数理解析研究所講究録
第531巻 1984年 33-53

2階放物型特異境界値問題.

On Singular Initial-Boundary Value Problems for Second Order Parabolic Equations.

京大理　寺門正道 Masamichi Terakado.

1. 序

[1]で、S.Itô は次の放物型方程式の初期境界値問題を論じた。

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{cases}
\partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega \\
\alpha(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial n} + (1-\alpha(t,x))u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\
\quad \text{ここで、} \dfrac{\partial u}{\partial n} \text{は、} \partial\Omega \text{上の外向き単位法線微分。} & \\
\quad \text{また、} 0 \leqq \alpha(t,x) \leqq 1\text{。} & \\
u|_{t=0} = u_0 &
\end{cases}
$$

彼は、積分核を構成する事により、上の問題の一意可解性、及び解の性質を論じた。さらにラプラス変換により、楕円型方程式の境界値問題についても同様の結果を得た。

後になって、上の問題の境界条件を楕円型で考えた場合について、関数解析的取扱により議論する論文もあらわれた([3],[4],[5],[6])。その中には、境界条件を Oblique derivative

に拡張したものもある。K. Taira ([7]) は、境界条件の係数が t には依存しない場合に半群の理論を応用する方法で、S. Itô の問題を取扱い、一意可解性及び解のなめらかさ、に関する結果を得た。

最近になって、[1]をS. Mizohataと議論していた時、論文中の鍵となる補題の証明が明快ではない事を 筆者が指摘した。これが1つの契機となって、この問題をもう一度論ずることにしたのである。

Mizohata ([8]) は次の設定の下でこの問題を論じた。

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega$$

ここで $a(x)$, $b(x)$ は実数値かつなめらかであり、その導関数は有界であるとする。$a^2(x) + b^2(x) = 1$ の形で正規化しておく。Ωは、$\mathbb{R}^2$ の半空間とする。

彼はこの設定の下で、(i) $a(x)$は符号を変えない。だから、$a(x) \geq 0$ と仮定する。 (ii) $a(x)$が 0 になる集合の上では $b(x) > 0$.
(i), (ii) が(P)の H^∞-well-posedness のための必要十分条件である事を示した。

この論文では、次の問題を議論する。

$$(\tilde{P}) \quad \left|\begin{array}{ll} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega \\ a(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial n} + b(t,x)u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 & \end{array}\right.$$

ここで Ω は $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n \mid x\in\mathbb{R}^{n-1},\ y>0,\ n\geqq 2\}$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=-\frac{\partial u}{\partial y}+\sum_{j=1}^{n-1}c_j(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{y=0}$$

上の問題を次の仮定の下で論ずる。

(i) $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c_j(t,x)$ $(1\leqq j\leqq n-1)$ は実数値かつ無限回微分可能でその導関数はすべて $[0,T]\times\mathbb{R}^{n-1}$ で有界。$a(t,x)$ は $\{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{n-1} \mid |x|\geqq M>0,\ M\text{は定数}\}$ の上では定数であるとする。即ち遠方での挙動を制限する。

(ii) $a(t,x)^2+b(t,x)^2=1$, の形で正規化した時、$a(t,x)\geqq 0$, かつ、$A_0=\{(t,x) \mid a(t,x)=0\}$ の上では $b(t,x)>0$.

問題(P)を上の仮定の下で考えた時、次の定理を得る。

定理. $\dot{\mathcal{B}}^r(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ に属し、かつ整合条件を満たす任意の u_0 に対して、問題(P)の一意解が存在する。その解の存在と一意性は $\dot{\mathcal{B}}^r([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})$ の中で考えるものとする。また、次の評価を得る。$|u(t,x,y)|_{r,T}\leqq C(r,T)|u_0(x,y)|_r$, $r=0,1,2,\cdots$.

ここで、上に現れた函数空間、及び、ノルムの定義は次の通り。

$\dot{\mathcal{B}}^r(\overline{\mathbb{R}^n_+})=\{\varphi(x,y)\in C^r(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \mid |\partial_x^\alpha\partial_y^k\varphi(x,y)|\longrightarrow 0\ (|x|+|y|\to\infty)\quad |\alpha|+k\leqq r\}$

$\varphi\in\dot{\mathcal{B}}^r(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ に対して, $|\varphi|_r=\sum_{|\alpha|+k\leqq r}\sup_{(x,y)\in\overline{\mathbb{R}^n_+}}|\partial_x^\alpha\partial_y^k\varphi(x,y)|$.

$$\dot{\mathcal{B}}^r([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})=\Big\{\varphi(t,x,y)\in C^0([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})\ \Big|\ \partial_t^j\partial_x^\alpha\partial_y^k\varphi(t,x,y)\in C^0([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})$$

$$2j+|\alpha|+k\leqq r,\ \text{かつ}\ \sup_{0\leq t\leq T}|\partial_t^j\partial_x^\alpha\partial_y^k\varphi|\to 0\ (|x|+|y|\to\infty)\Big\}$$

$\varphi\in\dot{\mathcal{B}}^r([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})$ に対して、$\displaystyle |\varphi|_{r,T}=\sum_{2j+|\alpha|+k\leq r}\ \sup_{\substack{0\leq t\leq T\\(x,y)\in\mathbb{R}^n_+}}|\partial_t^j\partial_x^\alpha\partial_y^k\varphi(t,x,y)|$

注意　我々が取扱った境界条件は、S. Itô のそれを含む。我々の主な目的は、特異境界条件 $a(t,x)\geqq 0$, の下での解の一意的存在、及び、なめらかさ、を議論することであった。我々は、境界条件以外のものをすべて理想的条件の下で取扱った。これは証明の基本的な原理を明快にさせるためである。

ところで、我々の初期境界値問題は拡散問題とみなすことができる。S. Itô はこの観点から彼の問題を取扱ったのである。具体的な現象への応用においては、上のような C^∞ 関数のわくだけでなく、係数のなめらかさについて弱い仮定の下で議論がなされることにも興味がもたれる。筆者は Appendix. において、このような設定の下での結果を与えた。

最後に、筆者は溝畑茂教授に謝意を表したい。教授の激励がなかったならば、この論文があらわれることはなかったであろう。

以下での証明においては、紙数の関係もあって、しばしば証明が省略されるであろう。詳細は、[9]を参照されたい。

2. Fourier-Laplace transformation.

最初に、この節で使われる記号の定義を与える。

2.1. $\Sigma_0 = \{ (p,\sigma) \in C^1 \times C^{n-1} \mid \mathrm{Re}\,p > -\varepsilon_0 |\mathrm{Im}\,p| - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{n-1} |\mathrm{Re}\,\sigma_j|^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} |\mathrm{Im}\,\sigma_j|$

$L_{\sigma,a} = \{ (p,\sigma) \in C^1 \times C^{n-1} \mid \mathrm{Re}\,p = -\varepsilon_0 |\mathrm{Im}\,p| - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{n-1} |\mathrm{Re}\,\sigma_j|^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} |\mathrm{Im}\,\sigma_j|^2 + a,\ a > 0 \}$

ここで、ε_0は小さな正数。

2.2 $A(\Sigma_0) = \{ g(p,\sigma) \mid g$ はΣ_0の中で定義された holomorphic functi

2.3 $K_T(\Sigma_0) = \{ g(t,\tau,x,\varsigma,p,\sigma) \mid g \in C^\infty([0,T]_t \times [0,T]_\tau \times R_x^{n-1} \times R_\varsigma^{n-1})$

$\cap A(\Sigma_0) \}$

2.4 $K_{\rho\delta}^m(T) = \{ g \in K_T(\Sigma_0) \mid |\partial_t^{r_1} \partial_\tau^{r_2} \partial_x^{\alpha_1} \partial_\varsigma^{\alpha_2} \partial_p^{\beta_1} \partial_\sigma^{\beta_2} g(t,\tau,x,\varsigma,p,\sigma)|$

$\leq C(T, r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)(|p|^{\frac{1}{2}} + |\sigma| + a^{\frac{1}{2}})^{m+\delta(r_1+r_2+|\alpha_1|+|\alpha_2|)-\rho(|\beta_1|+|\beta_2|)}$

on $[0,T]^2 \times R^{2n-2} \times L_{\sigma,a}$ $(a > cT^{-1},\ c > 0)\}$

ここで $0 \leq \delta < \rho \leq 1$.

この節では$K_{\rho\delta}^m(T)$に属する元の Fourier-Laplace 逆像のもつ性質を調べる。

Kを次の様に定義する。任意の$g \in K_{\rho\delta}^m(T)$に対して、

$$K(t,\tau,x,\varsigma) = \lim_{s\to+0} K_s(t,\tau,x,\varsigma)$$

$$= \lim_{s\to+0} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{R^{n-1}} e^{i(x-\varsigma)\cdot\sigma} d\sigma \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\,p=1} e^{p(t-\tau)} g(t,\tau,x,\varsigma,p,\sigma) e^{-\sqrt{p+\sigma^2}\, s} dp$$

さらに、次の様な記号も導入しておく。

$\sigma[K(t,\tau,x,\varsigma)] = g(t,\tau,x,\varsigma,p,\sigma)$

$\sigma[K_s(t,\tau,x,\varsigma)] = g(t,\tau,x,\varsigma,p,\sigma)\, e^{-\sqrt{p+\sigma^2}\, s}$

この時、次の評価を得る。

Lemma 1.　$g \in K_{ps}^{m}(T)$ である事を仮定する。この時、次の２つの評価を得る。

(I) $|K_s(t,\tau,x,\zeta)| \leqq C(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(n+1+m)} e^{-c\frac{|x-\zeta|^2}{t-\tau}-c\frac{s^2}{t-\tau}}$

(II) $|\partial_t^{r_1}\partial_\tau^{r_2}\partial_x^{\alpha_1}\partial_\zeta^{\alpha_2} K_s(t,\tau,x,\zeta)| \leqq C(T)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(n+1+m+2r_1+2r_2+|\alpha_1|+|\alpha_2|)}$
$$\times e^{-c\frac{|x-\zeta|^2}{t-\tau}-c\frac{s^2}{t-\tau}}$$

ここで、$0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq \tau < t \leqq T,\ 0 < c$.

証明.　~~概略~~を述べる。$K_s(t,\tau,x,\zeta)$ の定義中の積分路 $Re\,p=1$ は、収束因子 $e^{-\sqrt{p+\sigma^2}\,s}$ の存在により、$L_{\sigma,a}$ に変えることができる。次の積分を考える。

$$k_s(t,\tau,x,\zeta,\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\sigma,a}} e^{p(t-\tau)} g(t,\tau,x,\zeta,p,\sigma) e^{-\sqrt{p+\sigma^2}\,s}\,dp$$

積分路 $L_{\sigma,a}$ の上で上の被積分関数を評価すれば、次を得る。

$$|k_s| \leqq \exp\left\{-\varepsilon_0\sum_{j=1}^{n-1}|Re\,\sigma_j|^2(t-\tau)+\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n-1}|Im\,\sigma_j|^2(t-\tau)+a(t-\tau)-d_1 a^{\frac{1}{2}}s\right\}$$
$$\times c\int_0^\infty e^{-\varepsilon_0\lambda(t-\tau)}(\lambda^{\frac{1}{2}}+|\sigma|+a^{\frac{1}{2}})^m d\lambda.$$

$a\ (>cT^{-1})$ が任意にとり得る事を利用して、適当に定義すれば、次を得る。

$$|k_s| \leqq c(t-\tau)^{-\frac{m}{2}-1}\exp\left\{-\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{j=1}^{n-1}|Re\,\sigma_j|^2(t-\tau)+\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n-1}|Im\,\sigma_j|^2(t-\tau)-d_2\frac{s^2}{t-\tau}\right\}$$
$$(d_2>0)$$

さらに $k_s(t,\tau,x,\xi,\sigma)$ が $s>0$ の時、σ についての holomorphic function (in $\mathbb{C}^{n-1}$) である事が容易に確認できる事より、実軸上で定義された次の積分、

$$K_s(t,\tau,x,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{R^{n-1}} e^{i(x-\xi)\cdot\sigma} k_s(t,\tau,x,\xi,\sigma)\,d\sigma$$

の積分路を適当に $\mathbb{C}^{n-1}$ の中で平行移動させる事により、最終的に求める評価が得られるのである。((I)の証明終)

(II)に関しては、K_s を形式的に微分した時に得られる新しいシンボル $\hat{g}\,(=\sigma[\partial_t^{r_1}\partial_\tau^{r_2}\partial_x^{\alpha_1}\partial_\xi^{\alpha_2}K_s(t,\tau,x,\xi)])$ の属するクラスを調べ、積分路 $L_{\sigma,a}$ の与え方に注意して適当に評価を整える事により、(I)に帰着させることができる。((II)の証明終)

上の評価に現れる定数がすべて s には無関係である事より $s=0\,(=+0)$ における評価も得られる。(Lemma 1 の証明終)

さて、上の結果を使って、次の積分変換を定義する。

$$K_s\varphi=K_s\varphi(t,x)=\int_0^t\!\!\int_{R^{n-1}} K_s(t,\tau,x,\xi)\varphi(\tau,\xi)\,d\tau\, d\xi$$

$$K\varphi=\lim_{s\to+0}K_s\varphi$$

さらに、このシンボルを次の様に書く。

$$\sigma[K]=\sigma[K(t,\tau,x,\xi)]=g(t,\tau,x,\xi,p,\sigma)\in K^m_{p\xi}(T).$$

上の積分変換を考える函数空間として次の定義を用意する。

2.5 $\dot{\mathcal{B}}^r_0(T) = \{\varphi(t,x) \in \dot{\mathcal{B}}^r([0,T]\times \mathbb{R}^{n-1}) \mid \partial_x^\alpha \partial_t^k \varphi\big|_{t=0} = 0 \ (2k+|\alpha| \leq r)\}$

2.6 $L(\dot{\mathcal{B}}^r_0(T), \dot{\mathcal{B}}^r_0(T)) = \{ G \mid G$ は $\dot{\mathcal{B}}^r_0(T)$ から $\dot{\mathcal{B}}^r_0(T)$ への有界線型作用素$\}$

Lemma 2. $\sigma[K] \in K^{-m}_{\rho s}(T)\ (m>0)$ を仮定する。この時 $K \in L(\dot{\mathcal{B}}^0_0(T), \dot{\mathcal{B}}^0_0(T))$ が従う。

証明 $s>0$ の時 $K_s\varphi(t,x)$ が t, x の関数として連続である事は、$K_s\varphi$ の定義、及び Lemma 1 の結果より直ちに従う。

$$K_s(t,\tau,x,\xi) - K_{s'}(t,\tau,x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int e^{i(x-\xi)\cdot\sigma}d\sigma \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\sigma,a}} e^{p(t-\tau)}$$

$$\times g(t,\tau,x,\xi,p,\sigma)\left(e^{-\sqrt{p+\sigma^2}(s-s')}-1\right)e^{-\sqrt{p+\sigma^2}s'}dp$$

ここで $0<s'<s\leq 1,\quad 0\leq\tau<t_0\leq T \quad x, \xi\in\mathbb{R}^{n-1}$

上を評価すると次を得る。

$$|K_s(t,\tau,x,\xi) - K_{s'}(t,\tau,x,\xi)| \leq C(s-s')^\gamma (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(n+1-m+\gamma)} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}$$

$$(0<\gamma<m)$$

この評価を使えば

$$|K_s\varphi(t,x) - K_{s'}\varphi(t,x)| \leq c(s-s')^\gamma T^{\frac{m-\gamma}{2}} |\varphi|_{0,T} \quad (0\leq t\leq T,\ x\in\mathbb{R}^{n-1})$$

を得る。この評価により、$K_s\varphi \to K\varphi$ は $[0,T]\times\mathbb{R}^{n-1}$ 上での一様収束である事が従う。これより $K\varphi$ が well-defined であること、及び $K\varphi\in\dot{\mathcal{B}}^0_0(T)$, かつ、$|K\varphi|_{0,T}\leq C(T)|\varphi|_{0,T}$ が従う。

(Lemma 2 の証明終)

3. Regularities.

Lemma 3. $\sigma[K] \in K^{-m}_{\rho\delta}(T)$ $(m>0)$ を仮定する。この時、$K \in L(\dot{B}^{2r}_0(T), \dot{B}^{2r}_0(T))$ $(r=0,1,2,3,\cdots)$ が従う。

証明. 次の特別な場合についてだけ考える。

$\sigma[K] = g(t, x, p, \sigma)$ (即ち、シンボルは τ, ξ に無関係な場合)

次の恒等式を使う。

$$e^{i(x-\xi)\cdot\sigma} e^{p(t-\tau)} = (-\partial_\tau - \Delta_\xi) \frac{e^{i(x-\xi)\cdot\sigma} e^{p(t-\tau)}}{p+\sigma^2}$$

これを使えば、

$$K_S(t,\tau,x,\xi) = (-\partial_\tau - \Delta_\xi) K_{S(2)}(t,\tau,x,\xi)$$

ここで、$\sigma[K_{S(2)}(t,\tau,x,\xi)]\Big|_{s=0} = \dfrac{g(t,x,p,\sigma)}{p+\sigma^2} \in K^{-m-2}_{\rho\delta}(T)$

ゆえに

$$K_S\varphi = \int_0^t\int_{R^{n-1}} (-\partial_\tau - \Delta_\xi) K_{S(2)}(t,\tau,x,\xi)\,\varphi(\tau,\xi)\,d\tau d\xi$$

$$= \int_0^t\int_{R^{n-1}} K_{S(2)}(t,\tau,x,\xi)\,(\partial_\tau - \Delta_\xi)\varphi(\tau,\xi)\,d\tau d\xi$$

部分積分において $\varphi(\tau,\xi)\Big|_{\tau=0} = 0$ を使った。

$\varphi \in \dot{B}^{2r}_0(T)$ である事より、上の変形を繰り返し施せば、

$$K_S\varphi = \int_0^t\int_{R^{n-1}} K_{S(2r)}(t,\tau,x,\xi)\,(\partial_\tau - \Delta_\xi)^r\varphi(\tau,\xi)\,d\tau d\xi$$

ここで $\sigma[K_{S(2r)}(t,\tau,x,\xi)]\Big|_{s=0} = \dfrac{g(t,x,p,\sigma)}{(p+\sigma^2)^r} \in K^{-m-2r}_{\rho\delta}(T)$.

$\sigma[K_{S(2r)}]\Big|_{s=0} \in K^{-m-2r}_{\rho\delta}(T)$ より、$\partial_t^\alpha \partial_x^\beta K_S\varphi \in \dot{B}^0_0(T)$ が従う。$(2\alpha+|\beta| \leq 2r)$

すると、Lemma 2. の議論より、$K\varphi \in \dot{\mathcal{B}}_0^{2r}(T)$ が得られる。

(Lemma 3 の証明終)

さて、通例のように K の反復を次のように定義する。

$$K^j\varphi = K(K^{j-1}\varphi) \quad (j=1,2,3,\cdots) \quad (K^0=I)$$

この時、次の Lemma を得る。

Lemma 4. $\sigma[K] \in K_{\rho\delta}^{-m}(T)$ $(m>0)$ を仮定する。この時、$K^j \in L(\dot{\mathcal{B}}_0^{2r}(T), \dot{\mathcal{B}}_0^{2r}(T))$ であり、$|K^j\varphi|_{2r,T} \le C(2r)\, T^{mj} C^j \times \Gamma(\frac{m}{2})^j \Gamma(\frac{(j+1)}{2}m)^{-1} |\varphi|_{2r,T}$

証明略。

Corollaly 4.1 $\sigma[K] \in K_{\rho\delta}^{-m}(T)$ $(m>0)$ を仮定する。この時 $\sum_{j=1}^{\infty} K^j \in L(\dot{\mathcal{B}}_0^{2r}(T), \dot{\mathcal{B}}_0^{2r}(T))$ が従う。

証明略。

さて、後の節において、とりわけ次のシンボルを考察する。

$$g_0(t,\tau,x,\xi,\rho,\sigma) = \frac{a(t,x)\left(\sqrt{\rho+\sigma^2} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t,x)\, i\sigma_j\right) + b(t,x)}{a(\tau,\xi)\left(\sqrt{\rho+\sigma^2} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(\tau,\xi)\, i\sigma_j\right) + b(\tau,\xi)} - 1$$

g_0が属するクラスについて次がなりたつ。

Lemma 5. a, b, c_j に関しては「序」での(A)を仮定する。この時、適当に小さな $T>0$ をとれば $g_0\in K^{-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2}}(T)$ を得る。

注意. 上での「適当に小さな $T>0$」という仮定は、後の節での応用に際しては重大な制限にはならない。任意の $\tilde{T}>0$ に対して我々の初期境界値問題を考える時には、有限回の接続を行なえばよいのである。

証明. 次の特別な場合だけを調べる。

$$\tilde{g}_0(t,\tau,x,\xi,\rho,\sigma)=\frac{\alpha(t,x)\sqrt{\rho+\sigma^2}+1-\alpha(t,x)}{\alpha(\tau,\xi)\sqrt{\rho+\sigma^2}+1-\alpha(\tau,\xi)}-1$$

ここで、$0\leqq\alpha(t,x)\leqq 1$ かつ、αは無限回微分可能で、その任意階導関数は $[0,T]\times R^{n-1}$ で有界、を仮定する。

テイラー展開を使って $\tilde{g}_0$ を変形すれば

$$\tilde{g}_0=\frac{\partial_\tau\alpha(\tau,\xi)(t-\tau)+\nabla_\xi\alpha(\tau,\xi)\cdot(x-\xi)}{\alpha(\tau,\xi)\sqrt{\rho+\sigma^2}+1-\alpha(\tau,\xi)}\sqrt{\rho+\sigma^2}+\text{lower term}.$$

非負関数についてよく知られた評価、

$$|\partial_\tau\alpha(\tau,\xi)|,\ |\nabla_\xi\alpha(\tau,\xi)|\leqq C\alpha^{\frac{1}{2}}(\tau,\xi)$$

を使って $\tilde{g}_0$ を $L_{\delta,a}$ の上で評価すれば、

$$|\tilde{g}_0| \le C \max(1, T^{\frac{1}{4}})(|p|^{\frac{1}{2}} + |\sigma| + a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}((t-\tau) + |x-\xi|)$$

を得る。

この評価は $\tilde{g}_0 \in K^{\frac{1}{2}}(T)$ を示しているが、Lemma 1 の評価にあらわれる $e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}$ の下においては $|x-\xi| \sim (t-\tau)^{\frac{1}{2}}$ に注意すると $\tilde{g}_0 \in K^{-\frac{1}{2}}(T)$ となる。この証明は部分積分によって、直接証明することもできる。$\tilde{g}_0 \in K^{-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2}}(T)$ に関しては、$\partial_t^{r_1}\partial_\tau^{r_2}\partial_x^{\alpha_1}\partial_\xi^{\alpha_2}\partial_p^{\beta_1}\partial_\sigma^{\beta_2}\tilde{g}_0$ について今と同様の評価をすればよい。(Lemma 5 の証明終)

4. 解の存在となめらかさ。

(4.1) 整合条件について。

我々の初期境界値問題の解が存在し、かつ次のクラスに属したとせよ。$u(t,x,y) \in \dot{\mathcal{B}}^{r}([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \dot{\mathcal{B}}^{r+1}((0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap C^{r+2}((0,T]\times\mathbb{R}^n_+)$

その時、解は次を満足させねばならない。

$$0 = \partial_t^j(\mathcal{B}u|_{y=0})|_{t=0} = (\partial_t^j(\mathcal{B}u)|_{t=0})|_{y=0}$$

$$= \Big\{\sum_{0\le k\le j} {}_jC_k\ \partial_t^{j-k}(\mathcal{B})\ \partial_t^k u|_{t=0}\Big\}\Big|_{y=0} \qquad \left(0 \le j \le \left[\tfrac{r-1}{2}\right]\right)$$

一方

$$\partial_t^k u(t,x,y)|_{t=0} = \Delta^k u_0(x,y) \qquad \text{in } \Omega.$$

であることより $\{t=0 \cap y=0\}$ において境界条件の係数と u_0 とが満たすべき次の関係式を得る。(整合条件)

$$\sum_{0\le k\le j} {}_jC_k\ \partial_t^{j-k}(\mathcal{B})|_{t=0}\ \Delta^k u_0|_{y=0} = 0 \qquad \left(0 \le j \le \left[\tfrac{r-1}{2}\right]\right)$$

ここで $\mathcal{B}u = a(t,x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(t,x)$, また、$r=0$ の時は、

$u_0(x,y)\Big|_{y=0} = 0$ on $\{x \mid a(0,x)=0\}$ を整合条件とする。

(4.2) 解の構成.

次の様な関数から、我々の初期境界値問題の解を捜したい。

$$u(t,x,y) = v_0(t,x,y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} U(t,\tau,x,\xi,y)\varphi(\tau,\xi)\,d\tau d\xi$$

ここで v_0, U は次の様に定義する。

v_0 の定義.

まず、u_0 を $\mathbb{R}^n$ に適当に拡張して $\tilde{u}_0 \in \mathcal{B}^r(\mathbb{R}^n)$ $\left(\tilde{u}_0\big|_{\overline{\mathbb{R}^n_+}} = u_0\right)$ かつ

$\sum_{|\alpha|+k\leq r} \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha \partial_y^k \tilde{u}_0(x,y)| \leq C(r)|u_0|_r$ とできる。

$$v_0(t,x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{e^{-\frac{|x-x'|^2+(y-y')^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}^{\,n}} u_0(x',y')\,dx' \quad \left(0\leq t,\ 0\leq y,\ x\in\mathbb{R}^{n-1}\right)$$

v_0 を上の式の右辺で定義する。u_0 が整合条件を満たす事に注意すれば 次の性質を示す事ができる。

(i) $v_0 \in \mathcal{B}^r([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})$

(ii) $\partial_t^j (\mathcal{B}v_0)\Big|_{t=0} = 0 \qquad \left(0 \leq j \leq [\frac{r-1}{2}]\right)$

(iii) $|\partial_x^\alpha \partial_t^j \mathcal{B}v_0(t,x) - \partial_x^\alpha \partial_t^j \mathcal{B}v_0(t',x')| \leq C(r)\left(|t-t'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-x'|^\gamma\right) t'^{-\frac{1+\gamma}{2}} |u_0|_r$

$0<t'<t<T,\quad 0<\gamma<1,\quad |\alpha|+2j \leq r+1$

(i) と (ii) より $\mathcal{B}v_0 \in \mathcal{B}_0^{r-1}\left([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1}\right)$ である事がわかる。

U の定義.

$U(t,\tau,x,\xi,y)$を次の様に定義する。

$$U(t,\tau,x,\xi,y)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int e^{i(x-\xi)\cdot\sigma}d\sigma\,\frac{1}{2\pi i}\int e^{p(t-\tau)}\frac{e^{-\sqrt{p+\sigma^2}\,y}\,dp}{a(\tau,\xi)\left(\sqrt{p+\sigma^2}+\sum_{j=1}^{n-1}c_j(\tau,\xi)i\sigma_j\right)+b(\tau,\xi)}$$

次の記号も導入しておく。

$$U\varphi=U\varphi(t,x,y)=\int_0^t\int_{R^{n-1}}U(t,\tau,x,\xi,y)\varphi(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi$$

我々は解を次の形から探したい。

$$u=v_0+U\varphi$$

ただし、$\varphi(\tau,\xi)$は$[0,T]\times R^{n-1}$上、Hölder連続かつ、$\mathring{B}_0([0,T]\times R^{n-1})$に属するものとする。この時、次のLemmaを得る。

Lemma 6. φが上の性質をもつ事を仮定する。この時、次の(i) (ii) (iii)を得る。

(i) $\partial_t u=\Delta u \qquad \text{in } \Omega$

(ii) $\mathcal{B}u=\mathcal{B}v_0+\frac{1}{2}\varphi(t,x)+K_0\varphi \qquad \text{on } \partial\Omega$

(iii) $u|_{t=0}=u_0$

ここで、$\sigma[K_0]=g_0$ (Lemma 5を見よ)

証明略.

Lemma 6の結果より、$\mathcal{B}u=\mathcal{B}v_0+\frac{1}{2}\varphi(t,x)+K_0\varphi=0$

とできれば、uが求める解である事がわかる。$\sigma[K_0]\in K^{-\frac{1}{2}}_{1,\frac{1}{2}}(T)$ より $\varphi=\sum_{j=0}^{\infty}(-2K_0)^j(-2\mathcal{B}v_0)$ が求めるφである。

(4.3) 解のなめらかさ。

(4.2)での議論により、次を得る。

Lemma 7. u_0は$\dot{\mathcal{B}}^r(\overline{\mathbb{R}^n_+})$に属し、かつ整合条件を満足させる事を仮定する。この時、$U\varphi\in\dot{\mathcal{B}}^r([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})\cap\dot{\mathcal{B}}^{r+1}((0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})\cap C^\infty((0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})$を得る。ここで $\varphi=\sum_{j=0}^{\infty}(-2K_0)^j(-2\mathcal{B}v_0)$

証明. 単純ではあるがわずらわしい計算により得られる。以下略。

以上の議論により、次の定理が得られた。

Existence Theorem. $\dot{\mathcal{B}}^r(\overline{\mathbb{R}^n_+})$に属し、かつ整合条件を満たす任意の$u_0$に対して、問題(P)の解が存在して、$\dot{\mathcal{B}}^r([0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})\cap\dot{\mathcal{B}}^{r+1}((0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})\cap C^\infty((0,T]\times\overline{\mathbb{R}^n_+})$ に属する。$(r=0,1,2\cdots)$ そして、$|u(t,x,y)|_{r,T}\le C(r,T)\,|u_0(x,y)|_r$ も得る。

5. 一意性

5.1 共役問題

次の問題を考える。

$$(\tilde{P})^* \begin{cases} -\partial_t v = \Delta v + h(t,x,y) & \text{in } \Omega \\ \mathcal{B}^* v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \\ v\big|_{t=T} = 0 \end{cases}$$

ここで $\mathcal{B}^* v = a(t,x)\left(-\partial_y v - \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t,x)\,\partial_{x_j} v\right) + \left(b(t,x) - a(t,x)\sum_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j} c_j(t,x)\right) v \Big|_{y=0}$

この時 $A_0 = \{(t,x) \mid a(t,x)=0\}$ の上では $b - a\sum \partial_j c_j > 0$.

Lemma 8. a, b, c_j は「序」の(A)を満たす事を仮定する。さらに、$h(t,x,y) \in C_0^\infty([0,T)\times R^n_+)$ であるとする。この時、$(\tilde{P})^*$の解 $v(t,x,y) \in \mathcal{B}^\infty([0,T]\times\overline{R^n_+})$ が存在する。

証明. 第4節の方法を用いて構成される。(Lemma 8 の証明終).

5.2 一意性.

Lemma 9. 次の $(\tilde{P}_0)$ の解が存在して次のクラスに属することを仮定する。$u(t,x,y) \in \mathcal{B}^r([0,T]\times\overline{R^n_+}) \cap \mathcal{B}^{r+1}((0,T]\times\overline{R^n_+}) \cap C^{r+2}((0,T]\times R^n_+)$。この時 $u(t,x,y)\equiv 0$ on $[0,T]\times\overline{R^n_+}$ である。

$$(\tilde{P}_0)\quad \left[\begin{array}{ll} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega. \\ \mathcal{B} u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \\ u\big|_{t=0} = 0 & \end{array}\right.$$

証明. u は $(\tilde{P}_0)$ の解とせよ。また v は Lemma 8 で構成された $(\tilde{P})^*$ の解であるとせよ。この時

$$\int_0^T\!\!\int_{R^n_+} (\partial_t - \Delta)u\, v\, dt\,dx\,dy - \int_0^T\!\!\int_{R^n_+} u(-\partial_t - \Delta)v\, dt\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D_0} \mathcal{B}u \frac{v}{a(t,x)}\, dt\,dx + \iint_{D_0} \frac{u}{a(t,x)} \mathcal{B}^* v\, dt\,dx + \int_{R^n_+} u\,v\,dx\,dy \Big|_{t=0}^{t=T}$$

ここで $D_0 = [0,T]\times R^{n-1}\setminus A_0$, $A_0 = \{(t,x) \mid a(t,x)=0\}$.

u, v の性質より、次を得る。

$$\int_0^T\!\!\int_{R^n_+} u(t,x,y)\, h(t,x,y)\, dt\,dx\,dy = 0 .$$

h は $C_0^\infty([0,T)\times R^n_+)$ に属する任意の関数であった事より $u(t,x,y)\equiv 0$ が従う。 (Lemma 9 の証明終).

Appendix.

この節では、拡散問題への応用を念頭において、我々の方法にとって可能な限りゆるめられた仮定の下で、議論する。

次の問題を考える。

$$
(\mathrm{D.P})\quad
\begin{cases}
\partial_t u = L(t,x,\partial_x)u \\
\quad = \sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{1\le j\le n} B_j(t,x)\partial_{x_j}u \\
\quad + C(t,x)u \qquad\qquad \text{in } \Omega. \\
\mathcal{B}u = a(t,x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(t,x)u = 0 \qquad \text{on } S\,(=\bar{\Omega}\setminus\Omega) \\
u\big|_{t=0} = u_0 \\
\qquad \text{ここで、}\Omega\text{は}\mathbb{R}^n\text{に含まれる有界開領域。} \\
\qquad S\text{は compact set であり、仮定で述べるなめらかさをもつものとする。} \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(t,x)\partial_{x_j}u\,\Big|_{x\in S}
\end{cases}
$$

次の仮定をおく。

(1) $S\,(=\bar{\Omega}\setminus\Omega)$ は compact set であり、局所的には $x = F(x')$ ($x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $F\in C^{3+\gamma}$, $0<\gamma<1$) と表現される。

(2) 係数は次のなめらかさを満足させる。

(i) $\partial_{x_k}\partial_{x_l}A_{ij}(t,x)$, $\partial_{x_k}B_j(t,x)$, $C(t,x)$ は $[0,T]\times\bar{\Omega}$ の上で一様 Hölder 連続性をもつ。

(A₁)

(ii) $a(t,x)$, $\nu_j(t,x)$ は S 上での第1階導関数が $[0,T]\times S$ 上で一様Hölder連続性をもつ。
$b(t,x)$ は $[0,T]\times S$ 上で一様Hölder連続。
さらに、$\sup_{x\in S}|a(t,x)-a(\tau,x)|\leq C|t-\tau|^{\frac{1+\gamma}{2}}$ $(0<\gamma<1)$
を仮定する。

(3) $A_{ij}(t,x)$ は次を満足させる。

(i) $A_{ij}(t,x)=A_{ji}(t,x)$　　（対称性）

(ii) 勝手な $\xi_i, \xi_j \in R^n$ に対して、$\sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2$
（Cは正数、かつ t,x に無関係）.　　（正定値性）

(4) すべての係数 A_{ij}, B_j, C, a, b, ν_j は実数値関数であるとする。さらに $a(t,x)$ に関しては、
$0\leq a(t,x)$ とする。また、$-\infty<M\leq\dfrac{b(t,x)}{a(t,x)}\leq+\infty$
の仮定もおく。（a, b が同時には0にならないとする）.

(5) $\overrightarrow{N_x}$ は S 上の点 x での単位外向法線ベクトルとせよ。この時、$\overrightarrow{\nu}_{(t,x)}=(\nu_1(t,x), \nu_2(t,x), \ldots, \nu_n(t,x))$
は次の不等式を満足させる。

$$\overrightarrow{\nu}_{(t,x)}\cdot\overrightarrow{N_x}>0 \quad \text{on } [0,T]\times S.$$

(D.P) を (A₁) の下で議論する。この時、次の定理を得る。

定理、　勝手な $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$ に対して、一意解

$$u(t,x) = \int_\Omega U(t,x,0,y)u_0(y)\,dy \in C^{2+\gamma'}((0,T]\times\Omega)\cap C^{1+\gamma'}((0,T]\times\bar{\Omega})$$

が存在する。$(0<{}^\exists\gamma'<1)$

ここで積分核 $U(t,x,\tau,y)$ は次を満足させる。

(i) a) $U(t,x,\tau,y) \in C^{2+\gamma'}((\tau,T]_t\times\Omega_x)\cap C^{1+\gamma'}((\tau,T]_t\times\bar{\Omega}_x)$

（固定された $(\tau,y)\in[0,T)\times\Omega$ に対して）

b) $(\partial_t - L(t,x,\partial_x))U(t,x,\tau,y) = 0$ in $(\tau,T]_t\times\Omega_x$.

$B_{t,x}U(t,x,\tau,y) = 0$ on $(\tau,T]_t\times S_x$

（固定された $(\tau,y)\in[0,T)\times\Omega$ に対して）

(ii)
$$\lim_{t\to\tau+0}\int_\Omega U(t,x,\tau,y)u_0(y)\,dy = u_0(x)$$

これは Ω 上の有界収束である。ただし、Ω 内の任意の compact set の上では一様収束である。$(u_0 \in C^0(\bar{\Omega}))$

証明略。

参考文献。

[1]、S. Itô : "Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problem" Jap. J. Math. 27 (1957) 55～102.

[2] R. Arima: "On general boundary value problem for parabolic equations"
J. Math. Kyoto univ. 4-1 (1964) 207~243.

[3] K. Hayashida: "On the singular boundary value problem for elliptic equations"
Trans. Amer. Math. Soc. 184 (1973) 205~221

[4]. A. Kaji: "On the degenerate oblique derivative problems" Proc. Japan Acad. 50 (1974) 1~5.

[5] Y. Kato: "Another approach to a non-elliptic boundary problem"
Nagoya Math. J. 66 (1976) 13~22.

[6]. K. Taira: "Sur le problème de derivée oblique I"
J. Math. Pure Appl. 57 (1978) 379~395.

[7] K. Taira: "On some degenerate oblique derivative problems" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA. 23 (1976) 259~287.

[8] S. Mizohata: "On the wellposed singular boundary value problems for heat operator"
Journées des Equations aux Derivatineés, Partielles à Saint-Jean-de-Monts en Juin 1983.

[9] M. Terakado: "On Singular Initial-....." to appear