数理解析研究所講究録
第 529 巻 1984 年 73-82

偶数次元空間における散乱理論

茨城大学 教育　　曽我日出夫

序

$\mathcal{O}$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の有界な物体とし、$\Omega = \mathbb{R}^n - \mathcal{O}$ は連結な領域になっているとする。さらに境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする。次の波動方程式で表される $\mathcal{O}$ による散乱を考える。

$$
(0.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^1, \\ u|_{t=0} = f_1(x) & \text{on } \Omega, \\ \partial_t u|_{t=0} = f_2(x) & \text{on } \Omega. \end{cases}
$$

この散乱問題について Lax-Phillips は、空間次元 n が奇数のときは [1] において、偶数のときは [2] において考察している。かれらの定義に従うと scattering operator S は、

$$
S = T_0^+ (W_+)^{-1} W_- (T_0^-)^{-1}
$$

と表すことができる。ここで、$T_0^{\pm}$ は free space $\mathbb{R}^n$ の初期値に関する translation representation であり、$W^{\pm}$ は wave operator である。$T_0^{\pm}, W^{\pm}$ については後に詳しく述べる。$\mathcal{S}$ は $L^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ (S^{n-1} は $(n-1)$ 次元球面) 上の unitary operator となり、次のように kernel 表示できる (詳しくは [3] 又は [6] を見よ)。

$$(\mathcal{S}k)(s,\theta) = \iint_{\mathbb{R}^1\times S^{n-1}} S(s-\tilde{s},\theta,\omega)\,k(\tilde{s},\omega)\,d\tilde{s}\,d\omega .$$

本稿では、$n=3$ のとき Majda [3] によって得られた $S(s,\theta,\omega)$ (scattering kernel) の表現式が、一般に $n \geqq 2$ のときにも拡張できることを、特に n が偶数のときその証明には Majda [3] の方法をかなり改良しなくてはならないことを説明したい。次に、Lax－Phillips [1, 2] にある wave operator $W_{\pm}$ を定義しようとすると、$n=2$ のときには $n \geqq 3$ のときに無い困難があることについて述べたい。

§1. Scattering kernel $S(s,\theta,\omega)$ の表現式

Majda [3] は $n=3$ として次のことを示した。$r(\omega) = \min_{x\in\mathcal{O}} x\cdot\omega$ とすると、任意の $\omega \in S^2$ に対して、

$$\operatorname*{supp}_s S(s,-\omega,\omega) \subset (-\infty, -2r(\omega)]$$

が成立し、$s=-2r(\omega)$ で $S(s,-\omega,\omega)$ は singular (C^∞ でない) になっている。また著者 [5, 6] は、$\mathcal{O}$ が convex でなければ $\omega \in$

S^{n-1} を適当にとると $S(\cdot,-\omega,\omega)$ は少くとも 2 点で singular になり、$\mathcal{O}$ が strictly convex ならば任意の $\omega \in S^{n-1}$ に対して $S(\cdot,-\omega,\omega)$ は唯一点で singular であることを示した。これらの証明の出発点になったのは次の $S(s,\theta,\omega)$ の表現式 (1.1) である。

定理1.1. $v(x,t;\omega)$ を次の方程式の解とする。

$$\begin{cases} (\partial_t^2-\Delta)v=0 & \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^1, \\ v=-2^{-1}(-2\pi i)^{-n+1}\delta(x\cdot\omega-t) & \text{on } \partial\Omega\times\mathbb{R}^1, \\ v=0 \quad \text{for } t<r(\omega). \end{cases}$$

この $v(x,t;\omega)$ ($\in C^\infty_{x,\omega}(\mathcal{S}'_t)$) を使って $S(s,\theta,\omega)$ は次のように表せる。

$$(1.1)\quad S(s,\theta,\omega)=\int_{\partial\Omega}\{\partial_t^{n-2}\partial_\nu v(x,x\cdot\theta-s;\omega)-\nu\cdot\theta\,\partial_t^{n-1}v(x,x\cdot\theta-s;\omega)\}\,dS_x \qquad (\theta\neq\omega).$$

ここで ν は $\partial\Omega$ の単位外法ベクトルである。

$n=3$ のとき、Majda [3] によって上の表現式 (1.1) が証明された。その証明の手順を粗く言うと次の通りである。$\tilde{t}$ を十分大きいパラメーターとし、$R_{\tilde{t}}(x,t)$ を次の方程式の解とする。

$$\begin{cases} (\partial_t^2-\Delta)R_{\tilde{t}}=\delta(x-(\tilde{t}+s)\theta)\delta(t-\tilde{t}) & \text{in } \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^1, \\ R_{\tilde{t}}=0 \quad \text{for } t>\tilde{t}. \end{cases}$$

$\partial_t u((\tilde{t}+s)\theta,t)=\iint_{\Omega\times[T,+\infty)}(\partial_t^2-\Delta)R_{\tilde{t}}\,\partial_t u\,dx\,dt$ となることに注意して green の公式を使うと混合問題 (0.1) の解 $u(x,t)$ に対して

$$4\pi\tilde{t}\,\partial_t u((\tilde{t}+s)\theta, t) = 4\pi\tilde{t}\iint_{\partial\Omega\times[T,+\infty)}\{R_{\tilde{t}}\partial_\nu\partial_t u - \partial_\nu R_{\tilde{t}}\partial_t u\}\,dS_x + 4\pi\tilde{t}\int_\Omega\{\partial_t R_{\tilde{t}}\partial_t u - R_{\tilde{t}}\partial_t^2 u\}\Big|_{t=T}dx$$

が成立する。下の補題1.2を使うと、$\tilde{t}\to+\infty$のとき上の左辺は$(\mathcal{S}k)(s,\theta)$に収束することが分かる。さらに右辺の第2項$4\pi\tilde{t}\int_\Omega\{\ \}|_{t=T}dx$は(粗く云えば)$k(s,\theta)$に収束する。したがって、$\tilde{t}\to+\infty$としたときの右辺の第1項の極限を求め、その中にある$\partial_t u(x,t)$を$k(s,\omega)$で表せば表現式(1.1)が得られることになる。

補題1.2. 初期値がfであるfree space $\mathbb{R}^n$のCauchy問題の解を$u_0(x,t)$とする。このとき、T_0^+f or $T_0^-f\in\mathcal{S}$ 又は $f(x)\in\mathcal{S}$ ならば

$$T_0^+f(s,\theta) = \lim_{\tilde{t}\to+\infty} 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\tilde{t}^{\frac{n-1}{2}}\,\partial_t u_0((\tilde{t}+s)\theta, \tilde{t})$$

が成立する。

nが奇数のときは大きな困難なしに上のMajdaの手順を踏襲すれば定理1.1が証明できる。しかし、nが偶数のときも含めてやろうとすると、彼の方法をかなり改良しなくてはならない。それはまず、補題1.2がnが奇数のときはLax–Phillipsによって確かめられているが、nが偶数のときは証明されていないこと、次にMajda [3]はHuygensの原理($\mathrm{supp}\,[R_{\tilde{t}}]\subset\{(x,t): |x-(\tilde{t}+s)\theta| = \tilde{t}-t\}$となること)を証明に使っているが、$n$が偶数のときはこのようなことは期待できないことにある。詳しい証明については著者の論文[6]を見られたい。

Melrose [4] も (1.1) と同等の表現式を得ていることを注意しておきたい。

§2. wave operator $W_\pm$ の定義

この節では、まず Lax-Phillips [1,2] の translation representation $T_0^\pm$ を簡単に紹介し、次に wave operator $W_\pm$ の定義とそのとき生じる問題点について述べたい。

free space R^n の初期値 $f=(f_1,f_2)$ の空間として $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を次の energy norm で完備化したもの H_0 を導入する。

$$\|f\|_E^2 = \frac{1}{2}\int(|\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)\,dx .$$

$u_0(x,t)$ を初期値 $f\in H_0$ の解とし、

$$U_0(t)f = (u_0(\cdot,t),\ \partial_t u_0(\cdot,t))$$

とおくと、$\{U_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は H_0 上の unitary operator の group をなす。$f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の Radon 変換 Rf は次のように定義される。

$$Rf(s,\omega) = -\partial_s\Big(\int_{x\cdot\omega=s} f_1(x)\,dS_x\Big) + \int_{x\cdot\omega=s} f_2(x)\,dS_x \quad ((s,\omega)\in\mathbb{R}^1\times S^{n-1}).$$

変数 s に関する Fourier 変換を F で表す。norm $[k(s,\omega)]_s^2 = \iint|\sigma|^{2s}\times|(Fk)(\sigma,\omega)|^2 d\sigma d\omega$ で定義される空間を W_s とすると、R は H_0 から $W_{\frac{n-1}{2}}$ への unitary operator になる。n が奇数のとき translation representation

$T_0^+ = T_0^-$ は次のように定義する。

$$T_0^\pm = (-\partial_s)^{\frac{n-1}{2}} R .$$

nが偶数のときは、

$$\lambda_\pm(\sigma) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}}(1-i)\,\sigma^{\frac{1}{2}}, & \sigma \geqq 0, \\ \pm 2^{-\frac{1}{2}}(1+i)\,|\sigma|^{\frac{1}{2}}, & \sigma < 0 \end{cases}$$

とし次のように定義する。

$$T_0^\pm = (-\partial_s)^{\frac{n}{2}-1} \lambda_\pm(D_s) R$$

ここで、$\lambda_\pm(D_s)\ (= F^{-1}[\lambda_\pm(\sigma) F \cdot])$ は $(-\partial_s)^{\frac{1}{2}}$ になっていることに注意しよう。$T_0^\pm$ は H_0 から $L^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ への unitary operator になり、さらに次の(i),(ii)が成立する。

(i) sに関する translation : $k(s) \longrightarrow k(s-t)$ を $\mathcal{T}_t$ で表すと、

$$T_0^\pm U_0(t) = \mathcal{T}_t T_0^\pm .$$

(ii) $\operatorname{supp}_s [T_0^\pm f] \subset \begin{matrix}[\rho, +\infty) \\ (-\infty, -\rho]\end{matrix}$ $(\rho \geqq 0)$ である必要十分条件は、任意の $t \gtrless 0$ に対して $\operatorname{supp}[U_0(t) f(x)] \subset \{(x,t) : |x| \geqq \pm t + \rho\}$ となることである。

混合問題(0.1)の初期値fの空間は、$C_0^\infty(\Omega)$を energy norm $\|\cdot\|_E$ で完備化したものをとる。それをHで表す。

$$U(t) f = (u(\cdot, t),\ \partial_t u(\cdot, t))$$

とおくと、$\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は H 上の unitary operator の group をなす。$J: f \to f|_\Omega$ とし、$\rho(>0)$ を $\mathcal{O}\subset\{x: |x|<\rho\}$ となるようにとっておく。このとき、f がある $\tilde{s}(\in\mathbb{R})$ に対して $\mathrm{supp}_s[T_0^\pm U_0(\tilde{s})f]\subset {[\rho,+\infty) \atop (-\infty,-\rho]}$ を充すならば、上の $T_0^\pm$ の性質 (i), (ii) を考慮すると、

(2.1) $\qquad \pm t \geqq \pm\tilde{s}$ のとき、 $\quad JU_0(t)f\in H$

が成立する。したがって、

$$W_\pm f = \lim_{t\to\pm\infty} U(-t)\,J\,U_0(t)f$$

で定義される wave operator $W_\pm$ は、$E_\pm = \bigcup_{\tilde{s}\in\mathbb{R}}\{f: \mathrm{supp}_s[T_0^\pm U_0(\tilde{s})f]\subset {[\rho,+\infty) \atop (-\infty,-\rho]}\}$ に属する f に対しては well-defined であり、しかも norm を変えない。$E_\pm$ は H_0 内で、$W_\pm E_\pm$ は H 内でそれぞれ稠密であることが分かるから（詳しくは Lax-Phillips [1, 2] を見よ）、結局 $W_\pm$ は H_0 から H への unitary operator とみなせることになる。

ところがこの議論には一つ問題がある。それは、(2.1) を導く際 $T_0^\pm$ の性質 (ii) を用いたが、H_0 の要素の support の意味がはっきりしていないことである。次節ではこのことについて考察したい。

§3. $f\in H_0$ の support

Lax-Phillips [1] にあるように、$n\geqq 3$ のときは評価式

(3.1) $\qquad \|f\|_{L^2(|x|<r)} \leqq C_r\|f\|_E \;,\quad f\in C_0^\infty$

が成立する。ゆえに $n \geqq 3$ のときには $H_0 \subset L^2_{loc}$ とみなせる。そこで $f \in H_0$ の support を L^2_{loc} でのものと解釈すれば、(2.1)を厳密に示すことができる。

しかし $n=2$ のときは (3.1) は成立しない。のみならず、H_0 は distribution にもならない。そこで $f \in H_0$ の support を次のように定義しよう。R^n 内の閉集合 K に対して、$\operatorname{supp}[f^j] \subset K$ かつ $\lim_{j\to\infty} \|f^j - f\|_E = 0$ となる $f^j \in C_0^\infty$ が存在するとする。このような K の全体を考え、その共通部分を $\operatorname{supp}[f]$ とする。この定義に従って $T_0^\pm$ の性質(ii)を証明するには、次の命題か成立することを云えばよい。

<u>命題 3.1.</u> $\operatorname{supp}_s [T_0^\pm f] \subset {[\rho, +\infty) \atop (-\infty, -\rho]}$ ならば、$0<\rho'<\rho$ を充す任意の ρ' に対して、$\operatorname{supp}[f^j(x)] \subset \{x : \rho' \leqq |x|\}$ かつ $\lim_{j\to\infty} \|f^j - f\|_E = 0$ となるような $f^j(x) \in C_0^\infty(R^n)$ がとれる。

この証明は、$n=2$ のときはかなり面倒である。$n=2$ のときの証明の概略を述べよう。(詳しくは著者 [6] を見よ。) $f=(f_1, f_2) \in \mathcal{S}$ ならば

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} f_1(x) = (4\pi)^{-1} \displaystyle\int \{(-\partial_s)^{-1} \lambda_\pm(D_s)^* T_0^\pm f\}(x\cdot\omega, \omega)\, d\omega, \\[2ex] f_2(x) = (4\pi)^{-1} \displaystyle\int \{\lambda_\pm(D_s)^* T_0^\pm f\}(x\cdot\omega, \omega)\, d\omega \end{cases}
$$

が成立する(証明は Lax-Phillips $\overbrace{[1]}^{\text{又は著者 [6]}}$ を見よ)。これより直ちに $\operatorname{supp}_s [T_0^\pm f]$ の情報から $\operatorname{supp}[f]$ の情報が引き出せるように思えるかもしれ

ないが、実際は f の第1成分 f_1 に関してはそれ程簡単ではない。それは、$(-\partial_s)^{-1}\lambda_\pm(D_s)^*$ の symbol $(\sigma^{-1}\lambda_\mp(\sigma))$ が $-\frac{1}{2}$ 次の斉次函数であることに起因している。一般性を失うことなく、命題3.1において $T_0^\pm f\in\mathcal{S}$ と仮定してよいことが分かる。さらに、$T_0^\pm f\in\mathcal{S}$ ならば $\lim_{j\to\infty}\|\tilde{f}^j-f\|_E=0$ であって次の式を充す $\tilde{f}^j(x)\in C_0^\infty$ がとれることが云える。

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int\{(-\partial_s)^{-1}\lambda_\pm^* T_0^\pm f\}(x\cdot\omega,\omega)\,d\omega-\int\{(-\partial_s)^{-1}\lambda_\pm^* T_0^\pm \tilde{f}^j\}(x\cdot\omega,\omega)\,d\omega\right|_{C^1(|x|\le\rho)}=0.$$

ここで、$\mathrm{supp}_s[T_0^\pm f]\subset {[\rho,+\infty) \atop (-\infty,-\rho]}$ であることに注意すれば、上の第1項の積分は $|x|\le\rho$ のとき 0 であり、第2項の積分は(3.2)より $\tilde{f}^j(x)$ に等しいことが分かる。したがって、結局 $\lim_{j\to\infty}\|\tilde{f}^j-f\|_E=0$ かつ $\lim_{j\to\infty}|\tilde{f}^j(x)|_{C^1(|x|\le\rho)}=0$ であるような $\tilde{f}^j(x)\in C_0^\infty$ がとれることになる。ゆえに、$|x|\le\rho'$ のとき $\varphi(x)=0$, $|x|\ge\rho$ のとき $\varphi(x)=1$ であるような $\varphi(x)\in C^\infty(R^n)$ をとってきて、$f^j(x)=\varphi(x)\tilde{f}^j(x)$ とおけば命題3.1で要求されるものになっている。

なお、$W_\pm$ が H_0 から H への unitary operator になっているという事実は、定理1.1の証明に使われるということを注意しておきたい。

参考文献

[1] P. D. Lax and R. S. Phillips: Scattering theory, Academic Press, 1967.

[2] P. D. Lax and R. S. Phillips: Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions, Indiana Univ. Math. J. 22

(1972), 101-134.

[3] A. Majda: A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies, Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977), 165-194.

[4] R. B. Melrose: Forward scattering by a convex obstacle, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 461-499.

[5] H. Soga: Oscillatory integrals with degenerate stationary points and their application to the scattering theory, Comm. P. D. E. 6 (1981), 273-287.

[6] H. Soga: Singularities of the scattering kernel for convex obstacles, to appear.