数理解析研究所講究録
第 530 巻 1984 年 36-60


# 多重特性的作用素に対するCauchy問題の非一意性

東大 理 中根静男 (Sizuo Nakane)

## §0. 序

ここでは非特性Cauchy問題の解の局所一意性について考える。一般に、偏微分方程式を扱うとき、実解析函数のカテゴリーで考えるか、$C^\infty$-函数のカテゴリーで考えるかによって、様子が随分違うことはよく知られている。Cauchy問題に関する主要な問題は、適切性と一意性かと思われるが、この2つの問題を例にとって比較してみよう。(この比較は非常に重要と思われる。少なくとも筆者にとっては。)

| | 実解析 カテゴリー | $C^\infty$ カテゴリー |
|---|---|---|
| 適切性 | Cauchy-Kowalevsky の定理<br>非特性 なら常にOK | 双曲型方程式の理論<br>双曲性, Levi条件 が必要 |
| 一意性 | Holmgren の定理<br>非特性 なら常にOK | Calderon の定理 etc. ...<br>よくわかってない. |

このように、実解析カテゴリーの簡明さに比べて、$C^\infty$カテゴリーでは色々な条件をつけないといけないなど、複雑である。しかし、その複雑さに挑戦することによって歴史は進歩する。実際、今や偏微分方程式論において必要不可欠な道具となった擬微分作用素及びFourier積分作用素の起源である、特異積分作用素が初めて偏微分方程式に応用されたのは、Calderonによる一意性の証明においてであり、その翌年に溝畑先生のregularly hyperbolicの論文が登場するのである。

それはさておいて、ここでは$C^\infty$−カテゴリーでCauchy問題の一意性について考える。目標は、一意性が成り立つような作用素の特徴付けである。しかし、先の表にも書いたように、よくわからない、というのが現状である。一意性が成り立つための十分条件については色々な結果があるが、それらの十分条件が必要条件でもあるのか、あるいは、どの位必要条件に近いのかということに関しては、これまであまり研究されてこなかった。未だ、暗中模索の段階である。しかし、最近、Zuily、Alinhac達によって新しい方法が開発され、非常にsharpな必要条件が出せるようになった。以下の話は、彼らの方法を応用して、これまで得られていた、幾つかの十分条件の必要性について考察しようというものである。

その際、適切性との比較をしてみよう。$C^\infty$−カテゴリーに

おいても、適切性に関しては、かなり良く調べられているので、これを利用しない手はないであろう。Cauchy問題が適切になるような作用素の特徴付けには、2つの要因がある。ひとつは特性根が実であることで、これは主部に関する条件である。もうひとつは、特性根が重なるときの低階に関する条件で、俗にLevi条件と呼ばれるものである。

この事を念頭に置きつつ、一意性に目を向けてみよう。第1に、特性根が実でない場合(即ち楕円型の場合)でも一意性は成り立つことがある。というよりも、楕円型の方が一意性は成り立ちやすい。実際、楕円型作用素に対しては常に一意性が成り立つという予想が存在した程である。(後にこの予想は覆るのだが。)更に、双曲型作用素に限っても、Levi条件が満たされれば当然一意性は成り立つが、Levi条件を破っても一意性が成り立つこともあることが明らかにされた。こうしてみると、適切性と一意性とでは随分構造が違っているようにもみえるが、共通点もある。それは、①特性根、特にその虚部の振舞に対し何らかの条件を課す必要があること、②特性根に多重度があるときは、低階に何らかの条件を課す必要があること、である。そして、恐らくこの2点によって一意性が成り立つ作用素の特徴付けも為されるのではないかと思われる。

以下に述べる結果も、この2点に沿った形で記述される。そして、②に関してはひとつの視点を与え得たと思うが、①に関しては、単に結果を掲げるのみで、その条件をうまく解釈するに至っていない。少し具体的に述べてみよう。ここで注意しておきたいのは、一意性を考えるとき、低階の影響の仕方が複雑であることは先に述べたことからも推察されるが、実際その通りであって、実は、通常の意味では低階であっても、主部の役割を果たすこともあるのである。この点は、適切性の時とは大きく異なる所である。例えば、弱双曲型作用素でLevi条件が破れているものを考えてみよう。適切性を問題にするとき、Levi条件を破る低階項はあくまで低階であり、それが暴れて主部では制御できないので適切性が破れるのである。ところが、一意性を問題にするときは、その低階項は主部とみなすべきであり、そうすると、逆に主部が強くなって、その他の低階項を制御できるので一意性は成り立つのである。従って、Levi条件の破れ方が激しければ激しいほど一意性が成り立ちやすいという、一見して奇妙な現象もうまく説明できるのである。

そこで、では一体どうやって低階を主部とみなしたらよいかが問題になるが、我々が扱う作用素に関しては、変数毎にweightをうまく変えて階数をweightも考慮して数えることに

すればうまくいく。この方法は既に、R. Lascar によって別の問題（　　　Schrödinger 方程式の解の"特異性"の伝播の記述）に使われているものである。

このように、低階をも主部とみなし得るという状況なのだから、通常の Levi 条件では一意性をうまく説明できないのは当然であろう。しかし，何を主部とみなし，何を低階とみなすかがはっきりすれば、後は、双曲型（＝適切性）の議論と同様にすればよいということもわかる。そこで，② で必要となる低階の条件を，Lascar にちなんで準斉次 Levi 条件と呼ぶことにしよう。この準斉次 Levi 条件によって今まで得られていた結果も見通しよく説明できる。

主部と低階の意味が通常のものと異なってくれば，当然，特性根の意味も異なってくる。特性根の多重度という概念もそれにともなって変ってくる。従って，① の特性根の虚部の振舞を考えるときも注意を要する。別の理由もあって、ここでは特性根の虚部の振舞の及ぼす効果について explicit には述べられないが、その代わりに，作用素のシンボルの虚部及び実部の振舞の及ぼす効果を述べる。① については、幾何的な説明ができることが期待されるが，それは今後の課題であろう。

## §1. 結果（その1）

$(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d+1}$、$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$、$D_x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$ と書く。

$\Omega$、$U$ を $\mathbb{R}^{d+1}$ の原点の開近傍とする。以下、次のような $\mathbb{R}^{d+1}$ の $p$ 階の偏微分作用素を考える。

$$
\begin{aligned}
P &= P(t,x;\partial_t, D_x) \\
&= \partial_t^p + t^k A(t,x;D_x) - t^m B(t,x;D_x) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i\le j} t^{m(j,i)} B_{j,i}(t,x;D_x)\,\partial_t^{p-j}.
\end{aligned}
$$

但し、$p \geq q > r \geq 1$, $k, m, m(j,i) \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$、$A$、$B$、$B_{j,i}$ は各々 $D_x$ について $q$ 次，$(q-r)$ 次，$i$ 次斉次な $C^\infty(U)$-係数の偏微分作用素とする。

**定理 1.** 次を仮定する。

(A.1) $\quad k > \dfrac{pr+qm}{q-r}$

(A.2) $\quad m(j,i) > \dfrac{jk}{p} + \dfrac{(ip-jq)(k-m)}{pr}$

$\xi^0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ と、$\{B(0,0,\xi^0) - A(0,0,\xi^0)\}^{\frac{1}{r}}$ の分枝 $C(\xi^0)$ が存在して次を満たす：

(A.3) $\quad \mathrm{Re}\, C(\xi^0) > 0$

(A.4) $\quad \mathrm{Re}\left\{\left(\dfrac{A(0,0,\xi^0)}{B(0,0,\xi^0) - A(0,0,\xi^0)} + 1 - \dfrac{q}{r}\right) C(\xi^0)\right\} > 0.$

このとき、$\mathbb{R}^{d+1}$ の原点の近傍 $U'$ と、$U'$ で $C^\infty$ な函数 $u, f$ が存在して次を満たす。

$$Pu - fu = 0, \qquad (0,0) \in \mathrm{supp}\, u \subset \{t \geq 0\}.$$

以下、仮定に関してコメントを加えておく。

注1. $p=q$, $k=pl$ のとき(即ち、$B_{j,i}$ の項を無視すれば、variable multiplicity のとき)、(A.1) は $m < l(p-r)-r$ と書けるが、これは、通常のLevi条件が破れていることを意味する。一方、瓜生[16]は、このような場合を扱い、Levi条件が満たされていれば(即ち、$m \geq l(p-r)-r$)一意性が成り立つことを示した。故に (A.1) はbestな条件である。

注2. $p > q$ のとき(即ち、$B_{j,i}$ を無視すれば、constant multiplicity のとき)も、(A.1) はbestであろうと思われる。実際、特殊な場合にはそうなっていることがわかる。

**定理2.** $Q$ を $\mathbb{R}^{d+1}$ の次のような作用素とする:

$$Q = \partial_t^p + t^k A(t,x;D_x) + t^m B(t,x;D_x) + C(t,x),$$

但し、$p=3$ or $4$、$k,m \in \mathbb{N}$, ($p=4$ のときは $k \geq 1$)、$A$、$B$ は $D_x$ について各々2次、1次斉次な $C^\infty(U)$-係数の偏微分作用素 $C \in C^\infty(U)$ とする。次を仮定する:

(A.5) $\quad k \leq p+2m$

(A.6) $\quad A(t,x;\xi) \geq \delta|\xi|^2 \quad \text{in } U \times \mathbb{R}^d \qquad \exists \delta > 0.$

このとき、$\mathbb{R}^{d+1}$ の原点の近傍 $U'$ が存在して次を満たす:

$$\forall u \in C^\infty(U) \text{ s.t. } \begin{cases} Qu = 0 \\ \partial_t^j u|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq j \leq p-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u \equiv 0 \quad \text{in } U'$$

尚、一般の $p$、$q$、$r$ に対しては、瓜生氏によって、条件 $k \leq \frac{pr+qm}{q-r}$ の十分性は、ほぼ確かめられている。

注3. 松本[9]、Zeman[18]、Zuily[19]は、上記の $P$ で $q=p-1$、$k=0$ のとき一意性が任意の $m$ に対して成り立つことを示している。又、最近、Damlakhi-Zuily[3]は、$q<p$、$k=0$ のとき、大体において、任意の $m$ に対し一意性が成り立つことを示した。定理1はこれらの結果が出した十分条件が強すぎて、必要でないことを意味する。

注4. 定理1と2、及び瓜生[16]の結果等を見ると、一意性に関しては、constant multiplicity case も variable multiplicity case も同時に扱えることがわかる。これは適切性のときとは大きく異なる所である。これは何故かというと、一意性を考えるときと、適切性を考えるときとでは、同じ上記の $P$ に対しても、何を主部とみなすかが異なっているからである。序でも若干触れたが、一意性を考えるときは、$(t,x)$ に weight $(\frac{q}{p},1,\cdots,1)$ を付けて考えるべきである。上の $P$ は、通常の意味では $p$ 階だが、weight を付けて考えると、つまり準斉次の意味では $q$ 階になる。特に、$p>q$ のとき $P$ は通常の意味では constant multiplicity だが準斉次の意味では variable multiplicity なのである。(通常の意味の主部は $\partial_t^p$、準斉次の意味の主部は $\partial_t^p+t^k A$ となることに注意!)。$p=q$ のときは準斉

次＝斉次となって通常の意味と一致する。従って、constant multiplicity も variable multiplicity も同時に扱えると述べたが、一意性に関する限り、実は共に variable multiplicity なのである。そして定理1は、条件；

$$k \le \frac{pr+qm}{q-r}$$

の必要性を示しているが、この条件も、準斉次の意味で考えると、$t=0$ で特性根が重なるときの Levi 条件に対応しているわけで、それ故に準斉次 Levi 条件と呼んだのである。

松本、Zeman、Zuily、Damlakhi-Zuily の結果も、準斉次の意味で principal type の作用素を扱っていると考えれば、準斉次－低階に関係なく一意性が成り立つのももっともらしい話である。また、Levi 条件があるときも一意性が言えるし、ないときも言える…といった議論も、準斉次の意味で考えれば、準斉次 Levi 条件という視点で統一的に捉えられるのである。

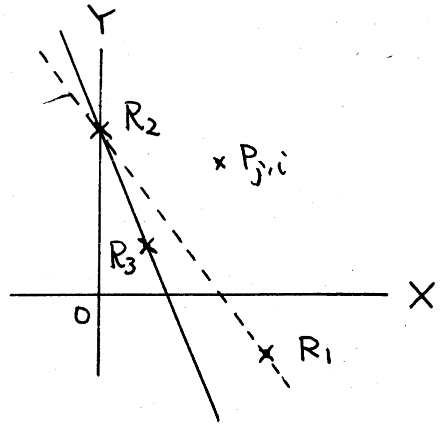
注5. (A.1)、(A.2) は Newton polygon の言葉で説明できる。$(X, Y)$－平面に次の点を plot する：

$$R_1 = \left(\frac{q}{p}, -1\right) \longleftarrow \partial_t^p \text{ に対応}$$

$$R_2 = \left(0, \frac{k}{p}\right) \longleftarrow t^k A \quad ''$$

$$R_3 = \left(\frac{r}{p}, \frac{m}{p}\right) \longleftarrow t^m B \quad ''$$

$$P_{j,i} = \left(\frac{q}{p} - \frac{i}{j}, \frac{m(j,i)}{j}\right) \leftarrow t^{m(j,i)} B_{j,i} \partial_t^{p-j} \quad ''$$




(A.1) は $R_3$ が直線 $\overline{R_1R_2}$ の下方にあることを意味する。これは、準斉次 Levi 条件が破れていることを示す。

(A.2) は $P_{j,i}$ が直線 $\overline{R_2R_3}$ の上方にあることを意味する。上にあればあるほど弱くなり、影響の少ない項となる。

注6. (A.3)、(A.4) を考察する。(A.3)、(A.4) からすぐわかることは、

$$A(0,0,\xi^0),\ B(0,0,\xi^0) \neq 0 。$$

従って、このようなときのみを考えればよい。

(1) $p \geq 3$、$A(0,0,\xi^0)/B(0,0,\xi^0) \in \mathbb{R}$ のとき、

$$\left\{\begin{array}{l} r \text{ が奇数} \\ \quad \text{あるいは} \\ r \text{ が偶数、かつ } A(0,0,\xi^0)/B(0,0,\xi^0) > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}\text{(A.3)、(A.4) は} \\ \text{満たされる。}\end{array}$$

(2) $p=q=2$, $r=1$, $A(0,0,\xi^0)/B(0,0,\xi^0) \in \mathbb{R}$ のとき、

$A(0,0,\xi^0) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ⇨ (A.3)、(A.4) は満たされる。

渡辺 [17] は、$\mathbb{R}^2$ の作用素：

$$P = \partial_t^2 + t^k A(t,x)\partial_x^2 + (\text{低階})$$

に対し、$A(t,x) > 0$ ならば任意の低階に対し、一意性が成り立つことを示した。上の事実は、この作用素に対し、$A(0,0) \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ ならば一意性が低階に依存することを示し

ている。故に，(A.3)、(A.4) も落とせない，ギリギリの条件であることがわかる。

(3)　$p=q=2$，$r=1$，$A(0,0,\xi^0)\in\mathbb{R}$ のとき，

$A(0,0,\xi^0)>0$，$\mathrm{Re}\,B(0,0,\xi^0)\neq 0$ ⇒ (A.3)，(A.4) は満たされる。

(4)　$p=q=2$，$r=1$，$B(0,0,\xi^0)\in\mathbb{R}$ のとき，

$\mathrm{Re}\,A(0,0,\xi^0)>\sqrt{3}\,|\mathrm{Im}\,A(0,0,\xi^0)|$ ⇒ (A.3)，(A.4) は満たされる。

次に Gevrey class で非一意性を考える。$s>1$ に対して，$\gamma^{(s)}=C^\infty(\mathbb{R}_t;\mathcal{E}^{\{s\}}(\mathbb{R}_x))$ とおく。$P$ を次のような $\mathbb{R}^2$ の作用素とする。

$$P=\partial_t^p+t^kA(t)D_x^q-t^mB(t)D_x^{q-r},$$

但し，$p\geqq q>r\geqq 1$，$k,m\in\mathbb{N}$，$A,B\in C^\infty(\mathbb{R}_t)$，$A(t),B(t)>0$。

**定理3.**　(A.1) を仮定する。$s_0=\dfrac{p(k-m)}{k(q-r)-pr-qm}$ とおく。すると任意の $s>s_0$ に対し，$u\in\gamma^{(s)}$，$f\in\gamma^{(s+1)}$ が存在して次を満たす。

$$Pu-fu=0,\qquad (0,0)\in\mathrm{supp}\,u\subset\{t\geqq 0\}.$$

**注7.**　$p=q=2$，$r=1$，$k=2l$ のとき，$s_0=\dfrac{2l-m}{l-1-m}$。この事実は，猪狩[5]，Ivrii[6]による，Gevrey class における Cauchy 問題の適切性に関する結果に対応している。

**注8.**　Leray[8]は，次の形の作用素に対して，Gevrey class において非一意性の結果を出した。

$$P=\partial_t^p+b(t,x;D_x)$$

但し、bは$q$階の作用素（$q<p$）。彼の結果は $s_0=\frac{p}{q}$ に対応しているが、$\frac{p}{q}<\frac{p(k-m)}{k(q-r)-pr-qm}$ だから、定理3は、彼の結果の精密化になっている。

## §2. 結果（その2）

§1では、言わば、hyperbolic typeの作用素（即ち、$P=\partial_t^p+\cdots$）の形った。ここでは、degenerate elliptic typeの作用素（即ち、$P=(\partial_t-it^\ell\partial_x)^p+\cdots$）に対し、非一意性を考える。何故、このような作用素を考えるかというと、普通、一意性を示すときに、何らかの意味でCalderonの条件：特性根の虚部は恒等的に消えるか、決して消えない、を仮定するが、この条件を落としたらどうなるか、という点には興味があるからである。特性根同志が$t=0$でくっつくという場合は多くの人が研究しているが、特性根の虚部が$t=0$で退化する場合というのはあまりやられていない。1階の作用素に対しては、Strauss－Treves［15］の十分性と、Zuily［20］の必要性があるが、高階の場合にはほとんどない。そこで、典型的な場合に、必要条件を出しておこうというわけである。結果は、特性根の虚部の$t=0$での退化の度合に応じて、低階も$t=0$で退化していないと一意性が破れるということである。興味深いのは、低階の退化に対する条件が、丁度、$t=0$で特性

根がくっつく場合の Levi 条件と一致していることである。

さて、$P = P(t,x;\partial_t, D_x)$ を、$\mathbb{R}^{d+1}$ における次のような $p$ 階偏微分作用素とする：

$$P = (\partial_t - t^{\ell} C(t,x;D_x))^p + t^k A(t,x;D_x) - t^m B(t,x;D_x)$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{i \le j} t^{m(j,i)} B_{j,i}(t,x;D_x)\, \partial_t^{p-j}.$$

但し、A、B、$B_{j,i}$ は§1と同じ作用素（即ち、各々 $D_x$ について斉次 $q$ 次、$(q-r)$ 次、$i$ 次）、$C$ は $D_x$ について斉次 1 次とする。($p \ge q > r \ge 1$)。すると、次の定理は定理1の系である。

**定理4.** 次を仮定する。

(A.7) $$\frac{pr+qm}{q-r} < k < \frac{pr\ell+(p-q)m}{p-q+r}$$

(A.2) $$m(j,i) > \frac{jk}{p} + \frac{(ip-jq)(k-m)}{pr}.$$

$\xi^0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ と、$\{B(0,0,\xi^0) - A(0,0,\xi^0)\}^{1/p}$ の分枝 $D(\xi^0)$ が存在して次を満たす：

(A.8) $$\operatorname{Re} D(\xi^0) > 0,$$

(A.9) $$\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{A(0,0,\xi^0)}{B(0,0;\xi^0) - A(0,0;\xi^0)} + 1 - \frac{q}{r}\right) D(\xi^0)\right\} > 0.$$

このとき定理1と同じ結論が従う。

注9. (A.7)は、中根[10]の定理2の仮定(1.9)あるいは(1.13)と同値である。従って、この定理は、中根[10]の定理2の一般化になっている。

注10. 注5の Newton polygon を考える。新たに加わった、

$t^p C$ という項に対応する点を $R_4=(\frac{q}{p}-1,\ l)$ であるが、(A.7) の第2の不等式は、$R_4$ が直線 $\overline{R_2R_3}$ の上方にあることを意味する。従って、上の定理は定理1より従う。

また、$k>\frac{prl+(p-q)m}{p-q+r}$ のときを考えよう。

**定理5.** 次を仮定する。

(A.10) $$k>\frac{prl+(p-q)m}{p-q+r},$$

(A.11) $$m<(l+1)(q-r)-p,$$

(A.12) $$m(j,i)>lj+\frac{m-pl}{p-q+r}(j-i)。$$

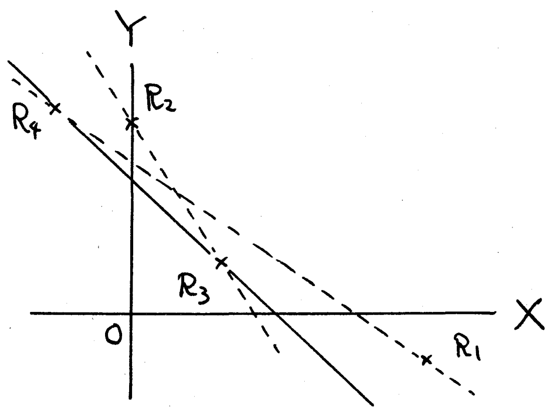
更に、$\xi^0\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ と、ある分枝 $B(0,0,\xi^0)^{1/p}$ が存在して次を満たすとする：

(A.13) $$\mathrm{Re}\,C(0,0,\xi^0)+\mathrm{Re}\,B(0,0,\xi^0)^{1/p}>0$$

(A.14) $$p\,\mathrm{Re}\,C(0,0,\xi^0)+(q-r)\,\mathrm{Re}\,B(0,0,\xi^0)^{1/p}<0。$$

このとき、定理1と同じ結論が従う。

注11. Newton polygon で言うと、(A.10) は $R_4$ が直線 $\overline{R_2R_3}$ の下方にあることを意味し、(A.11) は $R_3$ が直線 $\overline{R_1R_4}$ の下方にあることを意味する。




（これが Levi 条件を破っていることに対応する）。(A.12) は $P_{j,i}$ が直線 $\overline{R_3R_4}$ の上方にあることを意味する。

例. 次のような $\mathbb{R}^2$ の作用素を考える。

$$P = (\partial_t - t^l D_x)^p - t^m B(t,x) D_x^{q-r}$$

但し、$B \in C^\infty(U)$, $p \geqq q > r \geqq 1$。これは $A = B_{j,i} = 0$ (i.e. $k = m_{j,i}$ $= +\infty$) に対応しているので、(A.10)、(A.12) は自動的に満たされる。(A.11) を仮定して、(A.13)、(A.14) について考察する。

相似変換: $x \longmapsto \kappa x$ $(\kappa \in \mathbb{R})$ の効果を考慮すると次を得る。

(1) $p \geqq 3$ のとき、

$B(0,0)$ $\Rightarrow$ (A.13)、(A.14) は満たされる。

(2) $p = q = 2$, $r = 1$ のとき、

$B(0,0) \notin \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ $\Rightarrow$ (A.13)、(A.14) は満たされる。

注12. 次のような $\mathbb{R}^2$ の作用素を考える。

$$P = (\partial_t - t^l D_x)^2 - t^m B(t,x) D_x + C(t,x),$$

但し、$B, C \in C^\infty(U)$。中根[10]は、$m > l-1$ ならば一意性が成り立つことを示した。更に、本研究集会の講演において、大鍛治氏は $m \geqq l-1$ のとき、及び渡辺氏は $m < l-1$ でも $B(t,x) \geqq 0$ のとき、一意性が成り立つことを示した。従って、仮定 (A.11)、(A.13)、(A.14) は必要不可欠なものである。

さて、残る $k = \dfrac{prl + (p-q)m}{p-q+r}$ のときを考えよう。

定理6. (A.11)、(A.12) と、

(A.15) $\quad k = \dfrac{prl + (p-q)m}{p-q+r}$

を仮定する。更に、$\xi^0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ と $\{B(0,0,\xi^0) - A(0,0,\xi^0)\}^{1/p}$ の

分枝 $D(\xi^0)$ が存在して次をみたすとする。

(A.16) $\quad \mathrm{Re}\, C(0,0,\xi^0) + \mathrm{Re}\, D(\xi^0) > 0$

(A.17) $\quad p\,\mathrm{Re}\, C(0,0,\xi^0) + \mathrm{Re}\left\{\left(\dfrac{(p-q+r)(m-k)\,A(0,0,\xi^0)}{B(0,0,\xi^0)-A(0,0,\xi^0)} + q - r\right) D(\xi^0)\right\} < 0$。

このとき定理1と同じ結論が従う。

注13. (A.15) は $R_4$ が直線 $\overline{R_2R_3}$ の上にあることを示している。

さて、ここで、§1の結果にせよ、§2の結果にせよ、何故、このような作用素を考えたかについて一言しておこう。そもそも筆者の頭にあったのは Pliś [13] の次の有名な結果である。

定理(Pliś). $P$ を $\mathbb{R}^2$ の、次の様な作用素とする。

$$P = (\partial_t - i\partial_x)^p + t^k (i\partial_x)^q - (i\partial_x)^{q-1}$$

但し、$\frac{1}{2}(p+3) < q \leq p$ とする。次を仮定する:

$$k > \frac{p-1}{2q-p-3}\text{。}$$

このとき、定理1と同じ結論が従う。

筆者は、この定理の $k$ に対する仮定に興味を持ち、その意味を把みたかったのである。(もっとも、この定理は、楕円型作用素でも一意性が破れることがある例を作ることによって当時流布していた予想を打ち砕いた所に最大の意義があるのであろうが)。この定理の意味を解すべく、筆者は次の結果

を出した（中根[10]参照）。

**定理7.** $P$ を $\mathbb{R}^2$ の次の様な作用素とする：

$$P = (\partial_t - it^l\partial_x)^p + t^k(i\partial_x)^q - t^m(i\partial_x)^{q-r}$$

但し、$p, q, r, k, m, l \in \mathbb{N}$，$r \le q \le p$ とする。以下に述べる仮定の下で定理1と同じ結論が従う。

(1) $p > q$ のとき．

$$k - \frac{r(pl-k)}{p-q} \leqq m < k - \frac{r(k+p)}{q}$$

or $q \geqq \frac{p+1}{2}$, $k < q(l+1) - p$, $m < k - \frac{r(pl-k)}{p-q}$

or $\begin{cases} q > \frac{p+1}{2}, & k \geqq q(l+1) - p, \\ m < k + \frac{r(pl+l+1-p-2k)}{2q-p-1} \end{cases}$

or $q < \frac{p+1}{2}$

$$k + \frac{r(pl+l+1-p-2k)}{2q-p-1} < m < k - \frac{r(pl-k)}{p-q}$$

(2) $p = q$ のとき

$k \le pl$, $m < k - \frac{r(k+p)}{p}$

or $k > pl$, $m < k + \frac{r(pl+l+1-p-2k)}{p-1}$。

定理4、5、6と定理7とは，同じ作用素を扱っているにも拘らず，結果は必ずしも一致していない。どちらか一方の方がすぐれているというわけでもない。これは手法が違うこと，及び，目のつけ所が違うことから来ると思われる。特に定理7の様にな仮定に関しては，筆者には全く謎であり，そ

もそも、どれ程の意味があるのかもわからない。この定理の解釈も今後の課題である。

## §3. 証明に関する注意

定理の証明は一切省略する。詳しくは最後の文献を参照されたい。定理1〜3は中根[11]，定理4〜6は中根[12]，定理7は中根[10]に納められている。その代りにここで証明の方針と若干のコメントを加える。序で、非一意性に関して、最近新しい方法が開発されたと述べたが、その方法と旧来の方法とを比較検討してみたい。新しい方法というのは幾何光学の方法を用いるもので、Hörmander [4] が最初にその方法を取り入れたのを、Alinhac や Zuily 達が更に改良を加えたものである。彼らの方法については、Alinhac-Zuily [1]、Lascar-Zuily [7]，Zuily [20] を参照されたい。

さて、非一意性の証明であるが、

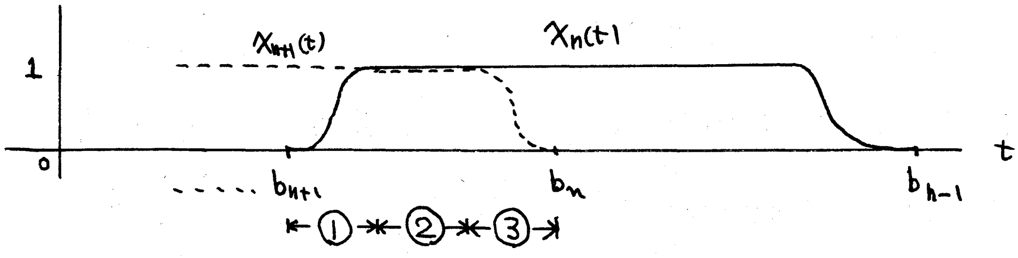
$$Pu - fu = 0, \qquad (0,0) \in \operatorname{supp} u \subset \{t \geqq 0\}$$

を満たす $C^\infty$-函数 $u$、$f$ を次の形で構成する。

$$u(t,x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n \geqq n_0} \chi_n(t)\, u_n(t,x) & t > 0 \\ 0 & t \leqq 0 \end{cases}$$

$$f(t,x) = \begin{cases} Pu/u & t > 0 \\ 0 & t \leqq 0. \end{cases}$$

ここで$\chi_n(t)$は cut function で、上の$u$の和が$t>0$で局所有限和となっている。具体的には $b_n = n^{-\rho}$ ($\rho>0$：適当にとる) として、




のようなグラフで表わされるものである。(実線が$\chi_n$の、破線が$\chi_{n+1}$のグラフ)。そして、これが一番重要なのだが、$u_n$をうまく作ることによって、$u$と$f$が$C^\infty$になるようにするのである。$u_n$はもちろん$C^\infty$にとるので、$u$の$C^\infty$性が怪しいのは$t=0$のみであり、$f$の$C^\infty$性が問題になるのは$t=0$と$u=0$となるところである。

$u$が$t=0$で$C^\infty$になるためには、$\{u_n\}$が$n$に関して急減少、即ち$\forall K, \forall (j,\alpha)\in \mathbb{N}^{d+1}$に対し

(1) $\quad |\partial_t^j \partial_x^\alpha u_n| \le C_{j,\alpha,K}\, n^{-K}$

となっていればよい。

同様に、$f$が$t=0$で$C^\infty$になるためには$\{f_n = \frac{Pu_n}{u_n}\}$が$n$に関して急減少になっている必要がある。

(2) $\quad |\partial_t^j \partial_x^\alpha f_n| \le C_{j,\alpha,K}\, n^{-K}$ 。

$b_{n+1} \le t \le b_n$ では、$f = \dfrac{P(\chi_{n+1}u_{n+1} + \chi_n u_n)}{\chi_{n+1}u_{n+1} + \chi_n u_n}$ となっており、

この分母が消えないという保障はない。しかも、$x_n, x_{n+1}, u_n, u_{n+1}$ 達が相互に影響し合うので、必ずしも $\{f_n\}$ が $n$ に関して急減少だからといって、$f$ が $t=0$ で $C^\infty$ になるとも限らない。

そこで $[b_{n+1}, b_n]$ を、$x_n, x_{n+1}$ の値に応じて、前頁の図のように、3つの区間に分けて、

$$(3)\begin{cases} \text{区間①}\ (\text{i.e. } x_{n+1}=1)\ \text{では}\quad |u_{n+1}| \gg |u_n| \\ \text{区間③}\ (\text{i.e. } x_n=1)\ \text{では}\quad |u_{n+1}| \ll |u_n| \end{cases}$$

となる様にすれば、区間①では $f \sim \frac{Pu_{n+1}}{u_{n+1}} = f_{n+1}$、③では $f \sim \frac{Pu_n}{u_n} = f_n$ となって具合がよいであろう。また、(3)より明らかに区間①と③では $f$ の分母は消えないのでこれまた調子がいい。さて、残るは区間②であるが、ここでは

$$f = \frac{Pu_n + Pu_{n+1}}{u_n + u_{n+1}} = \frac{f_n u_n + f_{n+1} u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}}$$

となり、$f_n, f_{n+1}$ のお陰で $n$ に関しては急減少であろうが、$|u_n| \sim |u_{n+1}|$ 故、分母が0になる可能性がある。そこで、思いきって分母が0になるべき所を指定してしまう。つまり、

(4) $(b_{n+1}, b_{n-1})$ で $\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|$ は単調増加になる

様にしよう。そうすれば、$|u_n| = |u_{n+1}|$、従って $u_n + u_{n+1} = 0$ となり得る所は唯1つの超平面になる。そして、この超平面上では分子が flat になる様に、$u_n$ を修正する。この修正は、Whitney の extension theorem を用いて可能になる。

逆に(1)〜(4)を満たす様に$\{u_n\}$を作れば、$u$と$f$の$C^\infty$性が示される。

非一意性の証明は、Cohen, Plis の時代から、一貫して、この(1)〜(4)を満たす様な$\{u_n\}$をつくるという方針の下で進められてきた。ただ、Cohen [2], Plis [13], Leray [8] では、$\{u_n\}$として、$Pu=0$の真の解の列をとっていた（つまり、$f_n=0$）。このときは区間②で$f=0$と定義すればよいので、(4)を言う必要はないが、その代り、(3)の評価を出すのが困難になってくる。非一意性の研究が遅れた原因は、(3)をみたすような$Pu=0$の真の解の列$\{u_n\}$をつくることが難しかったからではないだろうか。確かに(3)の様な評価は見慣れないものである。

この困難は、Hörmander [4]によって乗り越えられた。即ち、彼は$u_n$を$Pu=0$の真の解にすることを放棄し、漸近解で置き換えた。漸近解ならば、幾何光学の方法によって、比較的容易に構成できる！ Alinhac や Zuily 達は、Hörmander の方法を更に発展させて、かなり一般的な作用素に対し、非常にsharpな結果を出せるようにした。ただ、彼らは多重度が高々2の場合を主要に扱っており、より多重度が高い場合に対しては十分に扱われていない。筆者の結果は、その様な場合を扱ったものであり、このときは、phase function の構成が

より複雑になる。

実際に，$u_n$ をどんな形で求めるかというと，定理１では，

$u_n(t,x) = e^{i\tau_n \xi^0 x}\, e^{\phi(\frac{t}{b_n},x,b_n)}\, e^{-\gamma_n(x)}\, w_n(\frac{t}{b_n},x)$，

定理５，６では，

$$u_n(t,x) = \exp\{i\tau_n(\xi^0 x - \tfrac{i}{\ell+1}(t^{\ell+1}-b_n^{\ell+1}))\}\, e^{\phi(\frac{t}{b_n},x,b_n)} \times e^{-\gamma_n(x)}\, w_n(\tfrac{t}{b_n},x)$$

という形にする。ただし，$b_n = n^{-\rho}$，$\tau_n = n^{d_0}$，$d_0>0$ $\rho>0$。

$\{u_n\}$ を求めるために，discrete parameter $n$ を連続 parameter $\delta = b_n$ におきかえる。$t=\delta s$ として

$$u_n(t,x) = u(\tfrac{t}{b_n},x,b_n)$$

となるように $u = u(s,x,\delta)$ を次の形につくる。

$$u(s,x,\delta) = e^{i\tau\xi^0 x}\, e^{\phi(s,x,\delta)}\, e^{-\gamma(x,\delta)}\, w(s,x,\delta) \qquad (定理１)$$

$$u(s,x,\delta) = \exp\{i\tau(\xi^0 x - \tfrac{i}{\ell+1}(t^{\ell+1}-\delta^{\ell+1}))\}\, e^{\phi(s,x,\delta)}\, e^{-\gamma(x,\delta)} \times w(s,x,\delta) \qquad (定理５，６)$$

そして $u$ は当然

$$Pu \sim 0, \qquad \delta\to 0$$

に求めるわけである。因みに，$\xi^0 x$，$\xi^0 x - \frac{i}{\ell+1}(t^{\ell+1}-\delta^{\ell+1})$，$\phi$ は phase-functions であり，$\gamma$ は normalization term，$w$ は Transport equations を解いて構成する amplitude function である。

References.

[1] S. Alinhac - C. Zuily, Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles, Comm. P.D.E. 6 (1981), 799-828.

[2] P. Cohen, The non-uniqueness for the Cauchy problem, O.N.R. Techn. Report 93 Stanford, 1960.

[3] M. Damlakhi - C. Zuily, On the uniqueness of the Cauchy problem, J. Diff. Eq. 45 (1982), 307-316.

[4] L. Hörmander, Non-uniqueness for the Cauchy problem, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 459 (1975), 36-72.

[5] K. Igari, An admissible data class of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic operators, J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981), 351-373.

[6] V. Ja. Ivrii, Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey class, Sib. Mat. Zh., 17 (1976), 1256-1270.

[7] R. Lascar - C. Zuily, Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs differentiels à caractéristiques doubles, Duke Math. J., 49 (1982), 137-162.

[8] J. Leray, Equations hyperboliques non strictes : contre-exemples du type de Giorgi, aux théorèmes d'existence et d'unicite, Math. Ann., 162 (1966), 228-236.

[9] W. Matsumoto, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations with multiple characteristic roots, J. Math. Kyoto Univ., 15 (1975), 479-525.

[10] S. Nakane, Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate type, to appear in J. Diff. Eq.

[11] S. Nakane, Non-uniqueness in the Cauchy problem for partial differential operators with multiple characteristics I, preprint.

[12] S. Nakane, ibid. II, preprint.

[13] A. Plis, A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 599-617.

[14] G. Roberts, Uniqueness in the Cauchy problem for characteristic operators of Fuchsian type, J. Diff. Eq. 38 (1980), 374-392.

[15] W. Strauss - F. Treves, First order linear pde's and uniqueness of the Cauchy problem, J. Diff. Eq., 15 (1974), 195-209.

[16] H. Uryu, Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and its applications, Tokyo J. Math., 5 (1982), 117-136.

[17] K. Watanabe, Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques dégénérées, Tohoku Math. J., 34 (1982), 239-249.

[18] M. Zeman, On the uniqueness of the Cauchy problem for partial differential operators with multiple characteristics, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Ser 4, 7 (1980), 257-285.

[19] C. Zuily, Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs differentiels, Comm. P.D.E., 6 (1981), 153-196.

[20] C. Zuily, Lectures on uniqueness and non uniqueness of the non characteristic Cauchy problem, Universidade Federal de Pernambuco, Instituto de Matematica, Notas de Curso (1981).