

MHD 安定性解析のための逆平衡解法

原研 徳田 伸二 (Shinji Tokuda)

トカマクのような軸対称トロイダル・プラズマでは、MHD 平衡は「グラッド・シャフランフ方程式」

$$\Delta^* \psi \equiv R^2 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi}{R^2} \right) = R j_t \quad \text{--- (1.1)}$$

$$j_t = -R \frac{dp}{d\psi} - \frac{T}{R} \frac{dT}{d\psi} \quad \text{--- (1.2)}$$

$$p = p(\psi), \quad T = T(\psi) \quad \text{--- (1.3)}$$

で決定される。そして、磁場 B は

$$B = \frac{1}{R} e_\varphi \times \nabla \psi + \frac{T}{R} e_\varphi \quad \text{--- (2)}$$

で与えられる (e_φ はトロイダル方向の単位ベクトル)。

方程式 (1.1) は右辺が一般には非線形な偏微分方程式であり、反復解法によって数値計算的に解かれる。以下、数値的に求められた平衡を数値平衡とよぶ。

ERATO コードなどによって MHD 安定性解析の対象にな

る数値平衡には、単に ψ を求める場合にくらべて、数値的な精度に対して厳しい条件が課せられる。

理想電磁流体の運動方程式は

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad \text{--- (3.1)}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad \text{--- (3.2)}$$

であり、運動方程式を解くには磁場 \mathbf{B} および電流 \mathbf{j} が必要であり、線形安定性問題では、それらは ψ の一階および二階の偏微分から計算される。そのため、 ψ に高い精度が要求される。

次に、線形、非線形を問わず安定性解析では、 $\psi = \text{一定}$ の面（磁気面）を座標軸の 1 つにとる磁束座標系を採用することが必要である。この時、磁気軸のまわりを回るポロイダル角 χ が残りの座標軸に選ばれ、ヤコビアン \sqrt{g} :

$$\sqrt{g} = [(\nabla\psi \times \nabla\chi) \cdot \nabla\psi]^{-1}$$

を決めると、ポロイダル角 χ は ψ の等高線に沿った線積分

$$\chi = \int_0^l \frac{dl}{\sqrt{g} B_p} \quad ; \quad B_p = \frac{|\nabla\psi|}{R}$$

で定義される。

一般には、グラッド・ジャフラノフ方程式を解く座標系と

磁束座標系とは一致しないので、数値平衡から磁束座標系を構成し、その座標系において磁場や電流を計算する必要がある(写像)¹⁾。そして、この写像も高精度に行なえることが必要である。

以上からグラッド・ジャフラーノフ方程式(1.1)を磁気面を座標の1つにとった座標系で解けばMHD安定性解析の観点から有利であると期待される。その場合、平衡解は

$$R = R(\rho, \theta), \quad Z = Z(\rho, \theta), \quad \psi = \psi(\rho)$$

で与えられる(ρ :磁気面の座標, θ :ポロイダル角)。このような解法を「逆平衡解法」とよぶ。

逆平衡解法の1つとしてモード展開法がある。 R と Z は θ について周期的であるので、上下対称性を仮定すると、 R, Z は

$$R(\rho, \theta) = R_0 + R_1(\rho) \cos \theta + R_2(\rho) \cos 2\theta + \dots$$

$$Z(\rho, \theta) = Z_1(\rho) \sin \theta + Z_2(\rho) \sin 2\theta + \dots$$

とフーリエ展開できる。この時、グラッド・ジャフラーノフ方程式は

$$\frac{R^2}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{d\psi}{d\rho} \frac{\sqrt{g}}{R^2} |\nabla \rho|^2 \right] + \frac{d\psi}{d\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\sqrt{g}}{R^2} \nabla \rho \cdot \nabla \theta \right] \right\} = -R^2 \frac{d\rho}{d\psi} - T \frac{dT}{d\psi}$$

— (4.1)

と表わされる。また、採用しているポロイダル角 θ の定義が

5. 制約条件

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial Z}{\partial \rho} = \frac{\sqrt{R}}{R} \quad \text{--- (4.2)}$$

が課せられる。方程式 (4.1), (4.2) の各フーリエ成分から, R_m , Z_m , $\frac{dZ}{d\rho}$ についての常微分方程式が得られるが, きわめて非線形な方程式である。

モード展開法とは別に, 作用素 Δ^* の線形性を保存した逆平衡解法がある²⁾。グラッド・ジャフノフ方程式は (R, Z) 座標で解くが, その時, 図1に示すような三角形要素と四角形要素を用いた有限要素近似を採用し, プラズマ内における節点が常に $\psi = \text{一定}$ 上にくるように要素を再構成しながら反復的に方程式を解く。精度の高い平衡を求めるには, 節点の数を多くする必要があるため, 有限要素近似から帰着する一次方程式はSOR法で解いている。

図2は, この方法で計算した

$$R = R(s, \theta)$$

$$Z = Z(s, \theta)$$

の (s, θ) 面上での等高線

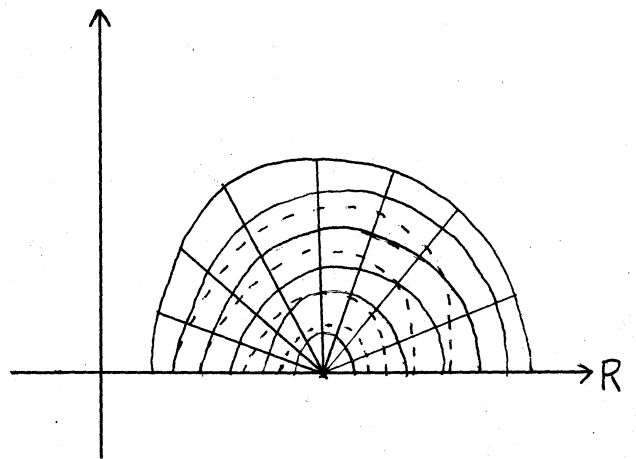


図1. 三角形要素と四角形要素
点線は ψ の等高線

を示している。実線が R で破線は Z を表わす ($s = \sqrt{r}$, また θ は等中線の長さ L に比例している)。また、安定性解析に必要な写像は、 R および Z に二次元スプライン補間を施し、座標変換

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Z} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

にもとづいて行なうことができる。

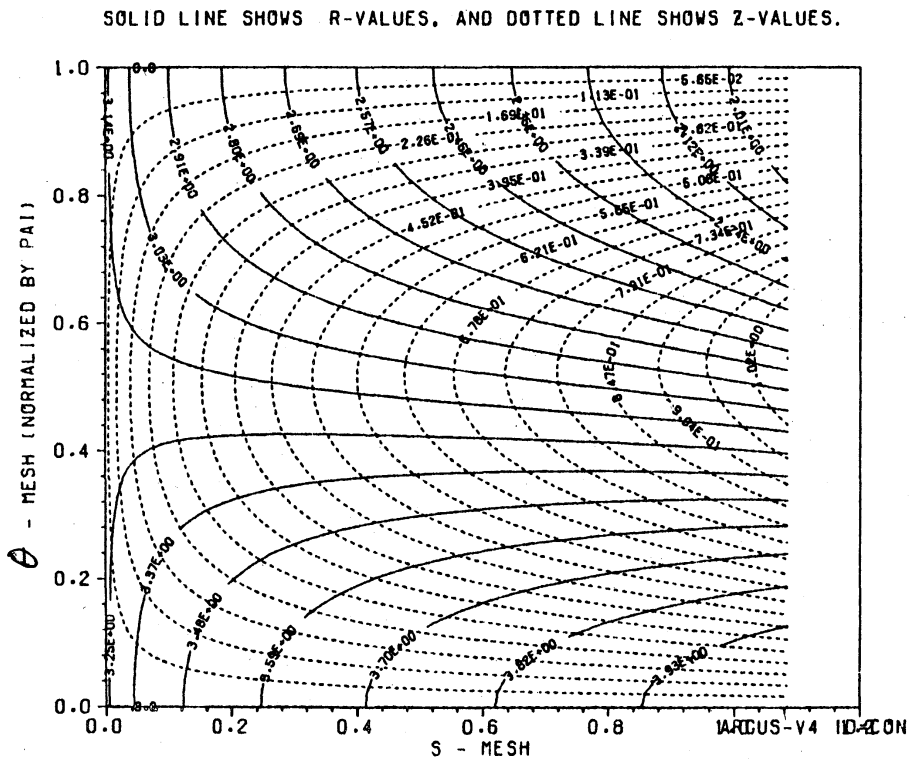


図2. 逆平衡解法より計算した R (実線) と Z (破線) の等高線。 $s = \sqrt{r}$ で θ は等中線の長さ L に比例している。

文献

- 1) 徳田, 「計算機シミュレーションによるトカマク・プラズマの安定性の研究」, JAERI-M 84-040 (1984).
- 2) T. Takeda and T. Tsunematsu, "A Numerical Code SELENE to Calculate Axisymmetric Toroidal MHD Equilibria", JAERI-M 8042 (1978).