数理解析研究所講究録
第532巻 1984年 55-68

プラズマ平衡に現れるQueer Differential Equationの解の存在について

電気通信大学　中村正彰（Masaaki Nakamura）

核融合を目指した、トカマク・プラズマの平衡に現れる非線形問題を紹介し、その解の存在定理を、J. Mossino[1]に従って、多価作用素の不動点定理を用いて示す。

§1. 多価作用素

Ωを$\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$の滑らかな境界をもった有界領域とする。$B=\{v\in L^\infty(\Omega) \mid 0\leqq v(x)\leqq|\Omega|, \text{ a.e. } x\in\Omega\}$とする。

1.1. 多価作用素　$\beta: L^2(\Omega)\to L^\infty(\Omega)$

$v\in L^2(\Omega)$に対して$\bar{\beta}(v)(x)$, $\underline{\beta}(v)(x)$を次のように定める。

$$\bar{\beta}(v)(x)=|\{y\in\Omega \mid v(y)\geqq v(x)\}|$$

$$\underline{\beta}(v)(x)=|\{y\in\Omega \mid v(y)> v(x)\}|$$

ここで$|\{\cdot\}|$は$\{\cdot\}$のルベーグ測度である。

すると一般に

$\bar{\beta}(v)(x) \geqq \underline{\beta}(v)(x) \qquad$ a.e. $x \in \Omega$

このとき　$\beta(v)(x)$ を次のように定める。

$\beta(v)(x) = [\underline{\beta}(v)(x),\ \bar{\beta}(v)(x)]$, a.e. $x \in \Omega$.

一般に　$\beta(v)(x)$ は多価である。

(注)　$0 \leqq {}^{\forall}t \leqq |\Omega|$, $|\{y \in \Omega \mid v(y) = t\}| = 0$　のとき

$\bar{\beta}(v)(x) = \underline{\beta}(v)(x)$

以上により　$\beta : L^2 \to B \subset L^\infty(\Omega)$ を定める。

$\beta(v) = \{\xi \in B \mid \xi(x) \in \beta(v)(x),\ \text{a.e. } x \in \Omega\}$

1.2.　カラテオドリ作用素　$g : L^\infty \to L^2$

$g : \Omega \times [0, |\Omega|] \to \mathbb{R}$ で次の条件 i)〜iii) を満たすものをカラテオドリ関数といい、$g \in CAR(2)$ で表す。

G i)　$g(x, \cdot)$ 連続　a.e. $x \in \Omega$

G ii)　$g(\cdot, s)$ 可測　a.e. $s \in [0, |\Omega|]$

G iii)　$|g(x, s)| \leqq a(x) + b|s|^p$, $a \in L^2$, $1 \leqq p < +\infty$.

すると、

(1)　G i), G ii) が満たされていると、任意の可測関数 $v(x)$ に対して　$g(x, v(x))$ は可測関数となる。

(2)　$v \in L^\infty$ ならば　$g(x, v(x)) \in L^2$.

1.3.　作用素　$T_1 : L^2 \to L^2$

$\therefore \quad \lambda = g(x, \mu) \in g(x, \beta(v)(x))$

b) ほとんどすべての $x \in \Omega$ に対して $g(x, \beta(v)(x))$ は連結である。

∵) $K_i,\ i = 1, 2$ を相対開集合で次の条件を満たすものとする。

$g(x, \beta(v)(x)) = K_1 \cup K_2, \quad K_1 \cap K_2 = \phi$

K_i に対して F_i を次のように定める.

$F_i = \{ \mu \in \beta(v)(x) \mid g(x, \mu) \in K_i \}, \ i = 1, 2.$

すると

$\beta(v)(x) = F_1 \cup F_2, \ F_1 \cap F_2 = \phi, \quad F_i$ 開 ∵) G1)

これは $\beta(v)(x)$ が閉区間(=連結)であることと矛盾する。

c) $g(x, \beta(v)(x)) \subset \mathbb{R}$ 連結閉集合であるから凸集合。

d) $\Gamma_1(v)$ は閉集合。

∵) $\psi_n \in \Gamma_1(v)$, $\psi \to \psi$ in L^2 ならば $\psi \in \Gamma_1(v)$ を示す。

$\psi_n \to \psi$ in L_2

$\Rightarrow {}^{\exists}\psi_{n_j}$ s.t. $\psi_{n_j} \to \psi$ a.e. x.

$\Rightarrow \psi_n(x) \in \Gamma_1(v)(x)$ a.e. x.

$\Rightarrow \psi \in \Gamma_1(v)$

iii) $\Gamma(v)$ は凸集合

g, β によって、多価作用素 $\Gamma_1 : L^2 \to L^2$ を次のように定める。

$$\Gamma_1(v) = g \circ \beta(v)$$
$$= \{\varphi \in L^2 \mid {}^{\exists}\xi \in B \text{ such that } \xi \in \beta(v),\ \varphi = g \circ \xi\}.$$

§2. 問題の紹介

<u>問題1.</u>

次の方程式を満たす $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を求めよ。

$$-\Delta u \in g \circ \beta(u) \quad \text{in } \Omega$$

<u>問題2</u>

次の方程式を満たす $u \in H^2(\Omega)$ を求めよ。

$$\begin{cases} -\Delta u + u \begin{cases} = 0 & \text{if } u \geqq 0 \\ \in g \circ \beta(u) & \text{if } u < 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega \\ u = \text{未知定数} \quad \text{on } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = -1 \end{cases}$$

§3. 一般存在定理

3.1. 多価作用素 $\Gamma : L^2 \to L^2$ の性質

Γ 1) $\Gamma(L^2(\Omega)) \subset L^2(\Omega)$ 有界

Γ 2) 任意の $v \in L^2(\Omega)$ に対して $\Gamma(v) \neq \phi$ で、凸な

閉集合。

Γ3) Γのグラフ $G(\Gamma)=\{(v,\varphi) \mid \varphi\in\Gamma(v)\}\subset L^2_s\times L^2_w$ で閉集合。

このとき

命題 3.1.

Γ1), Γ2)の下で Γ3)は

Γ3) $\Leftrightarrow$ $\Gamma : L^2_s\to L^2_w$ 上半連続

ここで $L^2_{s(w)}$は 強(弱)位相で考えたL^2である。

3.2. 作用素 A

Vをヒルベルト空間で次の条件を満たすものとする。

$H^1_0(\Omega)\subsetneq V\subsetneq H^1(\Omega)$

このとき $A: V\to V'$は次の条件を満たすとする。

A1) Aは連続

A2) Aは劑圧的 (coercive)

A3) $R(A)=V'$

A4) $K\subset V'$ 凸閉集合とすると $A^{-1}(K)\neq\phi$も凸閉集合。

(注1) A coercive $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\|v\|\to\infty}\frac{(Av,v)}{\|v\|}=\infty$

(注2) A 線形ならば A1)~A3) $\Rightarrow$ A4)

例1) $V = H_0^1(\Omega)$, $A = -\Delta$ とすると A1)〜A4)
はすべて満たされる。

例2) $V = H^1(\Omega)$, $A = -\Delta + 1$ とすると A1)〜A4)
はすべて満たされる。

(注3) $V \subsetneq L^2$ コンパクトであるから $A^{-1}: V' \to V$ は
$L^2 \subsetneq (H^1)' \subsetneq V' \subsetneq H^{-1}$ を考慮すると L^2 に制限すれば
$L^2 \to L^2$ の作用素としてコンパクトである。従って
$L^2_w \to L^2_s$ 連続である。

3.3. 多価作用素の不動点定理. Ky Fan の定理

定理1 Ky Fan の不動点定理 [ ]

E: ハウスドルフ・局所凸空間

$K \subset E$ 凸コンパクト集合 $\neq \phi$

$T: K \to 2^K$ が次の条件を満たす。

i) T は上半連続

ii) 任意の $x \in K$ に対して $T(x)$ は空でない凸閉集合.

$\Rightarrow$ $x_0 \in K$ で $x_0 \in T(x_0)$ なる元 x_0 が存在する。

3.4. 一般存在定理

定理2.

Ω 滑らかな境界をもった $\mathbb{R}^n$ の有界領域.

V ヒルベルト空間で、$H_0^1(\Omega) \subsetneq V \subsetneq H^1(\Omega)$を満たす。

A: $V \to V'$で $A1) \sim A4)$ を満たす。

Γ: $L^2 \to V^2$で $\Gamma 1) \sim \Gamma 3)$ を満たす。

$\Rightarrow$

$u \in V$で $u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$ を満たすものが存在する。

(証明)

$\Gamma 1)$と$A2)$によって

$\exists B \subset V$ 閉球 s.t. $A \circ \Gamma(L^2(\Omega)) \subset B$.

このとき

$B \subset V \subsetneq H^1(\Omega) \subsetneq L^2$ から $B \subset L^2$ 凸コンパクト集合.

従って $A^{-1} \circ \Gamma(B) \subset B$.

$\Gamma 2)$により $\forall v \in B$に対して $\Gamma(v)$ 凸閉集合$\neq \phi$.

$A4)$により $A^{-1} \circ \Gamma(v)$ 凸コンパクト集合$\neq \phi$.

$\Gamma 3)$により $G(\Gamma) \subset L^2 \times L^2_w$ 閉凸. すなわち上半連続

A^{-1}: $L^2_w \to L^2$ 連続であるから $A^{-1} \circ \Gamma$ 上半連続.

従って、Ky Fan の定理によって

$\exists u \in B$ s.t. $u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$. (q.e.d.)

(注) Aが一価作用素のときは、$Au \in \Gamma(u) \Leftrightarrow u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$

系3.1.

Aが線形、$l \in V'$ のとき $\exists v \in V$ s.t. $Au \in \Gamma(u)+l$.

(注) Aの定義域を $D(A)=\{u\in V \mid Au \in L^2(\Omega)\}$ とし、
$D(A)\subset H^2(\Omega)$ とすると、方程式の解uは、
$u \in V \cap H^2(\Omega)$。

§4 問題の解決

4.1. 問題1の解の存在

$\Gamma_1(v)=g\circ\beta(v)$ が $\Gamma 2)$、$\Gamma 3)$ を満たすことを示す。

$\Gamma 2)$ の証明

i) 任意の $v\in L^2$ に対して $\Gamma_1(v)\neq\phi$ は明らか。

ii) $\Gamma_1(v)$ 閉集合であること

a) ほとんどすべての $x\in\Omega$ に対して $g(x,\beta(v)(x))$ は閉集合。

∵) $\lambda_n \in g(x,\beta(v)(x))$, $\lambda_n\to\lambda$ ならば $\lambda\in g(x,\beta(v)(x))$ を示す。

$\forall\lambda_n$ に対して $\exists\mu_n\in\beta(v)(x)$ s.t. $\lambda_n \in g(x,\mu_n)$

$\exists\{\mu_{n_j}\}\subset\{\mu_n\}$ s.t. $\mu_{n_j}\to\exists\mu$.

一方、$\beta(v)(x)$ は閉区間であるから、$\mu\in\beta(v)(x)$

G1)によって $g(x,\mu_n)\to g(x,\mu)$

∵) $\psi_i \in \Gamma(v)$, $i=1,2$. ならば $\psi_\tau = (1-\tau)\psi_1 + \tau\psi_2 \in \Gamma(v)$ を示す。

ほとんどすべての $x \in \Omega$ に対して $\Gamma_1(v)(x)$.

$\psi_i(x) \in \Gamma_1(v)(x)$、かつ $\Gamma_1(v)(x)$ 凸閉集合

従って.

$\psi_\tau(x) \in \Gamma_1(v)(x)$ a.e. $x \in \Omega$.

∴ $\psi_\tau \in \Gamma_1(v)$

Γ 3)の証明

(＊) $v_n \to v$ in L^2, $\psi_n \in \Gamma_1(v_n)$, $\psi_n \to \psi$ in L^2 のとき $\psi \in \Gamma_1(v)$ を示す。

$v_n \to v$ in L^2 であるから 部分列をとることにより

$v_n(x) \to v(x)$ a.e. $x \in \Omega$ としてよく.

Egoroff の定理により

$\forall \eta > 0$, $\exists K_\eta \subset\subset \Omega$ s.t. $\begin{cases} |\Omega - K_\eta| \leq \eta, \\ v_n|K_\eta \to v|K_\eta \text{ 一様} \end{cases}$

従って.

$\psi(x) \in g(x, \beta(v)(x))$ a.e. $x \in K_\eta$

を示せば (＊)が成立する。

任意の正の数 ε を固定して考える。

$\exists m_0 = m_0(\eta, \varepsilon)$ s.t. $\underset{q}{m \geq m_0}$ ならば $\sup_{K_\eta} |v_m(x) - v(x)| < \varepsilon$

$m \geqq m_0,\ x \in K_\eta$ とすると

$$\underline{\beta}(v_m)(x) = \left|\{y \in \Omega \mid v_m(x) - v_m(y) > 0\}\right|$$
$$\geqq \left|\{y \in K_\eta \mid v_m(x) > v_m(y)\}\right|$$
$$\geqq \left|\{y \in K_\eta \mid v(x) \geqq v(y) + 2\varepsilon\}\right|$$

$$\left|\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geqq 2\varepsilon\}\right|$$
$$= \left|\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geqq 2\varepsilon\} \cup \{y \in \Omega - K_\eta \mid v(x) - v(y) \geqq 2\varepsilon\}\right|$$
$$\leqq \left|\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geqq 2\varepsilon\}\right| + \left|\{y \in \Omega - K_\eta \mid v(x) - v(y) \geqq 2\varepsilon\}\right|$$
$$\leqq \left|\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geqq 2\varepsilon\}\right| + \eta$$

従って

$$\underline{\beta}(v_m)(x) \geqq -\eta + \left|\{y \in \Omega \mid v(x) \geqq v(y) + 2\varepsilon\}\right|$$

同様にして

$$\overline{\beta}(v_m)(x) \leqq \eta + \left|\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geqq -2\varepsilon\}\right|$$

そこで

$$\sigma(a, x) = \left|\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geqq a\}\right|$$

とおくと

$$\beta(v) \subset [-\eta + \sigma(2\varepsilon, x),\ \eta + \sigma(-2\varepsilon, x)] = S(\eta, \varepsilon, x)$$

従って

$$v_m(x) \in g(x, \beta(v_m)(x)) \subset g(x, S(\eta, \varepsilon, x)),\ \text{a.e. } x \in K_\eta$$

また

$\{\phi \in L^2(K_\eta) \mid \phi(x) \in g(x, S(\eta, \varepsilon, x))\ \text{a.e. } x \in K_\eta\}$ は

閉集合。

一方,

$\psi_m|K_\eta \to \psi|K_\eta$ in $L^2(K_\eta)$

従って

$\forall\eta>0$, $\forall\varepsilon>0$ に対して

$\psi(x)\in g(x, S(\eta,\varepsilon,x))$ a.e. $x\in K_\eta$

$\varepsilon=\varepsilon_n\downarrow 0$ とすると

$\sigma(2\varepsilon,x)\uparrow \underline{\beta}(v)(x)$, $\sigma(-2\varepsilon,x)\downarrow \overline{\beta}(v)(x)$ a.e. $x\in\Omega$

$\therefore$ $S(\eta,\varepsilon,x)\downarrow[-\eta+\underline{\beta}(v)(x), \eta+\overline{\beta}(v)(x)]$ $(\varepsilon\downarrow 0)$

従って

$\forall\eta>0$, a.e. $x\in K_\eta$ に対して

$\psi(x)\in g(x, [-\eta+\underline{\beta}(v)(x), \eta+\overline{\beta}(v)(x)])$

次に,

$\eta=1/n\downarrow 0$ とすると $K_\eta\uparrow$

つまり

$\eta'\leqq\eta \Rightarrow (x\in K_\eta \Rightarrow x\in K_{\eta'})$

$\therefore$ $\forall\eta>0$, a.e. $x\in K_{\eta'}$, $\forall\eta'\leqq\eta$ に対して

$\psi(x)\in g(x, [-\eta+\underline{\beta}(v)(x), \eta'+\overline{\beta}(v)(x)])$

ここで $\eta'\downarrow 0$ とすると

$\psi(x)\in g(x, [\underline{\beta}(v)(x), \overline{\beta}(v)(x)])$ (q.e.d.)

$V=H_0^1(\Omega)$, $A=-\Delta$ とすれば $A1)\sim A4)$ はすべて

満たされ、解の正則性によって、$u\in H^2\cap H^1_0$ である。

定理 4.1.

$\exists u\in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ s.t. $-\Delta u\in\Gamma_1(u)$

4.2. 問題2の解の存在

$V=\{v\in H^1(\Omega)\mid v|\partial\Omega=$ 定数$\}$,

$D(A)=V$, $A=-\Delta+I$

とすれば A1)〜A4) はすべて満たされる。

さらに

$l\in V'$ を $l(v)=-v|\partial\Omega$ とすると $A^{-1}l\in H^2$

$\Gamma_2(v)$ を次のように定める。

$\Gamma_2(v)=h(-v)\Gamma_1(v)$

ここで

$h(-v)(x)=[\underline{h}(-v)(x),\ \bar{h}(-v)(x)]$,

$\bar{h}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqq 0\end{cases}$, $\underline{h}(x)=\begin{cases}0, & x\leqq 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

Γ1), Γ2) は明らかに満たされる。

Γ3) の証明.

Γ_1 に対する証明のときと同じ仮定の下に

$\chi(x)\in\Gamma_2(v)(x)$ a.e. $x\in K_\eta$

を示せばよい。

同様に、$\varepsilon>0$、$m \geqq m_0$ を固定して考えると、

a.e. $x \in K_\eta$ に対して

$\beta(v_m)(x) \subset [-\eta+\sigma(2\varepsilon, x), \eta+\sigma(-2\varepsilon, x)] = S(\eta, \varepsilon, x)$

また、

$\underline{h}(-v_m)(x) \geqq \underline{h}(-v(x)-\varepsilon)$,

$\bar{h}(-v_m)(x) \leqq \bar{h}(-v(x)+\varepsilon)$,

$\therefore\ h(-v_m)(x) \subset [\underline{h}(-v(x)-\varepsilon, \bar{h}(-v(x)+\varepsilon)] = T(\varepsilon, x)$

よって、$m \geqq m_0$, a.e. $x \in K_\eta$ に対して

$\psi_m(x) \in h(-v_m)(x)\, g(x, \beta(v_m)(x)) \subset T(\varepsilon, x)\, g(x, S(\eta, \varepsilon, x))$

$T(\varepsilon, x) \downarrow h(-v(x))$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ であるから、順に

$m \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ とすると、

$\psi(x) \in \Gamma_2(v)(x)$ a.e. $x \in K_\eta$ (q.e.d.)

さらに 系3.1. と $u \in H^2(\Omega)$ ならば、

$u - \Delta u = 0$ on $\{u=0\}$

であることから 解の存在が示される。

<u>定理 4.2.</u>

$^\exists u \in H^2(\Omega)$ s.t.

$$
\begin{cases}
-\Delta u + u \begin{cases} = 0 & \text{if } u \geqq 0 \\ \in g \circ \beta(u) & \text{if } u < 0 \end{cases} \\
u = \text{未知定数} \\
\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = -1
\end{cases}
$$

文献

[1]. J. Mossino, Some nonlinear problems involving a free boundary in plasma physics, J. of Diff. Eq. 1979, vol. 34 No. 1. pp. 114-138.

[2] F. Terkelsen, A short proof of Fan's fixed point theorem, Proc. A.M.S. 1974, vol. 42. pp. 643-644.

[3] M. A. Krasnosel'skii, Topological methods in the theory of nonlinear integral equation, 1964, Pergamon.