数理解析研究所講究録
第 532 巻 1984 年 69-83

マックスウェル方程式の有限要素近似について

電気通信大学* 名古屋靖一郎 (Seichiro Nagoya)
電気通信大学 牛島照夫 (Teruo Ushijima)

はじめに

第1章においては，マックスウェル方程式に有限要素法を適用し近似的に解くスキームを提示し，その安定性や収束性について Trotter-Kato-Ushijima の半群の近似理論を用いて考察する。第2章では，次元をおとした方程式についての数値計算結果を示し，第1章で述べた結果の確認をする。

第1章 近似スキームの安定性と収束性

§1. 準備

$\mathbb{R}^3$ 中のリプシッツ領域 Ω をとり，3次元ベクトル値関数として与えられる $E=E(t,x)$，$H=H(t,x)$ $\left((t,x) \in [0,\infty)\times\Omega\right)$ について，次の方程式を考える。

$$(1.1)\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{rot}\, H - \sigma E \\ \mu \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\, E \end{cases} \qquad (\varepsilon, \mu, \sigma \text{ は正定数})$$

* 昭和59年4月より，日本科学技術研修所

そして，境界条件として

(1.2) $\quad \nu \wedge E = 0 \quad$ on $[0,\infty)\times\Gamma \quad (\Gamma = \partial\Omega)$

をみたし（νはΩの外向き単位法線ベクトルで，「$\wedge$」は外積），初期条件

$$(1.3)\quad \begin{cases} E(0,x) = E_0(x) \\ H(0,x) = H_0(x) \end{cases}, \quad x \in \Omega$$

を与えて，$(0,\infty)\times\Omega$上で(1.1)をみたすE，Hを求めるという問題を考える。

注．

有界領域$\Omega \subset \mathbb{R}^N$がリプシッツ領域とは，（局所地図を$(x_{r1},\cdots,x_{rN})$，または簡単に$(x_r', x_{rN})$ $(r=1,2,\cdots,M)$として）ある正数α，βがあって，以下の2条件i),ii)をみたすときをいう。

i) 境界Γの各点xが，立方体$\Delta_r = \{x_r' = (x_{r1},\cdots,x_{rN-1}) :$ $|x_{ri}| < \alpha,\ i=1,2,\cdots,N-1\}$上で定義されたリプシッツ連続な関数$a_r$によって，$x = (x_r', a_r(x_r'))$とかかれる。

ii) $\{(x_r', x_{rN}) : a_r(x_r') < x_{rN} < a_r(x_r') + \beta,\ x_r' \in \Delta_r\} \subset \Omega$，
$\{(x_r', x_{rN}) : a_r(x_r') - \beta < x_{rN} < a_r(x_r'),\ x_r' \in \Delta_r\} \subset \overline{\Omega}^c$。

記法．

・$\mathbf{u} = (u_i)_{1\le i\le 3}$，$\mathbf{v} = (v_i)_{1\le i\le 3} \in \{L^2(\Omega)\}^3$に対して，

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_0 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i(x) v_i(x)\, dx, \quad \|\mathbf{u}\|_0 = (\mathbf{u},\mathbf{u})_0^{\frac{1}{2}}$$

- $\mathcal{X} = \begin{matrix}\{L^2(\Omega)\}^3\\ \times \\ \{L^2(\Omega)\}^3\end{matrix}$ の内積，ノルムを，$U=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\in\mathcal{X}$ として，

$$(U,V)=(\varepsilon u_1, v_1)_0+(\mu u_2, v_2)_0\ ,\quad \|U\|=(U,U)^{\frac{1}{2}}$$

とかく。

- $H(\mathrm{rot};\Omega)=\{u\in\{L^2(\Omega)\}^3 : \mathrm{rot}\,u\in\{L^2(\Omega)\}^3\}$.

  $H_0(\mathrm{rot};\Omega)=\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ のグラフノルム $\|\cdot\|_0+\|\mathrm{rot}\cdot\|_0$ に関する閉包。

<u>補題 1.</u>

$$\{\mathcal{D}(\bar{\Omega})\}^3 \underset{dense}{\subset} H(\mathrm{rot};\Omega)\ .$$

これにより，$u\in H(\mathrm{rot};\Omega)$ について，$\nu\wedge u$ が $\{H^{-1/2}(\Gamma)\}^3$ の意味で定義できて，

$$\begin{aligned}H_0(\mathrm{rot};\Omega) &= \{u\in H(\mathrm{rot};\Omega) : \forall v\in H(\mathrm{rot};\Omega),\ (\mathrm{rot}\,u, v)_0 \\ &\qquad\qquad = (u, \mathrm{rot}\,v)_0\} \\ &= \{u\in H(\mathrm{rot};\Omega) : \nu\wedge u = 0\}\ .\end{aligned}$$

（cf. [2], [3]. また境界が十分滑らかな時は [1] を参照）

<u>作用素 A.</u>

$A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ を次のように定義する。

$$\mathbb{V}=H_0(\mathrm{rot};\Omega)\ ,\quad \mathbb{W}=H(\mathrm{rot};\Omega)$$

とおいて，

$$D(A)=\begin{matrix}\mathbb{V}\\ \times\\ \mathbb{W}\end{matrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\\ -\frac{1}{\mu}\mathrm{rot} & 0\end{pmatrix}$$

命題２.

$\overline{D(\mathcal{A})}=\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$は閉. $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$, $D(\mathcal{A}^*)=D(\mathcal{A})$

そして, $\forall F\in\mathcal{X}$, $\forall\lambda>0$に対して, 方程式

$$(\lambda-\mathcal{A})U=F$$

の解$U\in D(\mathcal{A})$が一意に存在し,

$$\|U\|\leq\lambda^{-1}\|F\|$$

をみたす。以上により, $\mathcal{A}$はユニタリ半群の生成作用素となる。(この半群を$T(t)$とかくことにする。)

(cf. [1], 定理10.1)

作用素 $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}\in L(\mathcal{X})$を次のように定義する。

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix}-\frac{\sigma}{\varepsilon} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

命題３.

作用素 $\mathcal{C}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ $(D(\mathcal{C})=D(\mathcal{A}))$ は半群$S(t)$の生成作用素になり, その半群$S(t)$は次式をみたす。

$$\|S(t)\|\leq e^{\|\mathcal{B}\|t},\quad t\geq 0 .$$

(cf. [4], 定理2.1)

§２. 近似法.

Ωは多面体領域とする(したがって, リプシッツ領域.)。regular かつ inverse assumption をみたす四面

体分割$\mathcal{T}_h$をとる。そして，

$$W_h = \{ w_h \in C(\overline{\Omega}) : w_h|_T \in P_1,\ T \in \mathcal{T}_h \}$$

$$V_h = \{ v_h \in W_h : v_h|_\Gamma = 0 \}$$

（P_1：1次以下の多項式全体の集合）

とおき，

$$\mathbb{W}_h = \{W_h\}^3, \quad \mathbb{V}_h = \{V_h\}^3$$

とする。問題(1.1)－(1.3)の弱形式

$$(\Pi_0)\begin{cases} \text{find } \mathbf{u}(t) \in \mathbb{V},\ \mathbf{w}(t) \in \mathbb{W} \text{ such that} \\ \varepsilon \dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \varphi)_0 - (\mathrm{rot}\, \mathbf{w}(t), \varphi)_0 + (\sigma \mathbf{u}(t), \varphi)_0 = 0,\ \forall \varphi \in \mathbb{V}, \\ \mu \dfrac{d}{dt}(\mathbf{w}(t), \psi)_0 + (\mathrm{rot}\, \mathbf{u}(t), \psi)_0 = 0,\ \forall \psi \in \mathbb{W},\ t > 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0 \in \mathbb{V},\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}^0 \in \mathbb{W}. \end{cases}$$

に対して，次のような近似スキームをとる。

$$(\Pi_{h,\tau})\begin{cases} \text{find } \mathbf{u}_h(t) \in \mathbb{V}_h,\ \mathbf{w}_h(t) \in \mathbb{W}_h \text{ (step function)} \\ (\varepsilon (D_\tau \mathbf{u}_h)(t), \varphi_h)_0 - (\mathrm{rot}\, \mathbf{w}_h(t+\tau), \varphi_h)_0 + (\sigma \mathbf{u}_h(t), \varphi_h)_0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \forall \varphi_h \in \mathbb{V}_h, \\ (\mu (D_\tau \mathbf{w}_h)(t), \psi_h)_0 + (\mathrm{rot}\, \mathbf{u}_h(t), \psi_h)_0 = 0,\ \forall \psi_h \in \mathbb{W}_h, \\ \qquad t \in [n\tau, (n+1)\tau),\ n = 0, 1, 2, \cdots, \\ \mathbf{u}_h(t) = \mathbf{u}_h^0 \in \mathbb{V}_h,\ \mathbf{w}_h(t) = \mathbf{w}_h^0 \in \mathbb{W}_h,\ t \in [0, \tau). \end{cases}$$

ここで，$(D_\tau \mathbf{u})(t) = \dfrac{\mathbf{u}(t+\tau) - \mathbf{u}(t)}{\tau}$ である。

有限次元空間$\mathbb{V}_h$, $\mathbb{W}_h$に内積$(\cdot,\cdot)_0$をいれたヒルベルト空間を$\mathbb{X}_h$, $\mathbb{Y}_h$で表す。リースの定理から決まる作用

7.

素R_hを次のようにとる。

$$(\mathrm{rot}\,\mathbb{u}_h, \mathbb{w}_h)_0 = (R_h \mathbb{u}_h, \mathbb{w}_h)_0, \quad \mathbb{u}_h \in \mathbb{X}_h, \mathbb{w}_h \in \mathbb{Y}_h .$$

すると境界条件のいれ方から

$$(\mathrm{rot}\,\mathbb{u}_h, \mathbb{w}_h)_0 = (\mathbb{u}_h, \mathrm{rot}\,\mathbb{w}_h)_0$$

をみたす。これを,

$$(R_h \mathbb{u}_h, \mathbb{w}_h)_0 = (\mathbb{u}_h, R_h^* \mathbb{w}_h)_0$$

に対応させると,$(\Pi_{h,\tau})$ はヒルベルト空間$\mathbb{X}_h$,$\mathbb{Y}_h$の元の意味で,

$$(E_{h,\tau})\begin{cases} \varepsilon (D_\tau \mathbb{u}_h)(t) - R_h^* \mathbb{w}_h(t+\tau) + \sigma\, \mathbb{u}_h(t) = 0 , \\ \mu (D_\tau \mathbb{w}_h)(t) + R_h \mathbb{u}_h(t) = 0 , \quad t \in [n\tau, (n+1)\tau), \ n = 0, 1, \cdots , \\ \mathbb{u}_h(t) = \mathbb{u}_h^0 \in \mathbb{X}_h , \ \mathbb{w}_h(t) = \mathbb{w}_h^0 \in \mathbb{Y}_h , \ t \in [0, \tau) . \end{cases}$$

とかける。ここで,簡単のため,

$$\begin{cases} \mathbb{u}_h(t) = \mathbb{u}_n \\ \mathbb{w}_h(t) = \mathbb{w}_n \end{cases} \quad \begin{pmatrix} t \in [n\tau, (n+1)\tau), \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$$

とかくと,$(E_{h,\tau})$は

$$(E_{h,\tau})\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\mathbb{u}_n - \mathbb{u}_m}{\tau} - R_h^* \mathbb{w}_n + \sigma\, \mathbb{u}_m = 0 , \\ \mu \dfrac{\mathbb{w}_n - \mathbb{w}_m}{\tau} + R_h \mathbb{u}_m = 0 , \\ \mathbb{u}_0 = \mathbb{u}_h^0 \in \mathbb{X}_h , \ \mathbb{w}_0 = \mathbb{w}_h^0 \in \mathbb{Y}_h . \end{cases} \quad \begin{pmatrix} n = m+1 \\ m = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$$

となる。

また$\mathbb{X}_h \times \mathbb{Y}_h$に内積$(\cdot,\cdot)$を入れたヒルベルト空間を$\mathcal{X}_h$とし,$P_h$を$\mathcal{X}$から$\mathcal{X}_h$の上への直交射影作用素とする。

注.

この近似法では，$\mathbb{V}_h$は境界上ではすべて零となるもの全体の集合となり，境界上での値が全く計算できない。この問題は次のように改善できる。

$$\begin{cases} b_1, b_2, \cdots, b_N : \text{内部節点}, \\ b_{N+1}, b_{N+2}, \cdots, b_{N+M_1} : \text{境界面の内部にある節点}, \\ b_{N+M_1+1}, b_{N+M_1+2}, \cdots, b_{N+M} : \text{ある陵にある節点}. \end{cases}$$

とおき，

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_h' &= \{ w_h \in \mathbb{W}_h : w_h \wedge \nu = 0 \ \text{ on } \Gamma \} \\ &= \Big\{ w_h = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{V}_j w_j + \sum_{j=N+1}^{N+M_1} N_j \mathbb{n}_j w_j : \mathbb{V}_j \in \mathbb{R}^3, \\ &\qquad N_j \in \mathbb{R},\ \mathbb{n}_j = b_j \text{ を含む境界面に立てた法線} \Big\} \end{aligned}$$

とする。$\mathbb{V}_h$を$\mathbb{V}_h'$にかえても以下の議論は成立する。

§3. 安定性.

$$(E_{h,\tau}')\begin{cases} \varepsilon \dfrac{u_n - u_m}{\tau} - R_h^* w_n = 0, \\ \mu \dfrac{w_n - w_m}{\tau} + R_h u_m = 0, \ u_0 = u_h^0, \ w_0 = w_h^0. \end{cases}$$

というスキームについては次の定理が成立する。

定理 4.

(1.4) $\quad \left| (R_h u_h, w_h)_0 \right| \leq 2a (\sqrt{\varepsilon} \| u_h \|_0)(\sqrt{\mu} \| w_h \|_0), u_h \in \mathbb{X}_h, w_h \in \mathbb{Y}_h.$

をみたす正数aがあるとする。そのとき，

(1.5) $\quad 1 - a\tau > 0$

をみたす十分小さなτに対する$(E_{h,\tau}')$の$u_n, w_n\ (n = 0, 1 \cdots)$

は,

$$\|U_n\| \leq C\|U_0\|, \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで，$C = \sqrt{\dfrac{1+a\tau}{1-a\tau}}$ である。

注.

rot は1階の微分作用素だから，"inverse assumption" により，$a = \dfrac{C'}{h}$ (C'はhに依存しない定数)が得られ，定理4の安定条件(1.5)は,

(1.6) $\quad \tau < C''h$

の形になる。

($E'_{h,\tau}$)は,

$$\begin{cases} \dfrac{u_n - u_m}{\tau} = \dfrac{1}{\varepsilon} R_h^* w_m - \dfrac{\tau}{\varepsilon\mu} R_h^* R_h u_m, \\ \dfrac{w_n - w_m}{\tau} = -\dfrac{1}{\mu} R_h u_m \ . \end{cases}$$

とかける。そこで,

$$A_\tau = \begin{pmatrix} -\frac{\tau}{\varepsilon\mu} R_h^* R_h & \frac{1}{\varepsilon} R_h^* \\ -\frac{1}{\mu} R_h & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{X}_h)$$

を生成作用素とする離散半群(cf. [5])を$T_\tau(t)$とおく。

すると，定理4から,

(1.7) $\exists M > 0, \quad \|T_\tau(t)\| \leq M, \quad t \geq 0$

が得られる。($E_{h,\tau}$)は,

$$\begin{cases} \dfrac{u_n - u_m}{\tau} = \dfrac{1}{\varepsilon} R_h^* w_m - \dfrac{\tau}{\varepsilon\mu} R_h^* R_h u_m - \dfrac{\sigma}{\varepsilon} u_m, \\ \dfrac{w_n - w_m}{\tau} = -\dfrac{1}{\mu} R_h u_m \ . \end{cases}$$

とかける。そこで,

$$\mathcal{C}_\tau = \mathcal{A}_\tau + \mathcal{B}_\tau, \quad \mathcal{B}_\tau = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{X}_h).$$

を生成作用素とする離散半群$S_\tau(t)$について，(1.7)と[5]の命題4.1により，

$$\|S_\tau(t)\| \leq M e^{\omega' t}, \ (\omega' = M\|\mathcal{B}_\tau\|), \quad t \geq 0.$$

が得られる。

§4. 収束性.

[5]の半群の近似理論を用いることにより，以下の結果を得た。

定理5.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_\tau \text{ を生成作用素とする離散半群 } T_\tau(t) \\ \mathcal{A} \text{ を生成作用素とする連続半群 } T(t) \end{array}\right\} \text{に対して，}$$

$$\begin{array}{l} {}^\exists C > 0 \\ (\text{定数}) \end{array} \ \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \tau < Ch \text{ をみたすように，} h \to 0 \text{ と} \\ \text{するとき，} 0 < {}^\forall T < \infty \text{ について，} \\ \qquad T_\tau(t) \xrightarrow{K} T(t), \ t \in [0, T] \text{ 上一様.} \end{array} \right.$$

定理6.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C}_\tau \text{ を生成作用素とする離散半群 } S_\tau(t) \\ \mathcal{C} \text{ を生成作用素とする連続半群 } S(t) \end{array}\right\} \text{に対して，}$$

$$\begin{array}{l} {}^\exists C > 0 \\ (\text{定数}) \end{array} \ \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \tau < Ch \text{ をみたすように，} h \to 0 \text{ とす} \\ \text{るとき，} 0 < {}^\forall T < \infty \text{ について，} \\ \qquad S_\tau(t) \xrightarrow{K} S(t), \ t \in [0, T] \text{ 上一様.} \end{array} \right.$$

第2章　1次元モデルの数値実験

§1. 準備

まずここで取り扱う方程式を明らかにすると，

$$(2.1)\quad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} - \sigma u \\ \mu \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \qquad (0 < x < 1)$$

である。すなわち，波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

を考えている。このようなモデルを取り扱う正当性については，[6] を参照。

§2. 安定性の確認

$\varepsilon = 1$，$\mu = 1$，$\sigma = 1$ とおき，初期条件として，

$$u(0, x) = \sin \pi x \quad , \quad w(0, x) = \frac{1}{2} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

をみたし，境界条件として

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

をみたす例について，安定性の実験を行った。

h	安定	不安定
0.1	1.13	1.14
0.05	1.14	1.15
0.025	1.14	1.15

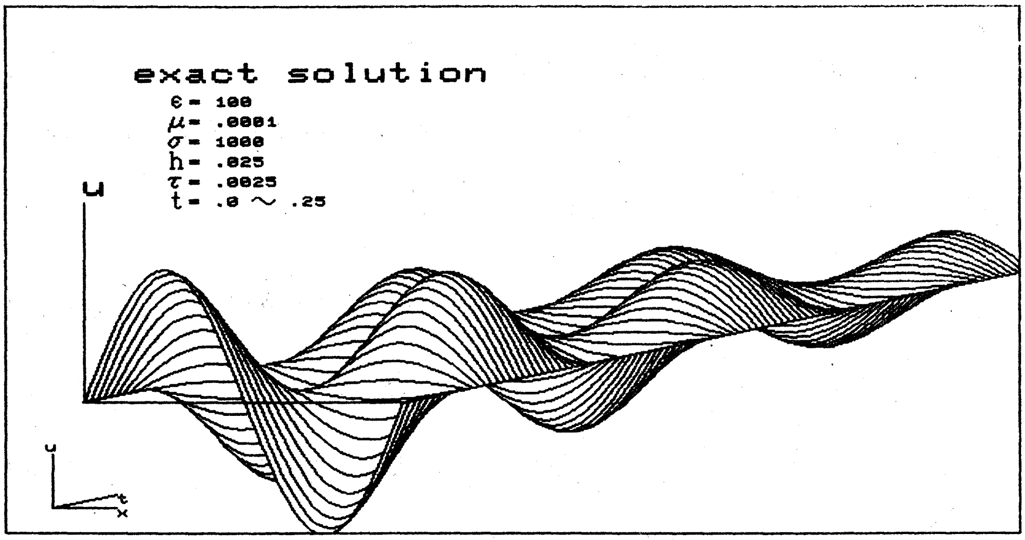
表1. 安定なときと不安定なときの $\frac{\tau}{h}$ の値

第1章の安定性の証明から得られる理論的な安定条件を与える τ/h については，$1/\sqrt{3}$ となる。

§3. 収束性の確認

$$
\begin{cases}
\varepsilon = 100,\ \mu = 0.0001,\ \sigma = 1000 \\
u(0,x) = \sin 2\pi x,\ v(0,x) = \cos 2\pi x \quad (0 \le x \le 1) \\
u(t,0) = u(t,1) = 0,\quad t \ge 0
\end{cases}
$$

とした場合の厳密解と近似解の比較を行う。図1は，$h=0.025$，$\tau=0.0025$ した場合の u のグラフの比較で，図2は v のグラフの場合である。ほぼ形としては目でみるかぎりにおいてよく近似しているといえよう。図3は，$\tau/h=0.1$ と固定したまま，h を小さくしていった時の収束のようすを表すもので，線でかかれているのは厳密解である。ただし，グラフは $x=0.2$ と固定した場合のものである。これをみると，h を小さくしてゆくと近似解が厳密解に近づくようすが観察される。


exact solution
ε= 100
μ= .0001
σ= 1000
h= .025
τ= .0025
t= .0 ～ .25
u
u
t
x

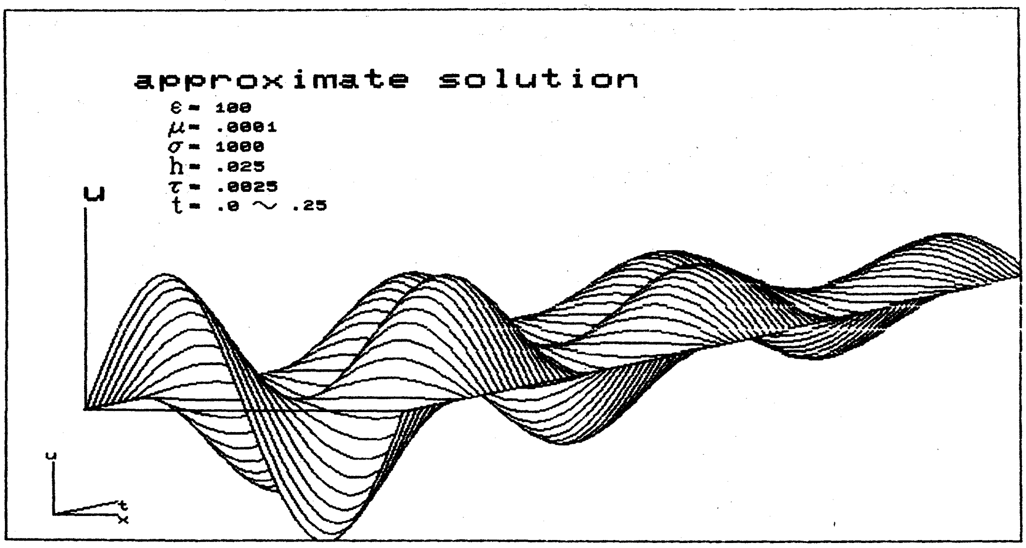
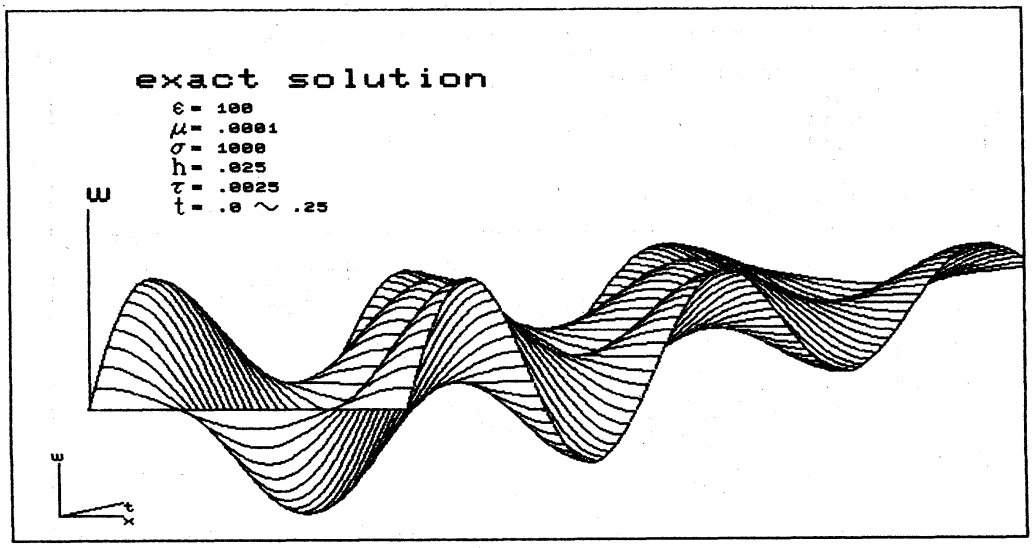

approximate solution
ε= 100
μ= .0001
σ= 1000
h= .025
τ= .0025
t= .0 ～ .25
u
u
t
x

図 1. uのグラフの比較.


exact solution
ε= 100
μ= .0001
σ= 1000
h= .025
τ= .0025
t= .0 ～ .25
w
w
t
x

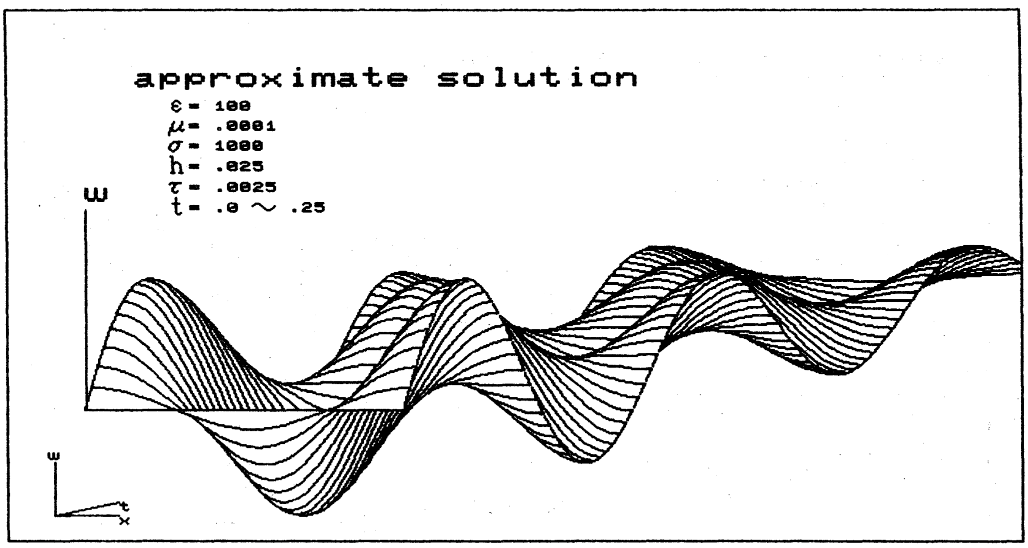

approximate solution
ε= 100
μ= .0001
σ= 1000
h= .025
τ= .0025
t= .0 ～ .25
w
w
t
x

図 2. wのグラフの比較.

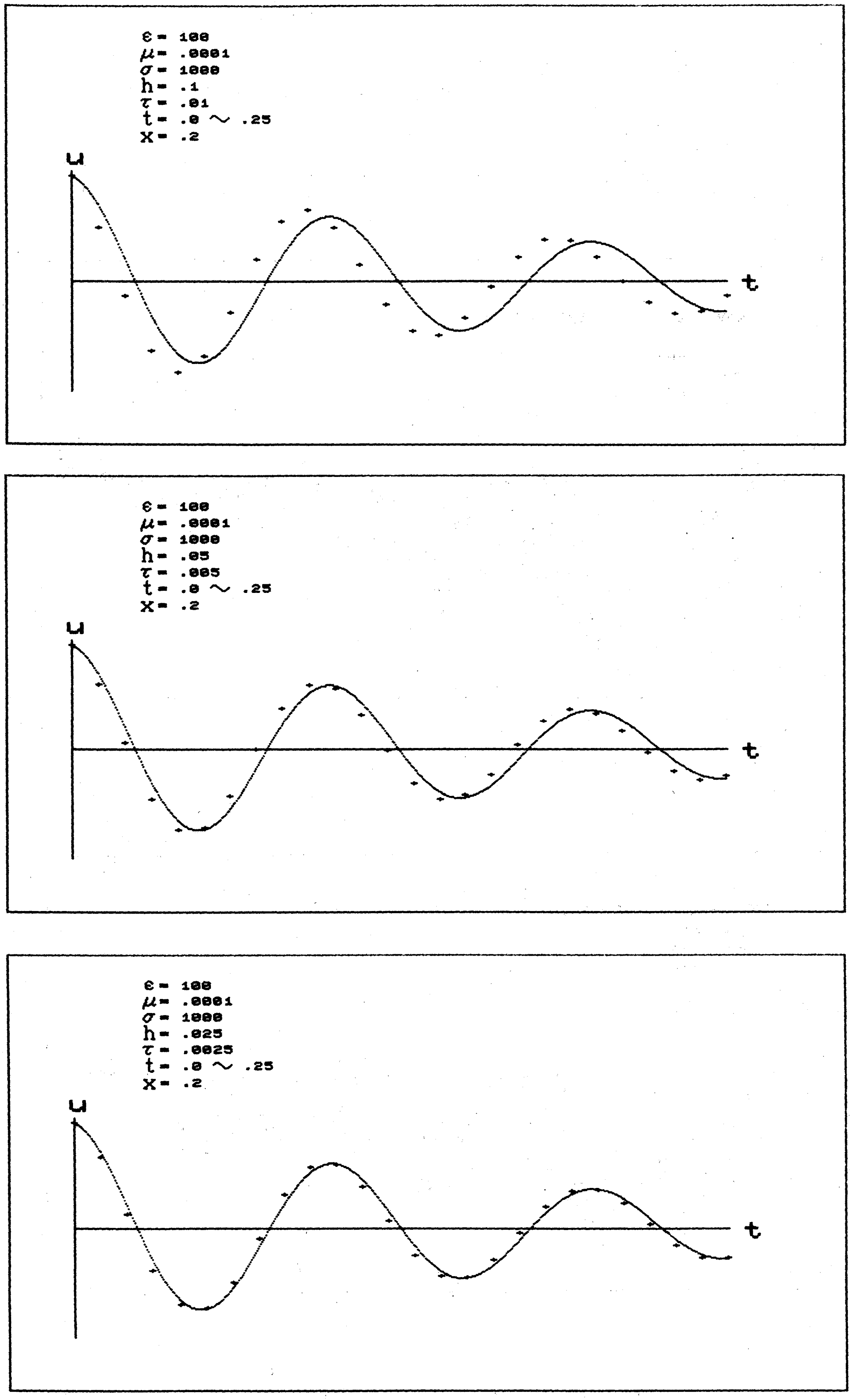

ε= 100
μ= .0001
σ= 1000
h= .1
τ= .01
t= .0 〜 .25
x= .2
u
t
ε= 100
μ= .0001
σ= 1000
h= .05
τ= .005
t= .0 〜 .25
x= .2
u
t
ε= 100
μ= .0001
σ= 1000
h= .025
τ= .0025
t= .0 〜 .25
x= .2
u
t

図 3. 収束のようす.

参考文献

[1] G. Duvaut, J.L. Lions : Inequalities in mechanics and physics, Springer-Verlag, Berlin, (1976), Chapter 7.

[2] Chevalier, J. : Une remarque sur les espace du type de Sobolev, Ann. Fac. Sc. Kinshasa, Math. Phys., Vol III (1977), pp. 293-300.

[3] Chevalier J. : Convergence of f ite element approximations for first order symmetric hyperbolic systems, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 50e année, 9-10 (1981), pp. 313-327.

[4] Kato, T. : Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin, (1966), Chapter IX.

[5] Ushijima, T. : Approximation theory for semi-groups of linear operators and its application to approximation of wave equations, Japan J. Math., Vol. 1, No. 1, (1975), pp. 185-224.

[6] 寺沢徳雄：振動と波動，岩波全書，(1984)，第5章.