d=2$, $\tau_0 = 1$.

$$
\begin{cases}
B^{(0)}_{2,0} = 1 \\
B^{(1)}_{0,0} = C(0,0) + E(0,0) + \frac{\kappa_2}{i} \\
B^{(1)}_{1,0} = C(0,0) \\
B^{(2)}_{0,0} = H(0,0)
\end{cases}
$$

定理２によって。$\underline{C(0,0) + E(0,0) + \frac{\kappa_2}{i} = 0}$

この例では、$t>0$ では constant multiplicity になっているので定理１と、constant multiplicity のときの結果から、もっと強い条件が導びけ、それが同時に十分条件にもなる。

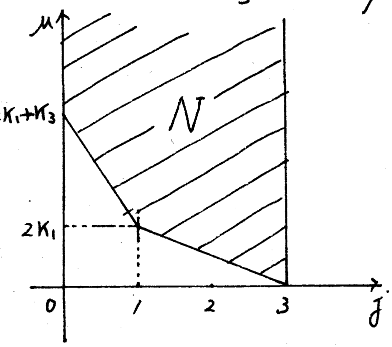
例 4.

$m=3,\quad P_3=(\tau-t^{\kappa_1}\xi)(\tau-t^{\kappa_1}\xi-t^{\kappa_2}\xi)(\tau-t^{\kappa_3}\xi)$

$=\tau^3-(2t^{\kappa_1}+t^{\kappa_2}+t^{\kappa_3})\tau^2\xi+(t^{2\kappa_1}+t^{\kappa_1+\kappa_2}+2t^{\kappa_1+\kappa_3}+t^{\kappa_2+\kappa_3})\tau\xi^2$

$-(t^{2\kappa_1+\kappa_3}+t^{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3})\xi^3$ （$\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$ は有理数で $\begin{matrix}\kappa_2>\\ \kappa_3>\end{matrix}\kappa_1>-1$）

を考える。Newton polygon は右図のようになり、定理1によって、低階項は次の形。



$$\begin{cases} P_2=At^{-1}\tau^2+Bt^{\kappa_1-1}\tau\xi+Ct^{2\kappa_1-1}\xi^2 \\ P_1=Et^{-2}\tau+Ft^{\kappa_1-2}\xi \\ P_0=Gt^{-3} \qquad\qquad , A, B, \cdots, G\in \mathcal{E} \end{cases}$$

N の辺は $L_1: \mu=3\kappa_1-\kappa_1 j$, $L_2 = 2\kappa_1+\kappa_3-\kappa_3 j$ の2本ある。

◦ L_1 について、

$f_0^{(0)}(\tau)=\tau^3-2\tau^2+\tau=\tau(\tau-1)^2$ となり、$d=2,\ \tau_0=1$ と $d=1,\ \tau_0=0$。

$d=2,\ \tau_0=1$ のとき。

$$\begin{cases} B^{(0)}_{2,0}=1 \\ B^{(1)}_{0,0}=A(0,0)+B(0,0)+C(0,0)+\frac{\kappa_1}{i} \\ B^{(1)}_{1,0}=2A(0,0)+B(0,0)+\frac{3\kappa_1}{i} \\ B^{(2)}_{0,0}=\frac{\kappa_1}{i}A(0,0)+E(0,0)+F(0,0)-\kappa_1(\kappa_1-1) \end{cases}$$

$d=1,\ \tau_0=0$ のとき

$$\begin{cases} B^{(0)}_{1,0}=1 \\ B^{(1)}_{0,0}=C(0,0) \end{cases}$$

定理2により、$A(0,0)+B(0,0)+C(0,0)+\frac{\kappa_1}{i}=0$ ‥‥‥ ⑤

◦ L_2 について、

$f_0^{(0)}(\tau)=\tau-1$ となり、$d=1,\ \tau_0=1$。

$B^{(0)}_{1,0}=1,\quad B^{(1)}_{0,0}=C(0,0)$.

⑤の条件は、主部において $\tau - t^{\kappa_1}\xi$ と $\tau - t^{\kappa_1}(1+t^{\kappa_2-\kappa_1})\xi$ が $t\to 0$ のとき、t^{κ_1} の order ではかってもまだくっつくことからくるのであるが、このくっつき方は $t^{\kappa_2-\kappa_1}$ の order である。κ_2 がかわれば当然このくっつき方の order がかわるから、これを反映した必要条件があるはずである。これを求めるには $\tau - t^{\kappa_1}\xi$ を τ にもっていくような変数変換をする。結果のみ書くと、必要条件としては、

$$\frac{\kappa_1}{2} + A(t,x) + B(t,x) + C(t,x) - \frac{\kappa_1}{2}t^{\kappa_3-\kappa_1} \in t^{\kappa_2-\kappa_1}\times E.$$

この条件は実は十分条件でもある。

§4. 定理の証明のための準備

定理1,2の証明のため、operator P に対する2つの変換を考える。

まず、正有理数 p に対して、$(T_p u)(t,x) = u(t^{\frac{1}{p}}, x)$ により

$$T_p : C^\infty_{flat}([0,T]\times R^n) \longrightarrow C^\infty_{flat}([0,T]\times R^n)$$

を定義すると、簡単な計算によって次のことがわかる。

命題 4.1

$(A-\mu_0, M)$ をみたす P に対して、

$$P(t,x;\tau,\xi) = \sum_{j+|\alpha|\le m} t^{\nu-\kappa(j+|\alpha|+h)-h-(1-\mu_0)|\alpha|}\, a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha,$$

$a_{j,\alpha}\in E_M$ とする。(但し、$\kappa\ge\mu_0-1$, $h=m-j-|\alpha|$)。このとき、

$\mathcal{T}_p(P) = p^m t^{m(p-1)} T_p^{-1}\circ P\circ T_p$ も $\tilde{\mu}_0 = p\mu_0$, $\tilde{M} = q\frac{M}{p}$ (q は $q\cdot\frac{M}{p}$ が

整数となるような正整数）に対して，$(A-\tilde{\mu}_0, \tilde{M})$ を満たし，

$$\mathcal{T}_p(P)=\sum_{j+|\alpha|\leq m} t^{\tilde{\nu}-\tilde{\kappa}(j+|\alpha'|+h)-h-(1-\tilde{\mu}_0)|\alpha'|}\,\tilde{a}_{j,\alpha}(t,x)\,D_t^{j}D_x^{\alpha}$$

となる。但し $\tilde{a}_{j,\alpha}\in E_{\tilde{M}}$, $\tilde{\nu}=p\nu-m+pm$, $\tilde{\kappa}=p\kappa+p-1$。

又，$\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(\mathcal{T}_p(P))=\mathcal{T}_p(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(P))=P$ である。

注

このような変換がゆるされるのは，考える作用素の class を広げているからである．P の係数が C^∞ でも，$\mathcal{T}_p(P)$ はそうとは限らない。

次に座標変換でひきおこされる作用素の変換を考えよう。次の命題は，§2で定義した $B_{j,\alpha'}^{(h)}$ のある種の不変性を示すもので，それ自身面白いものである。

命題 4.2

$(A-\mu_0, M)$ をみたす作用素 P に対して，1組の (ν,κ) について，①が成立しているとし，$f_{\alpha'}^{(h)}(\tau)$ を②で定義する。$f_0^{(0)}(\tau)=0$ の d 重根 τ_0 に対して，$B_{j,\alpha'}^{(h)}$ を③で定義するとき，

$$\begin{cases} s=t \\ y_j=x_j+t^{\mu_0+\varepsilon}f_j(t,x) \\ y_n=x_n+\dfrac{1}{\kappa+1}t^{\kappa+1}\tilde{\tau}(t,x) \end{cases},\quad \left(\begin{array}{l}\varepsilon>0,\ \varepsilon M \text{は整数} \\ f_j,\ \tilde{\tau}\in E_M\end{array}\right)$$

なる変数変換で P を $\tilde{P}(s,y;D_s,D_y)$ に変換すると，$\tilde{P}$ も $(A-\mu_0,M)$ を満たし，

$$(\partial_\sigma^{j}\partial_{y'}^{\alpha'}\tilde{P}_{m-h})(s,y;0,e_n)=j!\,\alpha'!\,s^{\nu-\kappa(j+|\alpha'|+h)-h-(1-\mu_0)|\alpha'|}\,\tilde{b}^{(h)}_{j,\alpha'}(s,y),\cdots ⑥$$

$\tilde{b}^{(h)}_{j,\alpha'}\in E_M$ と表わせる。さらに、$\tilde{b}^{(h)}_{j,\alpha'}(0,0)$ から、② で $\tilde{f}^{(h)}_{\alpha'}(\sigma)$ を定義すると、$\tilde{f}^{(0)}_{0}(\sigma)=0$ は $\sigma_0=\tau_0-\tilde{\tau}(0,0)$ を d 重根にもち、③ で $f^{(h)}_{\alpha'},\tau_0$ のかわりに $\tilde{f}^{(h)}_{\alpha'},\sigma_0$ にした式で $\tilde{B}^{(h)}_{j,\alpha'}$ を定義すると、$\tilde{B}^{(h)}_{j,\alpha'}=B^{(h)}_{j,\alpha'}$ $(h=0,1,\cdots,m;\ j+|\alpha'|\leq m-h)$。

特に、$\tilde{\tau}(0,0)=\tau_0$ とすると、$\tilde{b}^{(h)}_{j,\alpha'}(0,0)=B^{(h)}_{j,\alpha'}$.

証明の概略

$\tilde{P}$ を直接計算すると、⑥が成立して、

$$\tilde{b}^{(h)}_{j,\alpha'}(0,0)=\frac{1}{j!}\sum_{s=0}^{h}\sum_{\mu=0}^{h-s}\sum_{\substack{g_1+\cdots+g_\mu=h-s+\mu\\ g_\rho\geq 2\ (\forall\rho)}}\frac{\tilde{\tau}(0,0)^{\mu}}{\mu!\,g_1!\cdots g_\mu!\,i^{h-s}}(\partial_\tau^{j+h-s+\mu}f^{(s)}_{\alpha'})(\tilde{\tau}(0,0))$$

$$\times\prod_{\rho=1}^{\mu}\{\kappa(\kappa-1)\cdots(\kappa-d_\rho+2)\}$$

となることがわかる。

この式によって、$\tilde{b}^{(h)}_{j,\alpha'}(0,0)$ は $b^{(h)}_{j,\alpha}(0,0)$ と $\tilde{\tau}(0,0)$ のみできまることと、$\tilde{f}^{(0)}_{0}(\sigma)=f^{(0)}_{0}(\sigma+\tilde{\tau}(0,0))$ がわかる。又、$\tilde{\tau}(0,0)=\tau_0$ のとき、$B^{(h)}_{j,\alpha'}=\tilde{b}^{(h)}_{j,\alpha'}(0,0)$ である。さて、

$$\begin{cases} u=s\quad(=t)\\ w_j=y_j\ (=x_j+t^{\mu_0+\varepsilon}f_j(t,x))\\ w_n=y_n+\dfrac{1}{\kappa+1}s^{\kappa+1}(\tau_0-\tilde{\tau}(0,0))=x_n+\dfrac{1}{\kappa+1}t^{\kappa+1}(\tau_0+\tilde{\tau}(t,x)-\tilde{\tau}(0,0)) \end{cases}$$

なる座標変換を考えると、これにより、$\tilde{P}$ が $\tilde{\tilde{P}}$ に変換されるとしたとき、$\tilde{\tilde{P}}$ に対して、$\tilde{\tilde{b}}^{(h)}_{j,\alpha'}$, $\tilde{\tilde{B}}^{(h)}_{j,\alpha'}$ を同様に定義すると、上でみたことにより、$\tilde{B}^{(h)}_{j,\alpha'}=\tilde{\tilde{b}}^{(h)}_{j,\alpha'}(0,0)$, $B^{(h)}_{j,\alpha'}=\tilde{\tilde{b}}^{(h)}_{j,\alpha'}(0,0)$。

したがって、$\widetilde{B}^{(h)}_{j,\alpha'} = B^{(h)}_{j,\alpha'}$

次に定理1,2の結論のうち、$h=0$のときを示そう。これはwell-posednessというよりも、双曲型であることからの帰結である。まずNewton polygonと多項式の零点との関係を示す次の補題を述べる。(証明は省略する。)

補題 4.3

$f(t;\tau)=\sum_{j=0}^{m} a_j(t)\tau^j$, $a_m(t)\equiv 1$, $a_j\in F_{\mu_j}$ ($\mu_j\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$) とする。但し $F_\mu=\{t^\mu\varphi(t);\ \varphi\in C^0[0,T],\ \varphi(0)\neq 0\}$ ($\mu<\infty$), $F_\infty=\{\varphi\in C^0[0,T];\ \forall N, \exists\varphi_N\in C^0[0,T]$ s.t. $\varphi(t)=t^N\varphi_N(t)\}$.

$\{(j,\mu_j)\}_{j=0}^{m}$ から§2のようにしてNewton polygon Nをかき、その辺の $j=m-k$ と $j=m-k+1$ の間の部分の傾きを $-\bar{\kappa}_k$ とする。(但し、$j=j_0\ (\geq 1)$ がNの垂直な辺のときは、$\bar{\kappa}_{m-j_0+1}=\cdots=\bar{\kappa}_m=\infty$ とする。) このとき、$\sigma_k(t)\in F_{\bar{\kappa}_k}$ が存在して

$$f(t;\tau)=\prod_{k=1}^{m}(\tau-\sigma_k(t))$$ とできる。

逆に、$\sigma_k\in F_{\bar{\kappa}_k}$ によって、こう分解されるとすると、fから作られるNewton polygonの辺の傾きは $\{\bar{\kappa}_1,\cdots,\bar{\kappa}_m\}$。

(注)

上のように $\bar{\kappa}_1\leq\cdots\leq\bar{\kappa}_m$ をとると、Nの辺は

$$\mu=\mu(j)=\sum_{l=1}^{m-j}\bar{\kappa}_l \text{。}$$

定理 1,2 の $h=0$ の部分は次の命題よりしたがう。

命題 4.4

$P_m(t,x;\tau,\xi)=\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha$ において、

$(A-\mu_0,M)$ と、$(\partial_\tau^j P_m)(t,x;0,e_n)\in t^{\nu-\kappa j}\times E_M$ $(j=0,1,\cdots,m)$

を仮定する。P_m が τ について、$t>0$ で双曲型とすると、

$$(\partial_\tau^j\partial_\xi^\alpha P_m)(t,x;0,e_n)\in t^{\nu-\kappa(j+|\alpha|)-(1-\mu_0)|\alpha|}\times E_M$$

証明の概略

$x=\hat{x}$ を fix する。$\eta\in R^n$, $\rho\in R$ に対して、τ の多項式

$P_m(t,\hat{x};\tau,e_n+\rho\eta)$ を考える。

(t,η) を fix するとこれは (ρ,τ) につき多項式で、τ について双曲型だから $\rho=0$ の近傍で analytic な m 個の根 $\tau_j(t,\eta;\rho)$ $(j=1,\cdots,m)$ をもつ。$(A-\mu_0,M)$ により、(η,ρ) が有界な範囲を動くとき、$|\tau_j(t,\eta;\rho)|\le C\cdot t^{\mu_0-1}$ である。

一方、$P_m(t,\hat{x};\tau,e_n)$ を t を parameter とする τ の多項式とみて、補題 4.3 を使うと、$\bar{\kappa}_1\le\cdots\le\bar{\kappa}_m$ がきまって、根 $\sigma_j(t)$ を

$|\sigma_j(t)|\le C\cdot t^{\bar{\kappa}_j}$ $(j=1,\cdots,m)$ ととれる。

この2つのことをあわせると、

$$\begin{cases} P_m(t,\hat{x};\tau,e_n+\rho\eta)=\prod_{j=1}^{m}(\tau-\sigma_j(t,\eta;\rho)) & \text{------ ⑦} \\ \sigma_j(t,\eta;\rho) \text{ は } (t,\eta) \text{ をとめるごとに } \rho \text{ につき analytic} & \\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_j(t,\eta;\rho)|\le C\cdot t^{\mu_0-1} \\ |\sigma_j(t,\eta;0)|\le C\cdot t^{\bar{\kappa}_j} \end{array}\right\} & \text{--- ⑧} \end{cases}$$

Cauchy の積分公式によって、

$$|\partial_\rho^k a_j(t,\eta;0)| \leqq C_k t^{\mu_0-1} \quad (\forall j,k) \qquad \text{⑨}$$

$\mu=\nu-\kappa j$ なる直線は $\{\bar{K}_1,\cdots,\bar{K}_m\}$ できまる Newton polygon の下にあるから、⑦, ⑧, ⑨ により、

$$\left|\partial_\tau^j\partial_\rho^k\left(P_m(t,x;\tau,e_n+\rho\eta)\right)\Big|_{\rho=0,\tau=0}\right| \leqq C\cdot t^{\sum_{l=1}^{m-j-k}\bar{K}_l}\cdot t^{k(\mu_0-1)}$$

$$\leqq C\cdot t^{\nu-\kappa(j+k)+(\mu_0-1)k}$$

左辺は $(\partial_\tau^j\langle\eta,\partial_\xi\rangle^k P_m)(t,x;\tau,e_n)$ だから、これより結論がしたがう。($\langle\eta,\partial_\xi\rangle=\sum_{j=1}^n \eta_j\partial_{\xi_j}$.)

§ 5. 定理 1, 2 の証明の概略

定理 1, 2 の証明は Ivrii-Petkov [1] の定理 4.1 の証明の方法を Newton polygon の 1 辺ごとに使うことによってなされる。

Newton polygon N において、点 $(m,0)$ から順に垂直でない辺を $L_1,\cdots,L_l$ とし、L_r を $\mu=\nu_r-\kappa_r j$ とする。命題 4.1 で p を十分大きくとることによって、$M=1$, μ_0, ν_r, κ_r は正整数としてよい。簡単のために、$\mu_{m,0}^{(0)}<\infty$ としよう。定理 1 のために示すべきことは、$r=1,\cdots,l$ に対して、

$$[N]_r\begin{cases}\partial_\tau^j\partial_\xi^{\alpha'}P_{m-h}(t,x;0,e_n)\in t^{\nu_r-\kappa_r(j+|\alpha'|+h)-h+(\mu_0-1)|\alpha'|}\times C^\infty \\ (h=0,\cdots,m;\ j+|\alpha'|\leqq m-h)\end{cases}$$

である。$h=0$ に対しては、命題 4.4 によってすでに示されているから、次の命題を示せばよい。

命題 5.1

（仮定）

$$\partial_\tau^j \partial_{\xi'}^{\alpha'} P_m(t,x;0,e_n) = j!\,\alpha'!\, t^{\nu-\kappa(j+|\alpha'|)+(\mu_0-1)|\alpha'|}\, b^{(0)}_{j,\alpha'}(t,x)$$

$$\partial_\tau^j \partial_{\xi'}^{\alpha'} P_{m-h}(t,x;0,e_n) = j!\,\alpha'!\, t^{\nu-\kappa(j+|\alpha'|+h)-h+(\mu_0-1)|\alpha'|-\varepsilon_{h,j,\alpha'}}\, b^{(h)}_{j,\alpha'}(t,x),$$

$b^{(h)}_{j,\alpha'} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ $(h=0,1,\cdots,m\,;\ j+|\alpha'| \leqq m-h)$ であり，

$0<\tilde{\nu}<\nu$, $\mu_0-1 \leqq \tilde{\kappa} < \kappa$, $0 \leqq j_0 < m$ なる整数 $\tilde{\nu}, \tilde{\kappa}, j_0$ があって，

$$\begin{cases} \tilde{\nu}-\tilde{\kappa}(m-j_0) = \nu-\kappa(m-j_0) \\ b^{(0)}_{j,\alpha'} \in t^{(\tilde{\kappa}-\kappa)(m-j_0-j-|\alpha'|)} \times C^\infty \quad (j+|\alpha'|>m-j_0) \\ b^{(0)}_{m-j_0,0}(0,0) \neq 0,\ b^{(h)}_{j,\alpha'}(0,x) \not\equiv 0 \quad \cdots\cdots\cdots\ ⑩ \\ \varepsilon_{h,j,\alpha'} \leqq (\kappa-\tilde{\kappa})(m-j_0-h-j-|\alpha'|) \quad (h \geqq 1)。 \end{cases}$$

以上のことを仮定するとき，P に対する *flat Cauchy* 問題が原点で μ_0-*well-posed* ならば，

$$\varepsilon_{h,j,\alpha'} \leqq 0 \quad (h=1,\cdots,m;\ j+|\alpha'| \leqq m-h)$$

$\kappa_1 = \mu_0-1$ のときの $[N]_1$ はすでにみたされている。（$(A\text{-}\mu_0,M)$ による）。$\kappa_1 > \mu_0-1$ のときは，命題 5.1 において，$\kappa=\kappa_1$, $\nu=\nu_1$, $\tilde{\kappa}=\mu_0-1$, $\tilde{\nu}=m(\mu_0-1)$, $j_0=0$ とすると，仮定がすべてみたされて，したがって $[N]_1$ がいえる．以下，$[N]_2, [N]_3, \cdots$ の順に命題 5.1 をくりかえし使うことで $[N]_\ell$ $(\ell=1,\cdots,\ell)$ が証明できる。（⑩ を仮定してよいことについては実は少し議論が必要であるが，細かいことなので省略する。）

定理2については，命題 4.2 によって，$\tau_0=0$ としてよい

ことに注意すると、次の命題が示せればよい。($h=0$ の場合の結論は命題4.4から導びける。)

命題 5.2

$$\partial_t^{j}\partial_{\xi'}^{\alpha'}P_{m-h}(t,x;0,e_n)=j!\,\alpha'!\,t^{\nu-\kappa(j+|\alpha'|+h)-h+(\mu_0-1)|\alpha'|}\cdot b_{j,\alpha'}^{(h)}(t,x),$$

$b_{j,\alpha'}^{(h)}\in C^\infty$ $(h=0,1,\cdots,m\,;\,j+|\alpha'|\leqq m-h)$ とする。

$$b_{j,\alpha'}^{(0)}(0,0)=0 \quad \text{for } j+|\alpha'|\leqq d-1$$

$$b_{d,0}^{(0)}(0,0)\neq 0$$

とすると、P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0-well-posed なら、$b_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0)=0$ for $h+j+|\alpha'|\leqq d-1$.

上の命題 5.1, 5.2 が key point であるから、この証明を書かねばならないのであるが、紙数の関係と、Ivrii-Petkov [1] の定理 4.1 の証明を少し modify するだけなので省略させていただく。

§6. 定理3の証明の概略

命題4.2によって、$\tau_0=0$ としてよい。

$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ なる正整数を M, m, κ, ν, d にのみ depend して適当にとり、

$$\begin{cases} t=s\rho^{-\omega_0} \\ x_j=y_j\rho^{-\omega_j} \quad (j=1,\cdots,n) \end{cases} \quad (\rho>0)$$

なる座標変換をすると、P は P_ρ へうつり、任意の正整数 N

に対して、

$$P_\rho = \rho^{\alpha w_0} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \Big\{ s^{\nu-\kappa d-d} \prod_{l=1}^{d} (s\partial_s - i\lambda_l) D_{y_n}^{m-d} + \sum_{j=1}^{N} \rho^{-j} R_j(s,y;D_s,D_y) + \rho^{-(N+1)} \tilde{R}_{N+1,\rho}(s,y;D_s,D_y) \Big\}$$

となる。但し、α は M, m, κ, ν, d のみできまる定数で、R_j は m 次の微分作用素で係数は $S^{-m} \times E_M$ に入る。又 $\tilde{R}_{N+1,\rho}$ は m 次作用素で係数は $\rho \to \infty$ のとき、$S^{-m} \times E_M$ で有界。さらに、$D_{y_n}^{m-d+1}, \cdots, D_{y_n}^{m}$ は $R_1, \sim R_d$ にでてこない。このとき、

$$e^{-i\rho y_n} \circ P_\rho \circ e^{i\rho y_n} = \rho^{\alpha w_0 + m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \Big\{ s^{\nu-\kappa d-d} \prod_{l=1}^{d} (s\partial_s - i\lambda_l) + \sum_{j=1}^{N} \rho^{-j} S_j(s,y;D_s,D_y) + \rho^{-(N+1)} \tilde{S}_{N+1,\rho}(s,y;D_s,D_y) \Big\}$$

となる。($S_j, \tilde{S}_{N+1,\rho}$ は $R_j, \tilde{R}_{N+1,\rho}$ と同様の作用素)

$\max_{1\leq l\leq d} \mathrm{Re}\, i\lambda_l = \mathrm{Re}\, i\lambda_1 = -\mathrm{Im}\,\lambda_1$ としてよい。

$a = i\lambda_1$, $\mu_l = \lambda_1 - \lambda_l$ $(l = 1, \cdots, d)$ とすると、

$$s^{-a} \circ e^{-i\rho y_n} \circ P_\rho \circ e^{i\rho y_n} \circ s^{a} = \rho^{\alpha w_0 + m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \Big\{ s^{\nu-\kappa d-d} \prod_{l=1}^{d} (s\partial_s + i\mu_l) + \sum_{j=1}^{N} \rho^{-j} T_j(s,y;D_s,D_y) + \rho^{-(N+1)} \tilde{T}_{N+1,\rho}(s,y;D_s,D_y) \Big\}$$

$$\equiv \rho^{\alpha w_0 + m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}}{i^d} \cdot L_\rho$$ となる。

但し、T_j, $\tilde{T}_{N+1,\rho}$ は R_j, $\tilde{R}_{N+1,\rho}$ と同様の作用素。

$$L_0 = s^{\nu-\kappa d-d} \prod_{l=1}^{d} (s\partial_s + i\mu_l)$$ とする。

$L_\rho u = 0$ を漸近的に解くため、次の補題を用意する。

補題　6.1

K を $\mathbb{R}^n$ の compact set とするとき，$f \in E_M$, $\operatorname{supp} f \subset [0,T] \times K$ に対して，$(s\partial_s + i\mu)v = s^{-\alpha}(\log s)^j f(s,y)$ の解として，

$$v(s,y) = s^{-\alpha}\sum_{h=0}^{j} g_h(s,y)(\log s)^{j-h} + s^{-i\mu}\sum_{h=0}^{j} A_h(y)(\log s)^{j+1-h},$$

$g_h \in E_M$, $\operatorname{supp} g_h \subset [0,T] \times K$, $A_h \in C_0^\infty(K)$ がとれる。

さらに，$\operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re} i\mu$ のときは，$A_h \equiv 0$ ($^\forall h$) とできる。

系　6.2

$$\prod_{l=1}^{d}(s\partial_s + i\mu_l)v = s^{-\alpha}(\log s)^j f(s,y) \quad (f \in E_M,\ \operatorname{supp} f \subset [0,T] \times K)$$

の解として，

$$v = s^{-\alpha}\sum_{h=0}^{j} g_h(s,y)(\log s)^{j-h} + \sum_{\substack{\operatorname{Re} i\mu_l \leqq \operatorname{Re}\alpha \\ 1 \leqq l \leqq d}} s^{-i\mu_l}\sum_{h=0}^{j+d-1} A_{l,h}(s,y)(\log s)^{j+d-h},$$

$g_h, A_{l,h} \in E_M$, $\operatorname{supp} g_h$, $\operatorname{supp} A_{l,h} \subset [0,T] \times K$

がとれる。

さて，$L_\rho\left(\sum_{j=0}^{N} u_j \rho^{-j}\right) = O\left(\rho^{-(N+1)}\right)$ をとこう。

まず，$u_0(s,y) \equiv u_0(y) \in C_0^\infty(K)$, $u_0(0) = 1$ ととると，

$L_0 u_0 = 0$ となる。

次に，$T_1 u_0 \in s^{-m} \times E_M$ だから，

$L_0 u_1 = -T_1 u_0$ の解として，

$$u_1 \in s^{-m-\nu+(N+1)d} \times E_M + \sum_{\operatorname{Re} i\mu_l \leqq m+\nu-(N+1)d} s^{-i\mu_l}\sum_{h=0}^{d-1} E_M \cdot (\log s)^{d-h}$$

がとれる。以下，順に系 6.2 を使って

$$u_j = \sum_{l=1}^{jd+1} s^{-\alpha_l^{(j)}}\sum_{h=0}^{jd-1}(\log s)^{jd-h}\,\tilde{h}_{j,l,h}(s,y),$$

$$\tilde{h}_{j,l,k} \in E_M, \quad \mathrm{supp}\, \tilde{h}_{j,l,k} \subset [0,T] \times K,$$
$$0 \leqq \mathrm{Re}\, \alpha_l^{(j)} \leqq (2j-1)m + j\nu - j(k+1)d \qquad (l = 1, \cdots, jd+1).$$

ととれる。

$$\begin{cases} v_\rho^{(N)} = \sum_{j=0}^{N} u_j \rho^{-j} \\ U_\rho^{(N)} = e^{i\rho y_n} s^\theta \tilde{\chi}_\rho(s) v_\rho^{(N)} \end{cases}$$

とおく。但し、$\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqq \chi(t) \leqq 1$,

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqq \frac{1}{2}) \\ 1 & (t \geqq 1) \end{cases}, \quad \tilde{\chi}_\rho(s) = \chi(s\rho^{\frac{1}{2\Delta}}), \quad \Delta = 2m + \nu - (k+1)d.$$

このとき、
$$(\partial_s^\nu \tilde{\chi}_\rho)(s) = \rho^{\frac{\nu}{2\Delta}} (\partial_s^\nu \chi)(s\rho^{\frac{1}{2\Delta}})$$
$$= s^{-\nu} \tilde{\chi}_\nu(s\rho^{\frac{1}{2\Delta}}), \quad \mathrm{supp}\, \tilde{\chi}_\nu \subset [\tfrac{1}{2}, 1],$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots)$$

となっている。求める結果は次の2つの補題から出る。

<u>補題 6.3</u>

定理3の仮定の不等式が成立するとき、ある定数 $\tilde{C} > 0$ があって、

$$\|\tilde{u}\|_{p,t} \leqq \tilde{C} \cdot \rho^{(q-p)\omega_n} \|P_\rho \tilde{u}\|_{q,t} \quad (*)$$
$$\text{for } \rho >> 1, \quad {}^\forall t \in (0,1], \quad {}^\forall \tilde{u} \in C_0^\infty(B^+)$$

但し、
$$\begin{cases} B^+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,;\, t^2 + |x|^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t\} \\ \|v\|_{p,t} = \begin{cases} \|D_{y_n}^p v\|_{L^2(B_t^+)} & (p \geqq 0 \text{ のとき}) \\ \|v\|_{H^p(B_t^+)} & (p \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|v\|^{(*)}_{g,t} = \begin{cases} \|v\|_{H^g(B^+_t)} & (g \geqq 0) \\ \sup\limits_{w \in C_0^\infty(B^+_t)} \dfrac{|(v,w)_{L^2(B^+_t)}|}{\|D_{y_n}^{|g|} w\|_{L^2(B^+_t)}} & (g \leqq 0) \end{cases} \\ B^+_t = \{ (s, y) \in B^+ ;\ s \leqq t \} \end{cases}$$

補題　6.4

$0 < t_0$ と原点の compact 近傍 K を適当にとると．$\delta > 0$, $C > 0$ があって．

$$\begin{cases} \|U_\rho^{(N)}\|_{p,t_0} \geqq \delta \cdot \rho^p \\ \|P U_\rho^{(N)}\|^{(*)}_{g,t_0} \leqq C \rho^{\alpha\omega_0 + \frac{m}{2\Delta} + g - \frac{\mathrm{Re}\,\theta}{2\Delta}} \end{cases}$$

この２つの補題によって，

$$p \leqq (g-p)\omega_n + \alpha\omega_0 + \frac{m}{2\Delta} + g - \frac{\mathrm{Re}\,\theta}{2\Delta}$$

$$\therefore \mathrm{Re}\,\theta \leqq C_0 (g + m - p)$$

（C_0 は M, m, K, ν, d にのみ depend する．）

▲

文献

[1] V. Y. Ivrii – V. M. Petkov : Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys, 29 (1974), 1–70.

[2] R. Sakamoto : Cauchy problem for degenerate hyperbolic

equations, Comm. Pure Appl. Math., 33 (1980), 785–816.

[3] T. Mandai: On energy inequalities and regularity of solutions to weakly hyperbolic Cauchy problems, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[4] T. Mandai: Necessary conditions for the well-posedness of flat Cauchy problems and regularity-loss of solutions, in preparation.