数理解析研究所講究録
第529巻 1984年 62-72

LaplacianのDirichlet問題の第1固有値

京大 理　　島倉紀夫

Ωは$\mathbb{R}^d$（$d\geqq 2$）の有界領域で，その境界$S=\partial\Omega$は十分なめらかな超曲面であるとする．Ωにおける$-\Delta$のDirichlet問題の第j固有値を$\lambda_j(\Omega)$とする（$-\Delta u=\lambda u$をみたし0でない$u\in H_0^1(\Omega)$の存在するような正数のすべてを$(0<)\lambda_1(\Omega)<\lambda_2(\Omega)\leqq\lambda_3(\Omega)\leqq\cdots$ の順に並べるものとする）．

問題は，各jに対して，領域の函数$\lambda_j:\Omega\to\lambda_j(\Omega)$の性質を調べることであるが，特に領域の微小な変形がλ_jに及ぼす効果を変分公式を用いて調べるのがこの講演の目的である．

固有値の基本的性質のいくつかはR. Courant - D. Hilbert「数理物理学の方法」にものべられており古典的な研究対象である．第1固有値は常に単純（即ち重複度が1）であるが，第2以降の固有値には一般に1とは限らない重複度もみこまれるので，その点に注意して問題を幾分詳しくのべ直すと次のようになる：

問題　Ωにおける（$-\Delta$のDirichlet問題の）ひとつの固有値μをとりその重複度を$m(\geqq 1)$とする。Ωをわずかに変形した領域$\tilde{\Omega}$をとると，μに近い$\tilde{\Omega}$における（$-\Delta$のDirichlet問題の）固有値が丁度m個あるから，それらを$\{\mu_j(\tilde{\Omega})\}_{j=1}^{m}$とする。これらが変形$\Omega \to \tilde{\Omega}$にどう依存するか？

§1　固有値の変分公式

領域の微小変形を次のように行う。区間$(-\varepsilon,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$を動く助変数tのおのおのに対して，R^dからそれ自身へのdiffeomorphism ϕ_tがあって，$\phi_0 = I$（恒等写像）であり，かつtについてC^p級$(p \geqq 1)$であると仮定する（つまり，$\ell = 0, 1, \cdots, p$に対して$\left(\frac{d}{dt}\right)^\ell \phi_t$が$t$について連続で$R^d$上十分なめらかなベクトル場であると仮定する）。以下このことを簡単に$t \to \phi_t$がC^p級のdiffeomorphismsの曲線であるということにする。この変形$\Omega \to \phi_t\Omega$はΩの位相的性質を変えない（最近の小沢真氏の研究［7］はΩの位相的性質を変える変形が単純固有値に及ぼす効果を明らかにしたものである。本論とは関係がないが，ひとつの発展の可能性を含んでいるので，付言しておく）。

固有値μの重複度mが2以上の場合，変形$\Omega \to \phi_t\Omega$に伴う

個々の固有値 $\mu_j(\phi_t\Omega)$ の動きはよくわからないが，これらの基本対称式の変化を解析することは可能である．そこで

$$\sigma_k(t)=\sum_{j=1}^{m}\mu_j(\phi_t\Omega)^k,\quad 1\leqq k\leqq m, \qquad (1)$$

とおき，$t=0$ での σ_k の逐次微係数を $t\to\phi_t$ を用いてあらわす公式のことを固有値の変分公式と呼ぶことにする．

そこで記号を導入しておく．最も重要なのはベクトル場

$$v=\frac{d}{dt}\phi_t\Big|_{t=0} \qquad (2)$$

である．次に，固有値 μ に属する Ω における $-\Delta$ の Dirichlet 問題の固有空間を E，$L^2(\Omega)$ から E への正射影を P とする．E の実の正規直交基底のひとつを $\{\omega_j\}_{j=1}^{m}$ とする．Ω における Dirichlet 問題の resolvent を $G_z=(z+\Delta)^{-1}$ $(z\in\mathbb{C})$ とすると，$z=\mu$ での Laurent 展開により

$$G_z=(z-\mu)^{-1}P+H_z \quad (H_z \text{ は } z=\mu \text{ で正則}) \qquad (3)$$

と分解できる．更にベクトル場 v を用いて m 次実対称行列

$$A^v=(A^v_{jk})_{j,k=1}^{m},\quad A^v_{jk}=\int_S\langle v|_S, n\rangle\frac{\partial\omega_j}{\partial n}\frac{\partial\omega_k}{\partial n}dS, \qquad (4)$$

を導入する（$v|_S$ は v の S への制限，n は S の各点における内向単位法線ベクトル）．

<u>変分公式</u>　Diffeomorphisms の曲線 $t\to\phi_t$ が C^p 級 $(p\geqq 1)$ ならば，おのおのの $t\to\sigma_k(t)$ $(1\leqq k\leqq m)$ も C^p 級であって次式がなりたつ

$$\frac{d^p\sigma_k}{dt^p}(0)=\sum_{j=1}^{p}\binom{k}{j}a_j^{(p)}\mu^{k-j}\quad, 1\leqq k\leqq m, \tag{5}$$

ここで $a_j^{(p)}$ は k によらない. 特に

$$a_p^{(p)}=p!\,\mathrm{Tr}((A^{\nu})^p),\quad p\geqq 1. \tag{6}$$

($m=p=1$ のときは J. Hadamard の公式 [**3**]).

証明　$A_t=-\phi_{t*}\Delta\phi_{t*}^{-1}$ とおく (Ω (resp. $\phi_t\Omega$) 上の函数 f (resp. g) に対して $\phi_{t*}^{-1}f(y)=f(\phi_t^{-1}y)$, $y\in\phi_t\Omega$ (resp. $\phi_{t*}g(x)=g(\phi_t x)$, $x\in\Omega$)). すると $\phi_t\Omega$ における Dirichlet 問題の resolvent $(z+\Delta)^{-1}$ は Ω における $-A_t$ の resolvent $\mathcal{G}_z=(z-A_t)^{-1}=(z+\Delta-B_t)^{-1}=G_z(I-B_tG_z)^{-1}$ とみなせる ($B_t=A_t+\Delta$). 複素平面上に $z=\mu$ を中心とする半径 δ (十分小) の円 C を描き, その開円板を K とすると, $|t|$ が小さいなら, K 上には 1 位の極 $\{\mu_j(\phi_t\Omega)\}_{j=1}^{m}$ (内部にある) 以外に $\mathcal{G}_z$ の極はない. そして

$$\sigma_k(t)=\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C z^k\mathcal{G}_z\,dz\right)\quad, 1\leqq k\leqq m,$$

がなりたつ. しかも

$$\mathcal{G}_z=\sum_{l=0}^{p}G_z(B_tG_z)^l+R_p$$

とかくと, $z\in C$ のとき一様に, R_p の $L^2(\Omega)$ での作用素ノルムは $O(t^p)$ である. そこで $z=\mu$ での Laurent 展開

$$\sum_{l=0}^{p}G_z(B_tG_z)^l=\sum_{j=0}^{p}(z-\mu)^{-j-1}f_{p,j}(t)+h_p(z,t)$$

(h_p は K で正則, $f_{p,j}$ は z によらない) を行い

$$a_j^{(p)} = \frac{d^p}{dt^p} \mathrm{Tr.}\, f_{p,j}(t)\Big|_{t=0} \quad , 0 \leqq j \leqq p,\ p \geqq 1,$$

とおくと(5)式が得られ，特に $f_{p,p}(t) = P(B_t P)^p$ だから(6)式が得られる．(3)を用いて計算すると $\mathrm{Tr.}\, f_{p,0}(t) = \mathrm{Tr.}\, P = m$ となるから $a_0^{(p)} = 0$ であり(5)式の和が $j=1$ から始まることがわかる．証了．

(5)式からまず次のことがわかる：$t \to 0$ のとき

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\mu_j(\phi_t \Omega) - \mu}{t}\right)^p = \mathrm{Tr.}((A^v)^p) + o(1). \qquad (7)$$

従って特に $t \to \phi_t$ が $C^{\min(m,2)}$ 級であれば，おのおのの $t \to \mu_j(\phi_t \Omega)$ は $t = 0$ で Lipschitz 連続である．更に，

<u>系</u>　$t \to \phi_t$ が C^m 級であるとする．他方行列 A^v の固有値を $\{\alpha_j^v\}_{j=1}^m$ とする．すると，$\{\mu_j(\phi_t \Omega)\}_{j=1}^m$ の番号づけを適当に行えば，おのおのの $t \to \mu_j(\phi_t \Omega)$ が $t = 0$ で微分可能で $\frac{d}{dt} \mu_j(\phi_t \Omega)\big|_{t=0} = \alpha_j^v$ $(1 \leqq j \leqq m)$ となる．

<u>証明</u>　α の多項式 $\prod_{j=1}^{m} \left(\alpha - \frac{\mu_j(\phi_t \Omega) - \mu}{t}\right)$ の各係数が $t=0$ で連続だからである．証了．

§5で，$\sigma_k''(0)$ のより具体的な表示を与える．

§2　単純固有値の危点とその安定性

ある $j(\geq 1)$ について λ_j が Ω において単純（つまり $\lambda_j(\Omega)$ の重複度が 1）であると仮定する．このとき $t \to \phi_t$ が C^p 級ならば $t \to \lambda_j(\phi_t\Omega)$ もそうであり，変分公式が使える．

座標系に相似変換を施せばわかるように，$\lambda_j(\alpha\Omega) = \lambda_j(\Omega)/\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ がなりたつ．つまり λ_j の値域は正数全体にわたる．だから，Ω のもうひとつの幾何学的な量を一定にしておいて λ_j の大きさを論じることは理にかなっている．この§では $t \to \phi_t$ が Ω の体積を保つと仮定しよう：

$$\mathrm{vol.}(\phi_t\Omega) = \mathrm{vol.}(\Omega), \quad -\varepsilon < t < \varepsilon. \tag{8}$$

また，$S = \partial\Omega$ の空でない開集合 Σ をとり，高々 Σ だけを動かす $t \to \phi_t$ ばかりを考える，即ち，

$$\left\{\begin{array}{l} \phi_t \text{は}(\mathbb{R}^d\text{における}) S \setminus \Sigma \text{のある近傍} \\ \text{で恒等写像に等しい} \end{array}\right\} \tag{9}$$

と仮定する．この仮定は領域の局所的な変形がもたらす固有値の変動を観察するためにおくものである．

領域 Ω が，函数 λ_j の，<u>Σ − 危点</u>（Σ-critical domain）であるとは，(8) および (9) をみたすすべての $t \to \phi_t$ (C^1 級) に対し

$$\frac{d}{dt}\lambda_j(\phi_t\Omega)\Big|_{t=0} = 0$$

がなりたつことをいう．

Faber-Krahn（[1],[2]）の定理により、体積が一定な領域のうちでλ_1を最小にするものは球である。 実際、球Ωはλ_1の$\partial\Omega$-危点である。

$\lambda_j(\Omega)$に属する正規化された実の固有函数をωとすると

$$\frac{d}{dt}\lambda_j(\phi_t\Omega)\Big|_{t=0} = \int_S \langle v|_S, n\rangle\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)^2 dS \quad ((5),(6)\text{による}).$$

他方 $\frac{d}{dt}\,\mathrm{vol.}(\phi_t\Omega)\Big|_{t=0} = -\int_S \langle v|_S, n\rangle dS$ （(8)により，$=0$）.

であるから，Ωがλ_jのΣ-危点であるのは$\partial\omega/\partial n$が$\Sigma$上定数に等しいときかつそのときに限る。

J. Serrinの一定理[5]の応用により，$\partial\omega/\partial n$が$\partial\Omega$上定数に等しいなら$\Omega$は球である。 故に，$\lambda_j$が$\Omega$において単純であるという前提のもとで，$\Omega$が$\lambda_j$の$\partial\Omega$-危点であるのは$\Omega$が球のときかつそのときに限る。

次に，函数λ_jがΩにおいて<u>Σ-安定</u>（Σ-stable）であるとは，Ωがλ_jのΣ-危点であり，しかも，(8)および(9)をみたし$\langle v|_S, n\rangle$が恒等的に0でないすべての$t\to\phi_t$（C^2級）に対し

$$\frac{d^2}{dt^2}\lambda_j(\phi_t\Omega)\Big|_{t=0} > 0$$

がなりたつことをいう。

Faber-Krahnの定理により，λ_1は球において最小である。しかも，Ωと同体積の球をΩ^*とすると，Ωが球でないなら$\lambda_1(\Omega^*)<\lambda_1(\Omega)$がなりたつことがG. Talenti[6]の計算をみればわかる。 また上記の定義によっても，Ωが球ならば

λ_1はΩにおいて$\partial\Omega$-安定であることがわかる（但し，$t \to \phi_t$のうちでΩを球にうつすものすべてを除外して定義にあてはめなくてはならない）。

この講演の主要な結果は次の通り（証明は[8]参照）：

<u>定理</u>　Ωがλ_jのΣ-危点であるとき，Σの各点x^0において，x^0を含むΣの適当な開部分集合Σ'をとれば，λ_jはΩにおいてΣ'-安定である。

つまり，Ωがλ_jのΣ-危点であるとき，Σの各点でその十分小さな近傍Σ'をとれば，高々Σ'だけを微小変形するときλ_jは増大する。割切っていえば，無限小（*infinitesimal*な）安定性が示されたにすぎない，といってもよい。しかし，次に例示するように，たとえ微小であってもΣ全体を変形するとλ_jが減少することもあり得るからこの定理も無意味ではない。

§3　一例

同心球$S^+ = \{|x| = b\}$と$S^- = \{|x| = a\}$で囲まれる球殻

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d ;\ a < |x| < b\}$，但し$0 < a < b < \infty$，

を考える。するとΩは球ではないから，

(1°) Ωはλ_1の$\partial\Omega$-危点ではない。

しかし才1固有函数は$|x|$のみの函数であるなら

(2°) Ωはλ_1のS^+-危点かつS^--危点である。

所が，$y\in\mathbb{R}^d$として$\Omega_y=\{x\in\mathbb{R}^d; |x-y|>a$ かつ $|x|<b\}$とおくと，$y\neq 0$かつ$|y|$が十分小さいとき$\lambda_1(\Omega_y)<\lambda_1(\Omega)$となるから（証明は[9]参照）

(3°) λ_1はΩにおいてS^+-安定でもS^--安定でもない。

この例は，境界が連結でないという点で説得力に欠ける嫌いがあるが，才1固有値が領域の体積，境界の面積だけでは律しきれない函数であることを示している。

§4 一注意

重複度mが2以上の固有値について危点の概念を合理的に定義することは不可能である。何故なら，§1の記号に則ってのべると，$t\to\phi_t$（C^m級）をとったとき，すべてのj（$1\leq j\leq m$）に対して$\frac{d}{dt}\mu_j(\phi_t\Omega)|_{t=0}=0$がなりたつのは$A^\nu=0$のときかつそのときに限る（(7)式で$p=2$とする）。しかし(8)，(9)をみたし$A^\nu\neq 0$となる$t\to\phi_t$を作ることは容易である。

§5 補足

$p=2$のとき(5)式は次のようになる（[4]参照($d=2$のとき))：

$$\frac{d^2\sigma_k}{dt^2}(0)=k(k-1)\mu^{k-2}\,\mathrm{Tr.}((A^v)^2)+ \qquad (10)$$

$$+k\mu^{k-1}\{Q(v|_S)+\mathrm{Tr.}A^w\},\quad 1\leqq k\leqq m.$$

ここで，$w=\frac{d^2}{dt^2}\phi_t|_{t=0}$；$A^w$の定義は(4)と同様；

$$Q(v|_S)=\int_S\{\Theta^v\sum_{j=1}^m\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial n}\right)^2-2\sum_{j=1}^m W_j^v\frac{\partial W_j^v}{\partial n}\}dS\;; \qquad (11)$$

各W_j^vは次のDirichlet問題の一意な解（$\langle v|_S, n\rangle$のみに依存)：

$$\begin{cases}\Omega\text{で}\quad \Delta W_j^v+\mu W_j^v=\sum_{k=1}^m A_{jk}^v\omega_k,\quad S\text{で}\quad W_j^v=\langle v|_S, n\rangle\frac{\partial\omega_j}{\partial n},\\ PW_j^v=0,\quad 1\leqq j\leqq m\end{cases}$$

((11)において $\sum\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial n}\right)^2$ および $\sum W_j^v\frac{\partial W_j^v}{\partial n}$ は正規直交基底 $\{\omega_j\}_{j=1}^m$ のとり方によらない)；

$$\Theta^v=\sum_{\alpha=1}^{d-1}\{\kappa_\alpha\langle v|_S, n\rangle^2-\kappa_\alpha\langle v|_S, e_\alpha\rangle^2-2\langle v|_S, e_\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial e_\alpha}\langle v|_S, n\rangle\},$$

但し，$\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{d-1}$ はSの各点での主曲率方向の単位ベクトルからなる正規直交系，κ_αはその点でのe_α方向の主曲率．

すると，§2の定理の仮定のもとでは

$$\frac{d^2}{dt^2}\lambda_j(\phi_t\Omega)|_{t=0}=2k^2\int_S W^v\left(HW^v-\frac{\partial W^v}{\partial n}\right)dS \qquad (12)$$

となる．但し $k=\partial\omega/\partial n|_S$，$H=\sum_{\alpha=1}^{d-1}\kappa_\alpha$，$W^v$は

$$\begin{cases}\Omega\text{で}\quad \Delta W^v+\lambda_j(\Omega)W^v=0,\quad S\text{で}\quad W^v=\langle v|_S, n\rangle,\\ \int_\Omega \omega W^v dx=0\end{cases}$$

の一意な解．以上の証明は[9]参照．

文献

[1] G. Faber Sitz. bayer. Akad. Wiss. (1923), 169~172.

[2] E. Krahn Math. Ann. 94 (1924), 97~100.

[3] J. Hadamard Oeuvres 2 (1968), 515~631.

[4] P. Garabedian-M. Schiffer J. Anal. Math. 2 (1952~3), 281~369.

[5] J. Serrin Arch. R.M.A. 43 (1971), 304~318.

[6] G. Talenti Ann. Sc. N.S. Pisa, IV-3.4 (1976), 697~718

[7] 小沢 真 数学, 33巻3号 (1981), 248~261.

[8] 島倉紀夫 C.R. Ac. Sc. Paris, 292 (1981), 617~619.

[9] 同 La première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet, J. Math. pures et appl. に掲載の予定.