

## $\alpha$ 粒子軌道による平衡の非等方性

原研核融合 滝塚知典 (Tomonori Takizuka)

原研核融合 常松俊秀 (Toshihide Tsunematsu)

### 1. はじめに

トカマク型核融合実験炉において、中性粒子入射加熱時の磁場に平行または垂直方向のビーム成分によって、プラズマ圧力の非等方が生じる。DT核燃焼時には、高エネルギー $\alpha$ 粒子のドリフト軌道が磁気面からずれることにより、やはり圧力非等が生じる。この論文では、上記のような圧力非等があるときのトカマク・プラズマの巨視的平衡方程式を導出する。古典的な減速過程の間の $\alpha$ 粒子軌道を数値的に追跡することにより、どのような圧力非等が生じるかを調べる。

### 2. $\alpha$ 粒子圧力

DT核融合反応において、3.5 MeVのエネルギーを持つ $\alpha$ 粒子 ${}^4\text{He}$ が生じる。重水素(D)と三重水素(T)のイオン温度

を共に  $T$  keV とすると DT 反応率は

$$\langle \sigma v \rangle = 3.7 \times 10^{-18} \exp(-20/T^{1/3}) T^{-2/3} / h \quad \text{m}^3/\text{s}$$

$$h = 1 + (T/70)^{1.3}$$

と表わせる [1]。第 1 図から分かるように、 $T \sim 10$  keV では  $\langle \sigma v \rangle \approx 7 \times 10^{-25} T^2 \text{ m}^3/\text{s}$  と近似できる (点線)。したがって  $\alpha$  粒子発生率は

$$S = n_D n_T \langle \sigma v \rangle \sim (nT)^2$$

とほぼプラズマ圧力の 2 乗に比例する。

このように生じた高エネルギーの  $\alpha$  粒子はプラズマにエネルギーを与えながら減速する。

古典的な減速過程のみを考慮す

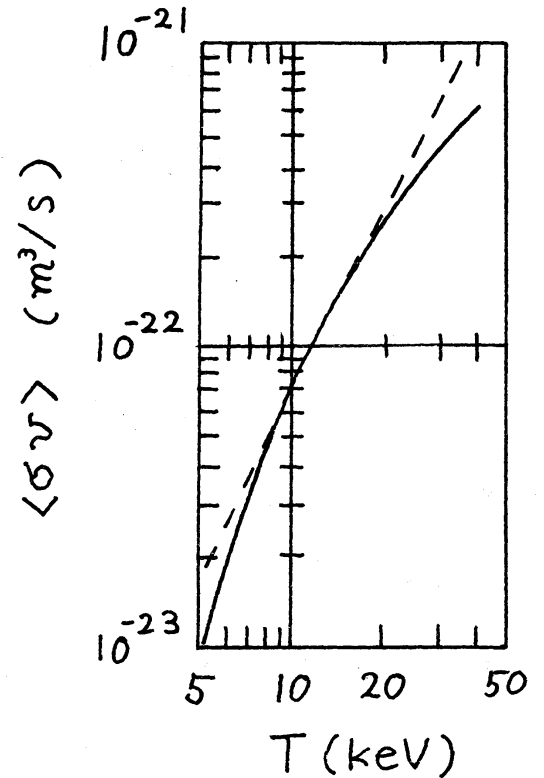
ると、エネルギー減衰衝突周波数  $\nu_s$  と  $90^\circ$  散乱衝突周波数

$\nu_\alpha$  は次のように表わせる。

$$\nu_s^{\alpha/e} \approx 1.8 \times 10^{-18} n_e T_e^{-3/2} \text{ sec}^{-1}$$

$$\nu_s^{\alpha/i} \approx \nu_\alpha^{\alpha/i} \approx 2 \times 10^{-16} n_e E_\alpha^{-3/2} \text{ sec}^{-1}$$

ここで  $\alpha/e$  は電子との衝突、 $\alpha/i$  はイオンとの衝突を示し、電子密度  $n_e$  は  $\text{m}^{-3}$  単位、電子温度  $T_e$  と  $\alpha$  粒子エネルギー



第 1 図

$E_\alpha$  は keV 単位で表わす。これから分かるように  $E_\alpha > 23 T_e$  のときは  $v_s^{\alpha/e} > v_d^{\alpha/i}$  であり、したがって高エネルギーの粒子は主に電子にエネルギーを与えながら減速し、その間ほとんどピッチ角散乱されない。

$\alpha$  粒子圧力とプラズマ圧力の比、 $P_\alpha/P$ 、は古典的減速過程のみを考慮するとき次のように与えられる。

$$\frac{P_\alpha}{P} \approx \left( \frac{2}{3} E_{d0} \frac{S}{v_s^{\alpha/e}} \right) / 2nT.$$

この式に  $E_{d0} = 3.5 \text{ MeV}$ 、上述の  $S$  の近似式と  $v_s^{\alpha/e}$  を代入すれば  $P_\alpha/P \approx 10^{-4} T^{\frac{5}{2}}$  ( $T$ : keV 単位) となり、この比はプラズマ温度だけで表わせる。 $T = 20 \text{ keV}$  のときは、この比は約 20% になる。圧力の非等方性は  $P_\alpha/P$  に比例するので高温のプラズマほど圧力非等方性は大きくなる。

### 3. $\alpha$ 粒子軌道

トカマク磁場中の高エネルギー  $\alpha$  粒子の軌道は案内中心 (guiding-center) の軌道を追跡することによって求められる。案内中心の運動方程式は

$$\mu \equiv \frac{m v_\perp^2}{2B} = \text{const.}$$

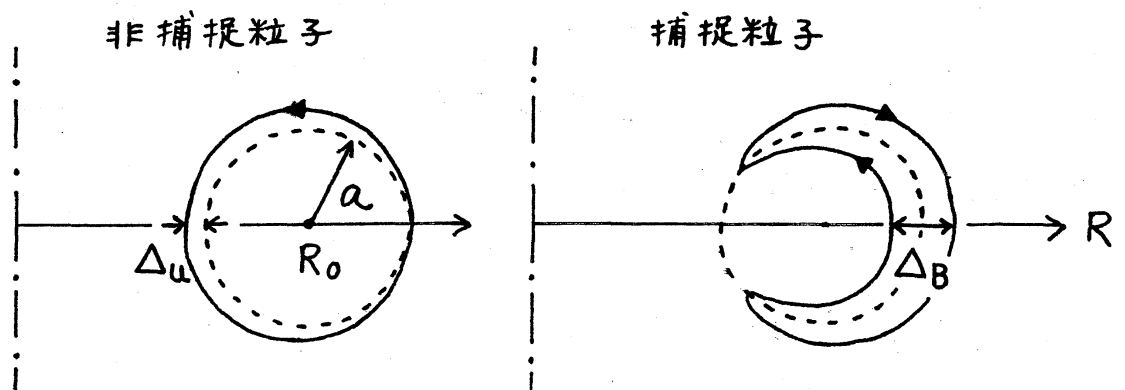
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{B}}{B} v_{||} + \vec{w}_D$$

$$\frac{dv_{||}}{dt} = -\frac{v_{\perp}^2}{2B^3} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \frac{B^2}{2}$$

と与えられる。ここで  $m$  は質量、 $v_{\perp}$  は磁カ線垂直方向速さ、 $v_{||}$  は磁カ線平行方向速さ、 $\vec{B}$  は磁場、 $\vec{r}$  は案内中心の位置を示す。ドリフト速度  $\vec{w}_D$  は

$$\vec{w}_D = \frac{m v_{\perp}^2}{2 q B^4} \vec{B} \times \vec{\nabla} \frac{B^2}{2} + \frac{m v_{||}^2}{q B^4} \vec{B} \times (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

であり、その大きさはほぼ  $\sim (r_L/R_0) v$  である。ここで  $q$  は電荷、 $r_L = m v / q B$  はラーマー半径、 $R_0$  はトカマクの大半径を示す。このドリフト速度によつて案内中心軌道は磁カ線を横切る運動をする。磁気面と軌道とのずれは、非捕捉粒子、 $|v_{||m}/v| > (2a/R_0)^{1/2}$ 、においては



第 2 図

$$\Delta u \approx \sqrt{2} (a/R_0) r_{Lp}$$

捕捉粒子,  $|v_{||m}/v| < (2a/R_0)^{\frac{1}{2}}$ , においては

$$\Delta_B \approx 2\sqrt{2} (a/R_0)^{\frac{1}{2}} r_{Lp}$$

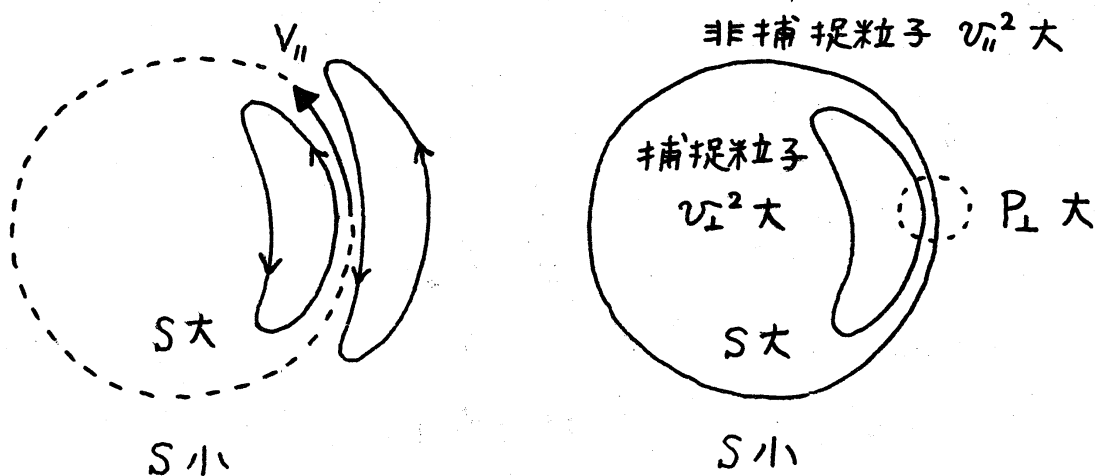
となる。ここで  $v_{||m}$  はトーラス外側での磁気線方向速度であり、 $r_{Lp}$  はポロイダル磁場  $B_p$  で決められるラーマー半径  $r_{Lp} = m v / \delta B_p$  である。これらの軌道を第2図に示す。

バナナ巾  $\Delta_B$  は  $\Delta u$  より大きく、3.5 MeV の  $\alpha$  粒子の  $\Delta_B$  はプラズマ半径  $a$  に比べて無視できない大きさである。その比  $\Delta_B/a$  をプラズマ電流  $I_p$  MA を用いて表わすと

$$\Delta_B/a \approx 3 (a/R_0)^{\frac{1}{2}} / I_p$$

となり  $I_p = 5$  MA のとき 20~30% の値となる。

このような軌道の磁気面からのずれがあつて、 $\Delta_B$  がプラズマ圧力変化の特徴的長さと同程度であるとき、高圧力領域



第3図

( $\alpha$ 粒子発生率  $S$  が大きい領域) で生じる捕提  $\alpha$  粒子が低圧力領域へドリフト運動で運び出されることにより、第3図に示すように磁力線方向の流速  $V_{||}$  やプラズマ圧力の非等方性 ( $P_{||} \neq P_{\perp}$ ) が造り出される。

#### 4. 平衡方程式

この章において、高エネルギー  $\alpha$  粒子の軌道の磁気面からのずれが造り出す圧力非等方性があるトカマク・プラズマの平衡方程式を導く。

座標系 ( $\vec{g} \times \vec{b}$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{b}$ ) の中で、巨視的平衡方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} / \mu_0 \quad (1)$$

を考える。ここで  $\mu_0$  は真空の透磁率である。単位ベクトル  $\vec{b}$  は磁場  $\vec{B}$  に平行であり、 $\vec{b} = \vec{B} / B$ 、単位ベクトル  $\vec{g}$  は  $B$  の勾配の磁場垂直方向成分に沿って、 $\vec{g} = \vec{\nabla}_{\perp} B / |\vec{\nabla}_{\perp} B|$  ( $\vec{\nabla}_{\perp} \equiv \vec{\nabla} - \vec{b} \vec{b} \cdot \vec{\nabla}$ )。圧力テンソル  $\vec{P}$  は

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_{\perp} & 0 & P_{*} \\ 0 & P_{\perp} & 0 \\ P_{*} & 0 & P_{||} \end{pmatrix} \quad (2)$$

のように与えられる。 $\vec{b}$  に平行なプラズマの流れの効果は  $\vec{P}$  の中に含めることができる。対角要素は、 $P_{\perp} = \rho \langle \tilde{v}_{\perp}^2 \rangle / 2$ 、 $P_{||} = \rho (\langle \tilde{v}_{||}^2 \rangle + V_{||}^2)$  と与えられる。ここで  $\rho$  は質量密度

$\vec{v}$  はランダム速度、 $V_{||}$  は  $\vec{b}$  に沿ったプラズマ流速を示し、ブラケット  $\langle \rangle$  は速度空間上の平均を表わす。粒子のドリフト運動によつて  $\vec{g} \times \vec{b}$  方向のプラズマ流速  $\vec{U}_{\perp}$  が生じることにより、非対角要素、 $P_* = \rho U_{\perp} V_{||}$  が現われる。方程式

(1) の磁力線平行方向成分は次式のように書ける、

$$\vec{b} \cdot \vec{\nabla} P_{||} + (P_{||} - P_{\perp}) \vec{\nabla} \cdot \vec{b} + (\vec{g} \times \vec{b}) \cdot \vec{\nabla} P_* = 0 \quad (3)$$

また磁場垂直方向成分は次式のように書ける、

$$\nabla_{\perp} P_{\perp} + (P_{||} - P_{\perp}) \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \vec{b} = (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} / \mu_0 \quad (4)$$

比、 $|P_* / P|$  は一般的に  $\varepsilon^3$  より小さいので ( $\varepsilon = a/R_0$  は逆アスペクト比)、方程式 (4) においては  $(\vec{g} \times \vec{b}) \vec{b} \cdot \vec{\nabla} P_*$  の項は無視している。しかしながら、 $\vec{b} \cdot \vec{\nabla} P_{||} \lesssim \varepsilon^2 P / R_0$  であり  $(\vec{g} \times \vec{b}) \cdot \vec{\nabla} P_* \lesssim \varepsilon^3 P / a$  であることから、方程式 (3) においては  $P_*$  の効果が重要となるときがある。

軸対称トーラスにおいては、磁場  $\vec{B}$  は

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \phi \times \vec{\nabla} \psi + T \vec{\nabla} \phi \quad (5)$$

のように書き表わせる。ここで  $\phi$  はトロイダル角、 $\psi$  はポロイダル磁束関数、 $T$  はトロイダル磁束関数である。 $\vec{P}$  の要素は  $\psi$  と  $B$  の関数として与えられるので、方程式 (3) は次のように書き改めることができる、

$$(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} B) \left( \frac{\partial P_{||}}{\partial B} + \frac{P_{\perp} - P_{||}}{B} \right) + (\vec{b} \times \vec{g}) \cdot \vec{\nabla} \psi \frac{\partial P_*}{\partial \psi} = 0 \quad (6)$$

軸対称等方圧カプラズマの平衡方程式である Grad-Shafranov 方程式の類似方程式が方程式 (4) から導かれる。

$$\Delta^* \psi = -\frac{\mu_0 R^2}{\sigma} \frac{\partial P_{||}}{\partial \psi} - \frac{T}{\sigma} \frac{\partial \delta T}{\partial \psi} \Big|_{\chi} - \frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \sigma - \frac{\partial B}{\partial \psi} \Big|_{\chi} \left( \frac{\partial P_{||}}{\partial B} + \frac{P_{\perp} - P_{||}}{B} \right) \quad (7)$$

ここで演算子  $\Delta^*$  は  $R^2 \vec{\nabla} \cdot (R^{-2} \vec{\nabla})$ 、 $\sigma = 1 + \mu_0 (P_{\perp} - P_{||}) / B^2$  であり、 $R$  は対称軸からの距離を示す。さらに方程式 (4) から、 $\delta T$  が  $\psi$  だけの関数でなくポロイダル角  $\chi$  の関数でもあることが分かる ( $\psi, \chi, \phi$  は直交座標系に選ぶ)。

$$\frac{\partial \delta T}{\partial \chi} \Big|_{\psi} = -\frac{\mu_0 T}{B^2} \frac{\partial B}{\partial \chi} \Big|_{\psi} \left( \frac{\partial P_{||}}{\partial B} + \frac{P_{\perp} - P_{||}}{B} \right) \quad (8)$$

方程式 (6) - (8) が高エネルギー  $\alpha$  粒子のある非等方圧カトカマク・プラズマの平衡方程式である。 $P_*$  が 0 のとき、これらの方程式は文献 [2] にあるテンソル圧力平衡方程式に一致する。

## 5. 非等方圧力

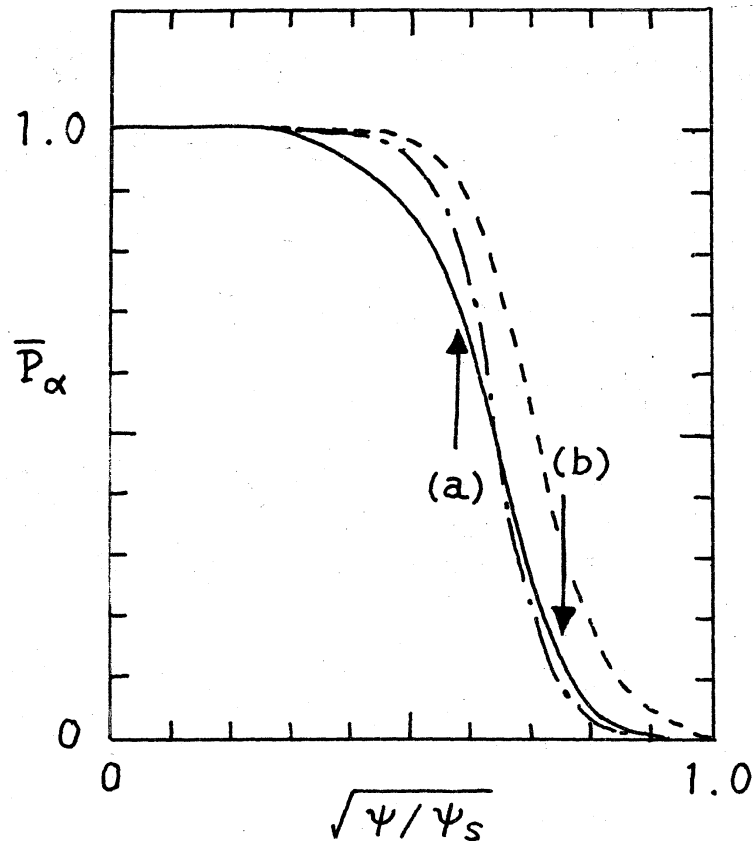
プラズマ圧力の非等方性は  $\alpha$  粒子圧力の非等方から生じると考えて、これを求めるために次のような手順で数値計算を行う。



- (i) 装置パラメータ、プラズマ・パラメータを与える。
- (ii) 等方圧力平衡を求める。
- (iii) 平衡圧力分布から $\alpha$ 粒子発生率を決める。
- (iv) 平衡磁場配位の中で、 $\alpha$ 粒子のguiding-centerの軌道を追跡する。古典的な減速過程はモンテ・カルロ法でシミュレートする。
- (v) 多くの $\alpha$ 粒子の軌道を追跡して、 $\alpha$ 粒子圧力の空間分布を求める。
- (vi) この非等方性をもとに、非等方圧力平衡を求める。
- (vii) 収束するまで(iii) - (vi)の手順を繰り返す。

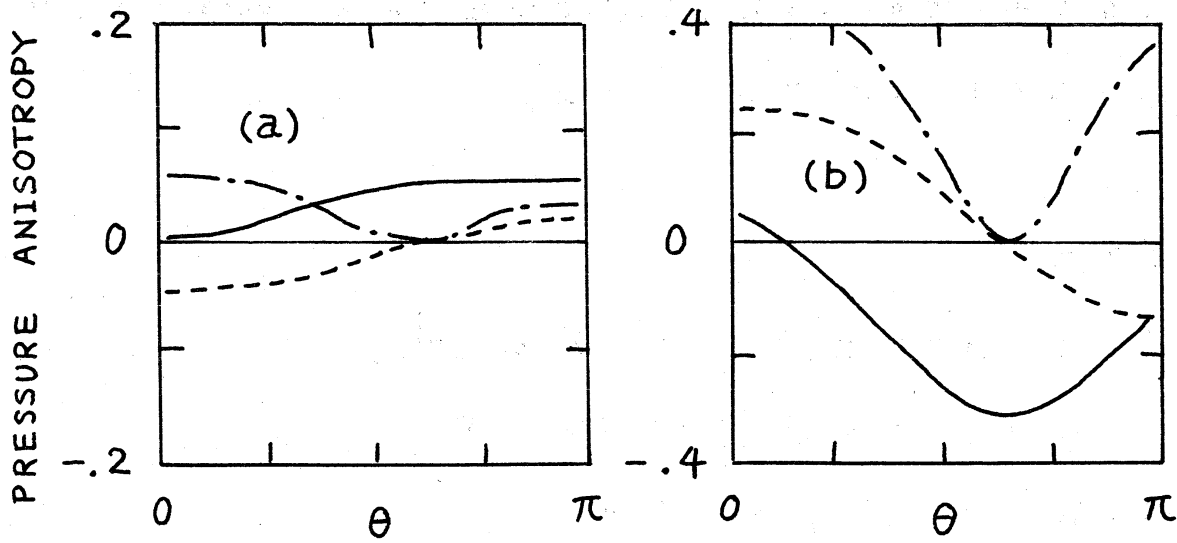
数値計算の結果を示す。円形断面のトカマク型実験炉を考  
える。装置の大きさは、 $R_0 = 5.2 \text{ m}$ 、 $a = 1.2 \text{ m}$ 、 $B_t = 5.5 \text{ T}$   
 $I_p = 4.5 \text{ MA}$ とし、ポロイダル・ベータ値 $\beta_J$ は1.4とする。  
プラズマ圧力の径方向分布は第4図の点線のように選ぶ。こ  
こで $\psi$ は磁気軸上で0、プラズマ表面で $\psi_s$ となっている。  
 $\alpha$ 粒子圧力 $\bar{P}_\alpha$ が軌道追跡数値計算により第4図の実線のよ  
うに求められる。 $P_\alpha$ は $P_\alpha = (P_{\parallel\alpha} + 2P_{\perp\alpha})/3$ で定義され  
さらに $\bar{P}_\alpha$ はこの $P_\alpha$ をそれぞれの磁気面上で平均したもの  
である。この装置パラメータでは、3.5 MeVの $\alpha$ 粒子のバナ  
ナ中 $\Delta_B$ は $\alpha$ 粒子の発生分布(第4図の一点鎖線)の特徴的

長さ  $l$  と同程度であることから、 $\bar{P}_\alpha$  の勾配は  $l^{-1}$  より小さくなっている。



第 4 図

第 5 図に圧力非等方性のポロイダル分布を示す。ポロイダル角  $\theta$  はトラス外側で  $0$ 、内側で  $\pi$  となり、磁気面のポロイダル面投影を等間隔に切るように設定されている。実線が  $(P_{||\alpha} - \bar{P}_\alpha) / \bar{P}_\alpha$ 、点線が  $(P_{\perp\alpha} - \bar{P}_\alpha) / \bar{P}_\alpha$  を示している。 $\alpha$  粒子流体の磁気線方向流れ  $V_{||\alpha}$  は低圧力領域 (b) で大きくなり、 $P_{||\alpha}$  の中に占める  $\rho_\alpha V_{||\alpha}^2$  の割合は非常に大きくなっている ( $\rho_\alpha V_{||\alpha}^2$  は一点鎖線)。これは第 3 章で示した



第 5 図

ように、高圧力領域(a)で発生した捕捉 $\alpha$ 粒子が低圧力領域(b)にドリフト運動で運び出されることによるものであり、したがって特にトラス外側( $\theta \approx 0$ )で  $\rho_{\alpha} V_{||\alpha}^2$  は大きくなっている。高圧力領域(a)では  $P_{||\alpha}$  が  $P_{\perp\alpha}$  より大きいのに対し、低圧力領域(b)では  $P_{\perp\alpha}$  が  $P_{||\alpha}$  よりも大きく、その非等方度も(a)より(b)がかなり大きくなっている。これらの結果において  $\partial P_{||} / \partial B \approx (P_{||} - P_{\perp}) / B$  となっていることから、第4章の方程式(6)における  $P_*$  の効果が重要であることが分かる。この数値計算では、磁気軸上のプラズマ温度が 10 keV に選ばれているので、 $\alpha$  粒子圧力はプラズマ圧力の約3%となっており、したがって全圧力中の非等方度は1%以下となっている。この大きさの非等方性では、最初に与

えた等方圧力平衡はほとんど変化しないので、数値計算手順としては(i) - (v)で終わっている。

### 参考文献

- [1] W. Horton, Jr., T. Kamash,  
Nucl. Fusion 13 (1973) 753.
- [2] W. A. Cooper et al.,  
Nucl. Fusion 20 (1980) 985.