数理解析研究所講究録
第530巻 1984年 24-35

ある種の偏微分作用素の Cauchy 問題の一意性

京大理　大鍛治隆司 (Takashi Ōkaji)

§1　序

我々は、次の形の作用素 P を考える。

$$t^K P(x,t,D_x,D_t) = \hat{P}(x,t,t^\nu D_x, tD_t)$$
$$= (tD_t)^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\le m \\ j\le m-1}} a_{\alpha,j}(x,t)(t^\nu D_x)^\alpha (tD_t)^j,$$

ここで、$0\leq K\leq m$，整数，ν：正の有理数，$D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$，$D_x=(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$，$a_{\alpha,j}(x,t)\in C^\infty(\overline{\Omega})$．（$\Omega$ は原点のある近傍）

この作用素 P に対する Cauchy 問題の解の一意性を調べるのが目的である；

<u>問題</u>

$$(1)\quad \begin{cases} Pu = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_t^j u = 0, & j=0,1,2,\cdots,\infty, \text{ on } \Omega\cap\{t=0\}. \end{cases}$$

$\Rightarrow\ u\equiv 0$ in $^\exists\omega$：原点のある近傍　？

この問題について，最近，G. Roberts ([6]), H. Uryu ([7]), S. Nakane ([5]) 氏等によって，ある結果が得られた。ここでは，彼らの結果の低階に関する条件を取り除くことを考える。

正確に言えば，次のようになる。

$\hat{P}_m(x,t,\xi,\tau) = \tau^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\le m \\ j\le m-1}} a_{\alpha j}(x,t)\xi^\alpha\tau^j = 0$ のτに関する根を$\lambda_j(x,t,\xi)$ $(j=1,2,\cdots,m)$とする時

仮定　1) real根λ_jはsimple，non-real根λ_jは高々double

2) non-real根λ_jは$|\mathrm{Im}\,\lambda_j|\geqslant\varepsilon>0$ on $\overline{\Omega}\times S^{n-1}$をみたす．

3) distinct roots λ_j. λ_kは$|\lambda_j-\lambda_k|\geqslant\varepsilon>0$ on $\overline{\Omega}\times S^{n-1}$をみたす．

定理　上の仮定の下で，$u\in C^\infty(\Omega)$が(1)の解ならば，ある原点の近傍ωがあって，そこで$u\equiv 0$となる．

注意1　瓜生氏は根λ_jがすべてsimpleという条件の下に，又Roberts氏 $(0<\nu\leqslant 1)$ 及び中根氏 $(\nu\in\mathbb{Z}, k=m)$ は，上の仮定とともに，低階にある条件をつけて（もちろん double root が存在する時）上と同じ結果を示された。

注意2　今考えている作用素Pにおいて，$\nu=1$，$k=m$とすれば，この作用素は，ふつうの非特性作用素を特別の場合として含んでいる．これについては，Calderón氏が根がsimpleの場合を解決し([3])，Mizohata氏がnon-real根は高々doubleまで許されることを示された．([9])．この方面のより詳しい文献については，Zuily氏のlecture note等を参照されたい。

上の定理は，退化型作用素と非特性作用素の結果が，完全に対応していることを示唆している。この種の事実は，双曲型作用素のwell-posednessの問題について，田原氏が初めて指摘

された。([9]).

§2. 証明の概略. その1. (作用素の分解)

証明の大筋は. 以前のものと本質的には変わりません.(重みをもつ Carleman estimate による.) ただ. 今の場合. 低階を無視して推論を行なうわけにはいかないので. まず作用素を低階もこめて. 高々2階の作用素の積に分解します. そしてこの分解された各々の作用素を micro-local に解析します。

以後. 簡単の為に. $K=m$, $\nu\in\mathbb{N}$ の場合に話を限定します. そうすれば. P は次のように書けます。

$$\begin{cases} P = D_t^m + \sum t^{l_{\alpha,j}} a_{\alpha,j}(x,t) D_x^\alpha D_t^j \\ l_{\alpha,j} = (l+1)|\alpha| + j - m, \quad a_{\alpha,j}(x,t) \in C^\infty(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

前の記号では, $\nu = l+1$ に対応する。又 $l_{\alpha,j}$ は負となってもよい。

Carleman の方法を P に適用する為に. (1) の解を x について compactly supported な関数に変換しなければなりません。今の場合. t の degenerate factor が重要であることを考慮して. Holmgren 変換ではなく. 次の singular な変換を行ないます。

$$\begin{cases} x = X \\ t = (\delta - |x|^2)^2 T \end{cases}$$

(この種の変換は. Baouendi & Zachmanoglou ([2]) において初めて使用された。) そうすれば, "$u(x,t) \in C^\infty$ で $t=0$ で flat $\Rightarrow \tilde{u}(X,T) \in C^\infty$, $T=0$, $|X|^2=\delta$ で

flat" となり，適当に修正すれば，$a(X,T)\in C_0^\infty$, $P^\# a=0$，$\partial_T^j \hat{a}\big|_{T=0}=0$ ($j=1,2,\cdots,\infty$) が得られます。ここで $P^\#$ は上の変換で P から得られる作用素です。簡単の為に (X,T) を再び (x,t) で書けば，

$$P^\# = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\le m \\ j\le m-1}} t^{l_{\alpha,j}} f(x)^{|\alpha|} a^\#_{\alpha,j}(x,t)\, D_x^\alpha D_t^j$$

$f(x,t)=(\delta-|x|^2)^{2(l+1)}$， $a^\#_{\alpha j}\in C^\infty$. となります。

P に対する仮定より，$P^\#$ に対して次の事が成り立ちます。

$$\begin{cases} P_m^\#(x,t,\xi,\tau)=\prod_{j=1}^{r}\left(\tau - t^l f(x)\lambda_j^\#(x,t,\xi)\right)\prod_{j=r+1}^{r+s}\left(\tau-t^l f(x)\lambda_j^\#(x,t,\xi)\right)^2 \\ |\lambda_i^\#-\lambda_j^\#|\ge\varepsilon \qquad \text{if } i\ne j \\ |\mathrm{Im}\,\lambda_j^\#|\ge\varepsilon \qquad j=r+1,\cdots,r+s. \\ \mathrm{Im}\,\lambda_j^\#\equiv 0 \text{ or } |\mathrm{Im}\,\lambda_j|\ge\varepsilon,\ j=1,2,\cdots,r, \qquad (x,t,\xi)\in\Omega^\#\times S^{n-1}. \end{cases}$$

又，$\lambda_j^\#$ を適当に修正することによって，$\lambda_j^\#\in S^1_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ で上の条件を $(x,t,\xi)\in\mathbb{R}^n\times[0,T_0]\times S^{n-1}$ でみたしているとしてもよいことがわかります。

問題は $P^\#$ について

(*) $\quad \|t^{-\gamma}u\|^2\le C\|t^{-\gamma}P^\#u\|^2$， $u\in C_0^\infty(\omega\times[0,T])$

という不等式が成り立つか？ということに帰着されます。（$t^{-\gamma}$ という重みは Alinhac & Baouendi [1] において初めて使われた。）

そこで，作用素 $P^\#$ を分解して (*) を調べる事になる。その為に，少し記号を導入しておく。

$L^j\ni A \Longleftrightarrow \sigma(A)\in S^j_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ （$\sigma(A)$ は A のシンボル）

$T^j\ni B\Longleftrightarrow B=\sum_{d+k\le j} t^{(l+1)d+k-j} f(x)^d A_{d,k}(x,t,D_x)D_t^k$， $A_{d,k}\in L^d$.

$\lambda_j(x,t,D_x)\in L^1$ を $\lambda_j^\#(x,t,\xi)$ を symbol にもつ作用素、

$\partial_j = D_t - t^\ell f(x)\lambda_j(x,t,D_x)\in T^1$ とする。この時次の命題が成り立つ。

<u>命題1</u> 任意の置換 π について、

$$p^\# = e_{\pi(1)}\cdots e_{\pi(r+s)} + t^{-2} r_{m-2}$$

$$e_j = \begin{cases} \partial_j + t^{-1}a_j(x,t,D_x) & j=1,\cdots,r\\ \partial_j^2 + t^{-1}(a_j(x,t,D_x)D_t + t^\ell f(x)\, b_j(x,t,D_x)) & j=r+1,\cdots,r+s.\end{cases}$$

$a_j\in L^0$, $b_j\in L^1$, $r_{m-2}\in T^{m-2}$.

<u>命題2</u> $r_{m-2}\in T^{m-2}$ について、

$$r_{m-2} = \sum_{i,j=1}^{r} g_{i,j}(x,t,D_x)\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{r+s} e_k + \sum_{j=r+1}^{r+s} g_j(x,t,D_x)\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r+s} e_k + t^{-1}r_{m-3}.$$

$g_{i,j},\ g_j\in L^0$, $r_{m-3}\in T^{m-3}$

この2つの命題は、次の3つの補題をくり返し使うことによって示されます。

<u>補題1</u> ([5],[6],[7]) $i\neq j$ とする時、$r_1\in T^1$ は次のように書ける。

$$r_1 = Q_1\partial_i + Q_2\partial_j + t^{-1}Q_3 \quad , \quad Q_j\in L^0,\ (j=1,2,3)$$

<u>補題2</u> $i\neq j$ とする時、$r_2\in T^2$ は

$$r_2 = Q_1\partial_i^2 + Q_2\partial_j + t^{-1}Q_3,\quad Q_1\in L^0,\ Q_2,Q_3\in T^1.$$

と書ける。

<u>補題3</u> $i\neq j$ の時、$r_3\in T^3$ について

$$r_3 = Q_1\partial_i^2 + Q_2\partial_j^2 + t^{-1}Q_3,\quad Q_1,Q_2\in T^1,\ Q_3\in T^2$$ となる。

これらの補題は、$|\sigma(\lambda_i-\lambda_j)|\geq\varepsilon>0$ on $\mathbb{R}^n\times[0,T]\times S^{n-1}$ を用いて、symbol計算によって示される。

命題1,2を用いれば、不等式(*)は、次の2つの不等式より得られることがわかる。$v\in C_0^\infty(\Omega'\times[0,T])$ に対し、

(2) $\gamma\|t^{-\gamma-1}v\|^2\leq C\|t^{-\gamma}\{\partial_j+t^{-1}a(x,t,D_x)\}v\|^2\quad(\gamma>{}^\exists\gamma_0)$

$a\in L^0$, $j=1,\cdots,r+s$.

(3) $\gamma^2\|t^{-\gamma-2}v\|^2+\|t^{-\gamma-1}D_t v\|^2+\|t^{-\gamma+l-1}f(x)D_x v\|^2$

$\leq C\|t^{-\gamma}\{\partial_j^2+t^{-1}r(x,t,D_x,D_t)\}v\|^2.\quad(\gamma>\gamma_0)$

$r\in T^1$, $j=r+1,\cdots,r+s$.

(2)の不等式は、すでに[5],[6],[7]等において示されている。(3)の不等式については、$\sigma(r)(x,t,\xi,\lambda_j)$ が十分小さい時は、本質的には、[5],[7]において示されている。

§3. 証明の概略.(不等式(3)の証明)

(3)の証明の概略について述べる。まず $r(x,t,D_x,D_t)$ を次のように表わします。

$$r(x,t,D_x,D_t)=a(x,t,D_x)\partial_j+t^l f(x)b(x,t,D_x)$$

$$a\in L^0,\ b\in L^1.$$

この時、次の3条件のうち少なくとも1つがみたされるようにconic n.b.d.の有限和に分解します。;

$\omega\times[0,T_1]\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}=\bigcup_{k=1}^{N}\omega\times[0,T_1]\times W_k$, ω; 十分小さな原点の近傍, T_1: 十分小さな正数.

$$\begin{cases} 1) & \operatorname{Im} \lambda_j^{\#}(x,t,\xi) < -\varepsilon, \quad |b(x,t,\xi)| \leqslant 2^{-12}\varepsilon^2. \\ 2) & \operatorname{Im} \lambda_j^{\#}(x,t,\xi) < -\varepsilon, \quad |b(x,t,\xi)| > 2^{-11}\varepsilon^2. \\ 3) & \operatorname{Im} \lambda_j^{\#}(x,t,\xi) > \varepsilon \end{cases}$$

そうすると、上の分解に付随した単位分解を用いることによって、不等式(3)は、次の命題が成り立つことに帰着されます

<u>命題3</u>　$\psi_k \in L^0$, $\operatorname{supp} \sigma(\psi_k) \subset \omega \times [0,T_1] \times W_k$ とする。ある正の定数、C, T_2, γ_0 があって、$0 < T \leqslant T_2$, $\gamma > \gamma_0$, $v \in C_0^\infty([0,T] : \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^n))$ に対して、

$$\gamma^2 \| t^{-\gamma-2} \psi_k v \|^2 + \| t^{-\gamma-1} D_t \psi_k v \|^2 + \| t^{-\gamma+\ell-1} f(x) D_x \psi_k v \|^2$$
$$\leqslant C \| t^{-\gamma} L \psi_k v \|^2 + C\left(T + \frac{1}{\gamma}\right) E_\gamma(v).$$

$E_\gamma(v) = $ (3)の左辺.

この命題は次の2つの補題を基礎とします。

<u>補題4</u>　$Q = \partial_j + t^{\frac{\ell-1}{2}} f(x)^{\frac{1}{2}} a_{\frac{1}{2}}(x,t,D_x)$, $a_{\frac{1}{2}} \in L^{\frac{1}{2}}$. 今、$\operatorname{Im} \lambda_j^{\#} < -\varepsilon$ on $\omega \times [0,T_1] \times W_k$ とする。この時、$\frac{1}{T}$, γ を十分大にすれば、$v \in C_0^\infty([0,T] : \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^n))$ に対して、

$$\frac{\ell+1}{6}\left\{ \gamma \| t^{-\gamma-1} \psi_k v \|^2 + \varepsilon \| t^{-\gamma+\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \psi_k v \|^2 \right\} + C\gamma^{-1} \| t^{-\gamma} D_t \psi_k v \|^2$$
$$\leqslant \| t^{-\gamma} Q \psi_k v \|^2 + CT \| t^{-\gamma-1} \Lambda^{-1} v \|^2$$ が成り立つ。

$\Lambda \in L^1$, $\sigma(\Lambda) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$.

<u>補題5</u>　$\operatorname{Im} \lambda_j^{\#} > \varepsilon$ on $\omega \times [0,T_1] \times W_k$ とする。$\frac{1}{T}$, γ を十分大にすれば、$v \in C_0^\infty([0,T] : \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^n))$ に対して、

$$M\gamma \| t^{-\gamma-1} \psi_k v \|^2 + M \| t^{-\gamma+\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \psi_k v \|^2 + C\gamma^{-1} \| t^{-\gamma} D_t \psi_k v \|^2$$

$$\leq \|t^{-\gamma}\partial_j \psi_k v\|^2 + CT\|t^{-\gamma-1}\Lambda^{-1}v\|^2$$ が成り立つ。

この２つの補題の証明は後に回わして、先に、命題３の証明について述べましょう。

まず最初に、2)の場合は、仮定より、Lを更に次のように分解することが出来ます。

$$\begin{aligned} L\psi_k &= Q_1(x,t,D_x,D_t)\,Q_2(x,t,D_x,D_t)\psi_k + t^{-1}a(x,t,D_x)\,Q_2(x,t,D_x,D_t)\psi_k \\ &\quad + t^{\frac{\ell-1}{2}-1} f^{\frac12}(x)\, d_{\frac12}(x,t,D_x)\psi_k + \{d_{0,1}(x,t,D_x) + t^{\frac{\ell-1}{2}-1} d_{0,2}(x,t,D_x)\} \\ &\quad \times\psi_k + \{d_{\infty,1}(x,t,D_x) + t^{\frac{\ell-1}{2}-1} d_{\infty,2}(x,t,D_x)\}. \end{aligned}$$

ここで、$Q_i = D_t - \lambda_j(x,t,D_x) + (-1)^i t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac12}(x)\, q_{\frac12}(x,t,D_x)$ $(i=1,2)$

$q_{\frac12},\ d_{\frac12} \in L^{\frac12}$, $d_{0,i}\in L^0$, $d_{\infty,i}\in L^{-\infty}$. $(i=1,2)$

従って、この時、補題４を Q_1, Q_2 に対して適用すれば命題３が成立することがわかります。実際、

$$\begin{aligned} \|t^{-\gamma}L\psi_k v\|^2 &\geq \tfrac12\|t^{-\gamma}Q_1Q_2\psi_k v\|^2 - C\{\|t^{-\gamma-1}aQ_2\psi_k v\|^2 \\ &\quad + \|t^{-\gamma+\frac{\ell-1}{2}-1} f^{\frac12}\Lambda^{\frac12}\psi_k v\|^2 + T\cdot\|t^{-\gamma-2}\psi_k v\|^2 \\ &\quad + T\cdot\|t^{-\gamma-2}\Lambda^{-1}v\|^2\} \\ &\geq (\tfrac12)^{10}\{\gamma^2\|t^{-\gamma-2}\psi_k v\|^2 + \gamma\varepsilon\|t^{-\gamma+\frac{\ell-1}{2}-1} f^{\frac12}\Lambda^{\frac12}\psi_k v\|^2 \\ &\quad + C\|t^{-\gamma-1}D_t\psi_k v\|^2 + \tfrac12\varepsilon^2\|t^{-\gamma+\ell-1} f\Lambda\psi_k v\|^2\} \\ &\quad - C\gamma^{-1}\|t^{-\gamma}Q_1Q_2\psi_k v\|^2 - C(T+\gamma^{-1})E_\gamma(v). \end{aligned}$$

一方，2)の場合は、補題４を $a_{\frac12}\equiv 0$ として、∂_j に適用すれば、

$$\begin{aligned} \|t^{-\gamma}\partial_j^2\psi_k v\|^2 &\geq \tfrac{1}{144}\{\gamma^2\|t^{-\gamma-2}\psi_k v\|^2 + \gamma\varepsilon\|t^{-\gamma+\frac{\ell-1}{2}-1} f^{\frac12}\Lambda^{\frac12}\psi_k v\|^2 \\ &\quad + C\|t^{-\gamma-1}D_t\psi_k v\|^2 + \tfrac12\varepsilon^2\|t^{-\gamma+\ell-1} f\Lambda\psi_k v\|^2\} \end{aligned}$$

$$-C(T+\gamma^{-1})E_\gamma(v).$$

が得られ、

$$\begin{cases} \|t^{-\gamma+\ell-1} f b \chi_k v\|^2 \leq 2^{-12}\varepsilon^2 \|t^{-\gamma+\ell-1}\Lambda \chi_k v\|^2 + CT\|t^{-\gamma-2}v\|^2 \\ \|t^{-\gamma-1} a\, \partial_j \chi_k v\|^2 \leq C\gamma^{-1}\|t^{-\gamma}\partial_j^2 \chi_k v\|^2 \end{cases}$$

と組みあわせますと、命題3が示されます。

最後に、3)の場合は、補題5を ∂_j に適用しますと、M として、$\frac{M^2}{16} > \max_{|\xi|=1} |b(x,t,\xi)|$ ととっておけば、2)の場合と同様に示すことが出来ます。

次に補題4.5の証明の概略を述べましょう。

(補題4の証明)

$v = t^\gamma w$, $Q_\gamma = t^{-\gamma} Q t^\gamma$ とおくと、

$$\begin{cases} Q_\gamma = X + Y. \\ X = D_t - t^\ell f(x)\lambda_1(x,t,D_x) + t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}}(x)\, a_1(x,t,D_x) \\ Y = \frac{1}{i}\gamma t^{-1} - it^\ell f(x)\lambda_2(x,t,D_x) + it^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}}(x)\, a_2(x,t,D_x) \end{cases}$$

と書ける。ここで、$\lambda_1, \lambda_2 \in L^1$ は $\mathrm{Re}\,\lambda_j^\#(x,t,\xi)$, $\mathrm{Im}\,\lambda_j^\#(x,t,\xi)$ を、$a_1, a_2 \in L^{\frac{1}{2}}$ は、$\mathrm{Re}\,a_{\frac{1}{2}}(x,t,\xi)$, $\mathrm{Im}\,a_{\frac{1}{2}}(x,t,\xi)$ をそれぞれ、シンボルとする作用素である。すると、

$$(4) \quad \|t^\gamma Q \chi_k v\|_\rho^2 = \|Q_\gamma \chi_k w\|_\rho^2 = \|X\chi_k w\|_\rho^2 + \|Y\chi_k w\|_\rho^2 + 2\mathrm{Re}(Xw, Yw)_\rho$$

$$(u,v)_\rho = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n_x} t^{-2\rho} u\bar{v}\, dx dt, \quad (\rho \text{ は後で決める数})$$

となる。そこで、$2\mathrm{Re}(Xw, Yw)_\rho$ を下から評価したい。χ_k を χ と書くことにすれば、部分積分によって、

(3.1) $$2\mathrm{Re}(D_t\chi w, \tfrac{1}{i}\gamma t^{-1}\chi w)_\rho = (1+2\rho)\gamma\|t^{-1}\chi w\|_\rho^2$$

(3.2) $$\begin{aligned}2\mathrm{Re}(D_t\chi w, -it^\ell f\lambda_2\chi w)_\rho &= (\ell-2\rho)(\chi w, -t^{\ell-1}f\lambda_2\chi w)_\rho\\ &\quad + (\chi w, -t^\ell f\lambda_{2,t}\chi w)_\rho\\ &\quad + (\chi w, -it^\ell(\lambda_2^* f - f\lambda_2)D_t\chi w)_\rho\end{aligned}$$

ここで，$\lambda_2^*\in L^1$ は λ_2 の L^2-adjoint，$\lambda_{2,t}\in L^1$ は $\frac{\partial}{\partial t}\lambda_2(x,t,\xi)$ をシンボルとする作用素である．同様に，

(3.3) $$\begin{aligned}2\mathrm{Re}(D_t\chi w, it^{\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac12}a_2\chi w)_\rho &= \left(\tfrac{\ell-1}{2}-2\rho\right)(\chi w, t^{\frac{\ell-1}{2}-1}f^{\frac12}a_2\chi w)_\rho\\ &\quad + (\chi w, t^{\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac12}a_{2,t}\chi w)_\rho\\ &\quad + (\chi w, it^{\frac{\ell-1}{2}}(a_2^* f^{\frac12} - f^{\frac12}a_2)D_t\chi w)_\rho\end{aligned}$$

(3.4) $$\left\{\begin{aligned}&2\mathrm{Re}(-t^\ell f\lambda_1\chi w, -it^\ell f\lambda_2\chi w)_\rho = (t^{2\ell}(\lambda_2^* f^2\lambda_1 - \lambda_1^* f^2\lambda_2)\chi w, i\chi w)_\rho\\ &2\mathrm{Re}(-t^\ell f\lambda_1\chi w, it^{\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac12}a_2\chi w)_\rho = (t^{\ell+\frac{\ell-1}{2}}(a_2^* f^{\frac32}\lambda_1 - \lambda_1^* f^{\frac32}a_2)\chi w, i\chi w)_\rho\\ &2\mathrm{Re}((-t^\ell f\lambda_1 + t^{\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac12}a_1)\chi w, \tfrac{1}{i}\gamma t^{-1}\chi w)_\rho\\ &\qquad = \gamma(\{t^{\ell-1}(f\lambda_1 - \lambda_1^* f) + t^{\frac{\ell-1}{2}-1}(f^{\frac12}a_1 - a_1^* f^{\frac12})\}\chi w, i\chi w)_\rho\\ &2\mathrm{Re}(t^{\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac12}a_1\chi w, i(-t^\ell f\lambda_2 + t^{\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac12}a_2)\chi w)_\rho\\ &\qquad = (\{t^{\ell+\frac{\ell-1}{2}}(\lambda_2^* f^{\frac32}a_1 - a_1^* f^{\frac32}\lambda_2) + t^{\ell-1}(a_2^* f a_1 - a_1^* f a_2)\}\chi w, i\chi w)_\rho.\end{aligned}\right.$$

ここで一番重要な項は，(3.1) と (3.2) の右辺第1項です．ここで ρ として，$(\ell-2\rho)>0$，（したがって，$\ell=0$ の時のみが問題）で，$(1+2\rho)>0$ となるものならば，何でもいいのですが，簡単の為，$2\rho=\frac{\ell-1}{2}$ とします．そうすれば，Sharp gårding 不等式を使えば，$\sigma(-\lambda_2)>\varepsilon>0$ だから，

$$(3.2) \geq \frac{\ell+1}{2}(\chi w, t^{\ell-1}f(-\lambda_2)\chi w)_\rho - CT\|t^{\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac12}\Lambda^{\frac12}\chi w\|_\rho\|t^{-1}\chi w\|_\rho$$

$$- C T^{\frac{1}{2}} \| t^{-1} \chi w \|_\rho \cdot \| X \chi w \|_\rho$$

$$\geq \frac{1}{4}(\ell+1)\varepsilon \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \chi w \|_\rho^2 - CT\{ \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \chi w \|_\rho^2 + \| t^{-1} \chi w \|_\rho^2$$

$$+ \| t^{-1} \Lambda^{-1} w \|_\rho^2 \} - C T^{\frac{1}{2}} \{ \| t^{-1} \chi w \|_\rho^2 + \| X \chi w \|_\rho^2 \}.$$

ここで、$D_t = X + t^\ell f \lambda_1 - t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_1$ なる関係式を使った。

(3.3) 及び (3.4) は、絶対値が、$CT(\| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \chi w \|_\rho^2 + \gamma \| t^{-1} \chi w \|_\rho^2)$ で上から評価される。一方、λ_2 は $\omega \times [0, T_1] \times W_k$ で elliptic だから、

$$D_t = X + t^\ell f \lambda_1 - t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_1 = X + g_1 (t^\ell f \lambda_2) - t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_1 + g_2$$

$$= X + \frac{1}{i} g_1 \left(-Y + \frac{1}{i} \gamma t^{-1} + i t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_2 \right) - t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_1 + g_2$$

とかける。ただし、$g_1, g_2 \in L^0$。従って、

$$\| D_t \chi w \|_\rho^2 \leq C \{ \| X \chi w \|_\rho^2 + \| Y \chi w \|_\rho^2 + \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \chi w \|_\rho^2 + \gamma^2 \| t^{-1} \chi w \|_\rho^2 \}$$

という評価式が得られる。以上の議論によって、(4) より、

$$\| Q_\gamma \chi w \|_\rho^2 \geq \frac{1}{4}(\ell+1) \gamma \| t^{-1} \chi w \|_\rho^2 + \frac{\ell+1}{6} \varepsilon \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \chi w \|_\rho^2 + C \frac{1}{\gamma} \| D_t \chi w \|_\rho^2$$

$$- CT \| t^{-1} \Lambda^{-1} w \|_\rho^2$$

が得られる。

(補題5の証明)。この時も、やはり、$v = t^\gamma w$ とおき、$Q_\gamma = t^{-\gamma} Q t^\gamma$ とすれば、

$$\begin{cases} Q_\gamma = X + Y \\ X = D_t - t^\ell f(x) \lambda_1 \\ Y = \frac{1}{i} \gamma t^{-1} - i t^\ell f(x) \lambda_2 \end{cases}$$

となる。

しかも、$\lambda_2 > \varepsilon > 0$ on $\omega \times [0, T_1] \times W_k$ だから、ρ として

$1 + 2\rho > 2M$, $-(\ell - 2\rho) > 3M/\varepsilon$ をみたすように選べば、前と

同じ手法で補題5が示される。

<u>注意</u> 我々は、議論を統一的にする為、modified norm $\|\cdot\|_p$ を用いたが、$\ell>0$ と仮定すれば、$\|\cdot\|_p$ を使わずに、ふつうの norm $\|\cdot\|$ で議論することができる。

<u>参考文献</u>

1. S. Alinhac & M.S. Baouendi, Amer. J. Math. 102 (1980), 179-217
2. M.S. Baouendi & E.C. Zachmanoglou, Duke Math. J., 45 (1978). 1-13.
3. A.P. Calderón, Amer. J. Math, 80 (1958). 16-30.
4. S. Mizohata, Proc. Jap. Acad. 34 (1958) 687-692
5. S. Nakane, Proc. Jap. Acad. 58 (1982), 141-149.
6. G. Roberts, J. Diff. Eq. 38 (1980), 374-392
7. H. Uryu, Tokyo J. Math. 5 (1982) 117-136.
8. C. Zuily, Univ. Federal de Pernambuco Inst. de Math. Notas de Curso. No18 (1981)
9. H. Tahara, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, 26 (1979), 213-238, 391-412, 27(80) 465-507.