数理解析研究所講究録
第533巻 1984年 86-107

特異性をもつ完全積分可能な線型Pfaff方程式のGevrey強漸近解

東大理　矢神　毅（Takesi YAGAMI）

ここで扱うのは、次の形の完全積分可能な線型Pfaff方程式である：

$$(1)\quad \begin{cases} x^{p+1}\dfrac{\partial u}{\partial x} = A(x,y)\,u \\ y^{q+1}\dfrac{\partial u}{\partial y} = B(x,y)\,u \end{cases}$$

$$p,q\in\mathbb{N}\ ,\quad A,B\in M_n(\mathbb{C}\{x,y\})$$

(1)の完全積分可能条件は、

$$x^{p+1}\frac{\partial B}{\partial x} - y^{q+1}\frac{\partial A}{\partial y} = AB-BA$$

で表わされる。この条件の下で(1)の解全体は、$\mathbb{C}$上n次元の線型空間をなす。常微分方程式の場合にならって、(1)の形式解，漸近解 etc. についても色々と調べられているが、ここでは、(1)の"Gevrey強漸近解"の存在（というより、むしろ(1)の解のGevrey強漸近性）について述べる。これは、常微分方程式について Ramis [6] によりなされた事の線型Pfaff方程式への拡張である。証明の方針は、形式解を求

める際に使われる形式的変換が Borel 総和可能であることを示して、その Borel 和をとることにより漸近解を作るのであるが、Borel 総和法を用いることにより Majima [3] で導入された強漸近性の概念が自然に現れることに注意したい。

§1. Gevrey 強漸近展開と Borel 総和法

この節では、主な道具である Borel の総和法と、その Gevrey 漸近展開との関係について説明する。 まず、1 変数の形式巾級数

$$\hat{f}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[[x]]$$

に対して、たとえこれが発散しても、積分

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu!}t^\nu\right)e^{-\frac{t}{x}}\,dt$$

が存在するときに、$f(x)$ を $\hat{f}(x)$ の Borel 和という。$\hat{f}(x)$ が収束するときは、当然だが $f(x)$ は $\hat{f}(x)$ に一致する。これを拡張して、2 変数の形式巾級数の (p,q)-Borel 和というものを次のように定義する。

定義　$p,q\geq 1$, $\alpha_1<\beta_1$, $\alpha_2<\beta_2$ のとき、次の条件 (*) をみたす正則函数 $F(t,s)$ の全体を $\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$ と書く：

(*) $\exists A, B > 0$ があり $F(t,s)$ は

$$\{t \mid |t|<A \text{ または } \alpha_1<\arg t<\beta_1\} \times \{s \mid |s|<B \text{ または } \alpha_2<\arg s<\beta_2\}$$

で正則であり、更に、$\alpha_i < {}^\forall\alpha_i' \leqq {}^\forall\beta_i' < \beta_i \quad (i=1,2)$ に対して $\exists K, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ があり $\alpha_1' \leqq \arg t \leqq \beta_1'$, $\alpha_2' \leqq \arg s \leqq \beta_2'$ のとき

$$|F(t,s)| \leqq K e^{\lambda_1|t|^p + \lambda_2|s|^q}$$

が成り立つ。

また、$\mathcal{B}_{p,q} : \mathbb{C}[[x,y]] \longrightarrow \mathbb{C}[[t,s]]$ を

$$\sum a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \xmapsto{\mathcal{B}_{p,q}} \sum \frac{a_{\mu\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})} t^\mu s^\nu$$

で定め、

$$\hat{\mathbb{O}}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2) = \{\hat{f} \in \mathbb{C}[[x,y]] \mid \mathcal{B}_{p,q}(\hat{f}) \in \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\}$$

とおく。このとき、$\hat{f} \in \hat{\mathbb{O}}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$ の (p,q)-Borel和を

$$f(x,y) = \frac{pq}{x^p y^q} \int_0^{\infty(\theta_1)} \int_0^{\infty(\theta_2)} \mathcal{B}_{p,q}(\hat{f})(t,s)\, e^{-(\frac{t}{x})^p - (\frac{s}{y})^q} t^{p-1} s^{q-1}\, dt\, ds$$

で定義する。但し積分路は、$\arg t = \theta_1$, $\arg s = \theta_2$ で、θ_1, θ_2 は、$\alpha_i < \theta_i < \beta_i$ で動くとする。 ———

次に Borel和ともとの形式巾級数の関係を説明するために、Gevrey強漸近展開なるものを定義する。これは、Majima [3] により導入された強漸近展開において、剰余項の増大度に制

限をつけたものである。

<u>定義</u> $\rho = 1 + \frac{1}{p}$, $\sigma = 1 + \frac{1}{q}$ $(p, q \geqq 1)$

$S = S_1 \times S_2$: 原点を頂点とする polysector とせよ。

このとき、$f(x,y) \in \mathbb{O}(S)$ が (ρ, σ) 級の Gevrey 強漸近展開可能とは、次の条件が成り立つこと：

$\exists f_{*,\nu}(x) \in \mathbb{O}(S_1)$, $\exists f_{\mu,*}(y) \in \mathbb{O}(S_2)$

$\exists \hat{f}(x,y) = \sum a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \in \mathbb{C}[[x,y]]$

があり、

(2) $$R_{m,n}(x,y) = f(x,y) - \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu f_{\mu,*}(y) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f_{*,\nu}(x) y^\nu + \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

とおくとき、S の任意の closed subpolysector S' に対して $\exists K, A, B > 0$ があり、$(x,y) \in S'$ のとき

$$|R_{m,n}(x,y)| \leqq K A^m B^n \Gamma\left(1 + \frac{m}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{n}{q}\right) |x|^m |y|^n$$

が成り立つ ——

また、$\exists R_1, R_2 > 0$ があり polysector

$$\{x \mid |x| < R_1, \alpha_1 < \arg x < \beta_1\} \times \{y \mid |y| < R_2, \alpha_2 < \arg y < \beta_2\}$$

に於て (ρ, σ) 級 Gevrey 強漸近展開可能 である函数全体を、$\mathcal{A}_{(\rho,\sigma)}(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$ と書く。

上の $\hat{f}$ のことは、f の (ρ, σ) 級 Gevrey 強漸近展開といい、$\hat{f} = J(f)$ と書く。

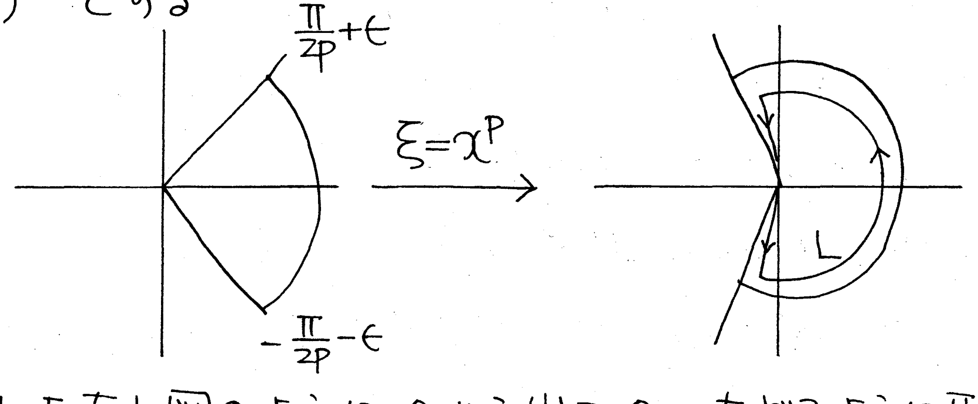
次の定理は、polysectorのひらきが $\left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}\right)$ より大きい時に J が1対1になること、及び J の像の特徴付けを与えるもので、Watson[8], Nevanlinna[4],[5]の2変数版である。

<u>定理1</u>　$\rho=1+\frac{1}{p}$, $\sigma=1+\frac{1}{q}$; $\alpha_i<\beta_i$ $(i=1,2)$ のとき

$$J: \mathcal{A}_{(\rho,\sigma)}\left(\alpha_1-\frac{\pi}{2p}, \beta_1+\frac{\pi}{2p}; \alpha_2-\frac{\pi}{2q}, \beta_2+\frac{\pi}{2q}\right) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$$

は、微分を保つ環の同型写像であり、その逆写像は、(p,q)-Borel和を取ることで与えられる。

<u>証明</u>　まず1変数の場合の対応 i.e. ρ 級Gevrey漸近展開可能函数と、p-Borel総和可能形式巾級数の対応の大略を述べる。$\alpha_1=-\epsilon$, $\beta_1=\epsilon$ $(\epsilon>0)$ の場合に限ってよいので、まず $f(x)\in\mathcal{A}_\rho(-\epsilon,\epsilon)$ とする。$\xi=x^p$ とおき $\bar{f}(\xi)=f(x)=f(\xi^{\frac{1}{p}})$ とする



積分路Lを右上図のように0から出て0にもどるように取り、

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{f}(\xi)}{\xi}e^{\frac{t^p}{\xi}}d\xi$$

とおくと $F(t)$ が $f(x)$ に対応する $\mathcal{H}_p(-\epsilon,\epsilon)$ の元となる（つまり $F=B_p(\hat{f})$ となる）。実際

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu x^\nu+R_n(x) \quad , |R_n(x)|\leqq KA^n\Gamma(1+\frac{n}{p})|x|^n$$

とすると、

$$F(t)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_\nu}{\Gamma(1+\frac{\nu}{p})}t^\nu + F_n(t)$$

$$F_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{R}_n(\xi)}{\xi}e^{\frac{t^p}{\xi}}d\xi \quad , \overline{R}_n(\xi):=R_n(x)=R_n(\xi^{\frac{1}{p}})$$

であり、

$$|F_n(t)|\leqq\frac{1}{2\pi}KA^n\Gamma(1+\frac{n}{p})\int_L|\xi|^{\frac{n}{p}-1}e^{Re\left(\frac{t^p}{\xi}\right)}|d\xi|$$

が分る。

$|F_n(t)|$ を評するために、積分路 L を動かす。円弧の部分は、半径 $=\frac{p}{n}|t|^p$ とし Stirling の公式を用いると、

$$|F_n(t)|\text{への円弧の寄与}\leqq K_1\sqrt{n}\,(A|t|)^n$$

半直線の部分は、$t=|t|e^{i\varphi}$ とし $|\varphi|\leqq{}^\exists\epsilon_0<\epsilon$ で t を動かせば、L の半直線の角度を適当にかえて、また L 上で

$$Re\left(\frac{t^p}{\xi}\right)\leqq-\delta\frac{|t|^p}{|\xi|} \quad ({}^\exists\delta>0)$$

であることより、

$$|F_n(t)|\text{への半直線の寄与}\leqq\frac{K_2}{\delta}A^n n^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{n}{p}}|t|^n$$

従って、まず $|t|<A^{-1}$ では

$$F(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\Gamma(1+\frac{\nu}{p})}t^\nu \quad \text{は収束。}$$

そして $|\varphi|<\epsilon$ で $F(t)$ が正則になることも分る。$F(t)$ の増大度については、

$$F(t)=a_0+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{R_1(\xi)}}{\xi}e^{\frac{t^p}{\xi}}d\xi$$

と書き $\xi^{\frac{1}{p}}\overline{R_1(\xi)}$ が有界であることに注意すれば、$Re(\xi^{-1})\leqq\lambda$ $(\xi\in L)$ なる $\lambda>0$ に対して

$$|F(t)|\leqq|a_0|+K_2e^{\lambda|t|^p}$$

が分り、$F(t)\in\mathcal{H}_p(-\epsilon,\epsilon)$ が示される。

逆に $F(t)\in\mathcal{H}_p(-\epsilon,\epsilon)$ が与えられたとき、原点の近傍で、

$$F(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\Gamma(1+\frac{\nu}{p})}t^\nu \qquad , \ |t|<A^{-1}$$

と展開されているならば、

$$f(x)=\frac{p}{x^p}\int_0^{\infty(\theta)}F(t)e^{-\frac{t^p}{x^p}}t^{p-1}dt \qquad , \ |\theta|<\epsilon$$

とおくと、$f(x)\in\mathcal{A}_p(-\epsilon-\frac{\pi}{2p},\epsilon+\frac{\pi}{2p})$ で、$J(f)=\sum a_\nu x^\nu\in\hat{\mathcal{O}}_p(-\epsilon,\epsilon)$ となることを示す。$|\arg t|\leqslant\epsilon'<\epsilon$ で $|F(t)|\leqq Ke^{\lambda|t|^p}$ であるから、

$$F(t)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_\nu}{\Gamma(1+\frac{\nu}{p})}t^\nu+t^nF_n(t)$$

とおくと、$|F_n(t)|\leqq K_1A^ne^{\lambda|t|^p}$。これより

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu x^\nu+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{p}{x^p}\int_0^{\infty(\theta)}t^nF_n(t)e^{-\frac{t^p}{x^p}}t^{p-1}dt$$

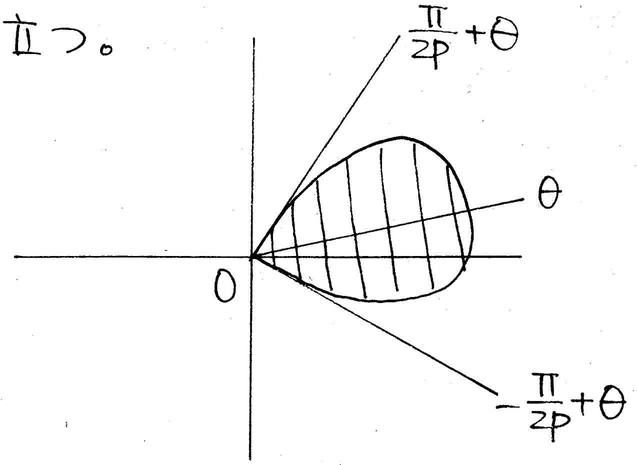
ここで、xの動く範囲を

$$\lambda|t|^p - \mathrm{Re}\left(\frac{t^p}{x^p}\right) \leqq -\delta\left|\frac{t}{x}\right|^p \qquad (\delta > 0)$$

にすると、そこで

$$|R_n(x)| \leqq K_1 \frac{A^n}{\delta^{\frac{n}{p}+1}} \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right) |x|^n$$

となる。$f(x)$の定義式における積分路 $\arg t = \theta$ を $|\theta| < \epsilon$ で変えて、また δ を $\delta > 0$ で変えることにより $f(x)$ は $|\arg x| < \frac{\pi}{2p} + \epsilon$ のある sector で正則となり、$f(x) \in \mathcal{A}_p\left(-\frac{\pi}{2p}-\epsilon, \frac{\pi}{2p}+\epsilon\right)$ が成り立つ。

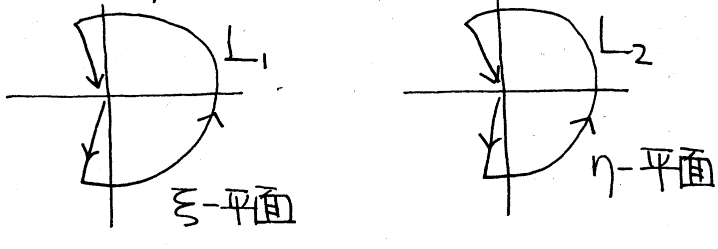


$\arg t = \theta$ のときの
$\lambda|t|^p - \mathrm{Re}\left(\frac{t}{x}\right)^p \leqq -\delta\left|\frac{t}{x}\right|^p$
の図

これで一変数の場合の $\mathcal{A}_p\left(\alpha_1-\frac{\pi}{2p}, \beta_1+\frac{\pi}{2p}\right)$ と $\widehat{\mathcal{O}}_p(\alpha_1, \beta_1)$ との対応が示された。次に2変数の場合に移る。今度も $\beta_i = \epsilon_i = -\alpha_i$ の場合に限ってよい。$f(x,y) \in \mathcal{A}_{(p,\sigma)}\left(\epsilon_1-\frac{\pi}{2p}, \epsilon_1+\frac{\pi}{2p}; -\epsilon_2-\frac{\pi}{2q}, \epsilon_2+\frac{\pi}{2q}\right)$ に対して変数を $\xi = x^p$, $\eta = y^q$ と取りかえたものを

$$\overline{f}(\xi, \eta) := f(x, y) = f\left(\xi^{\frac{1}{p}}, \eta^{\frac{1}{q}}\right)$$

とし、ξ-平面, η-平面上に積分路 L_1, L_2 を前のように



と取って

$$F(t,s)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\bar{f}(\xi,\eta)}{\xi\eta}e^{\frac{t^p}{\xi}+\frac{s^q}{\eta}}d\xi d\eta$$

とおく。これが f に対応すべき $\mathcal{H}_{(\rho,\sigma)}$ の元である。Gevrey 強漸近性の定義における (2) 式を上式に代入すれば、

$$F(t,s)=\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{t^\mu}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})}F_{\mu,*}(s)+\sum_{\nu=0}^{n-1}F_{*,\nu}(t)\frac{s^\nu}{\Gamma(1+\frac{\nu}{q})}$$
$$-\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_{\mu\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})}t^\mu s^\nu \quad +\Phi_{m,n}(t,s)$$

但し、

$$F_{\mu,*}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\bar{f}_{\mu,*}(\eta)}{\eta}e^{\frac{s^q}{\eta}}d\eta$$

$$F_{*,\nu}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\bar{f}_{*,\nu}(\xi)}{\xi}e^{\frac{t^p}{\xi}}d\xi$$

$$\Phi_{m,n}(t,s)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\iint_{L_1L_2}\frac{\bar{R}_{m,n}(\xi,\eta)}{\xi\eta}e^{\frac{t^p}{\xi}+\frac{s^q}{\eta}}d\xi d\eta$$

(2)より、$f_{\mu,*}(y)$ は $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu}y^\nu$ を σ 級 Gevrey 漸近展開としてもつこと etc. はすぐ分るので、一変数の結果より

$$F_{\mu,*}(s)\in\mathcal{H}_\sigma(-\epsilon_2,\epsilon_2)\ ,\ F_{*,\nu}(t)\in\mathcal{H}_\rho(-\epsilon_1,\epsilon_1)$$

$\Phi_{m,n}(t,s)$ の評価も、一変数のときと同じようにすれば、$|t|<\frac{1}{A}$, $|s|<\frac{1}{B}$ のとき $\Phi_{m,n}(t,s)\to 0$ となり、$F(t,s)$ は

$$F(t,s)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{\mu\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})}t^{\mu}s^{\nu}$$

と表わされる。そして、$F(t,s)$ は $|\arg t|<\epsilon_1$, $|\arg s|<\epsilon_2$ でも正則となる。$F(t,s)$ の増大度についても

$$F(t,s)=F_{0,*}(s)+F_{*,0}(t)-a_{00}+\Phi_{1,1}(t,s)$$

と書き、$L_1\times L_2$ 上で $\xi^{-\frac{1}{p}}\eta^{-\frac{1}{q}}\overline{R}_{1,1}(\xi,\eta)$ が有界であることに注意すると

$$|\Phi_{1,1}(t,s)|\leqq\frac{1}{4\pi^2}\int_{L_1\times L_2}\left|\xi^{-\frac{1}{p}}\eta^{-\frac{1}{q}}\overline{R}_{1,1}(\xi,\eta)\right||\xi|^{-1+\frac{1}{p}}|\eta|^{-1+\frac{1}{q}}e^{Re(\frac{t^p}{\xi})+Re(\frac{s^q}{\eta})}|d\xi d\eta|$$

$$\leqq K'e^{\lambda_1|t|^p+\lambda_2|s|^q}\qquad(\exists K'>0)$$

但し、$\lambda_1\geqq Re(\frac{1}{\xi})$ on L_1 , $\lambda_2\geqq Re(\frac{1}{\eta})$ on L_2

なので、$F(t,s)\in\mathcal{H}_{(p,q)}(-\epsilon_1,\epsilon_1;-\epsilon_2,\epsilon_2)$ が分る。

逆に $F(t,s)\in\mathcal{H}_{(p,q)}(-\epsilon_1,\epsilon_1;-\epsilon_2,\epsilon_2)$ が与えられたとする。原点の近傍で

$$F(t,s)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{\mu\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})}t^{\mu}s^{\nu}$$

と展開され、$|\arg t|\leqslant\epsilon_1'<\epsilon_1$, $|\arg s|\leqslant\epsilon_2'<\epsilon_2$ に於て

$$|F(t,s)|\leqq Ke^{\lambda_1|t|^p+\lambda_2|s|^q}$$

であるとする。一変数の時と同様に

$$f(x,y)=\frac{pq}{x^py^q}\int_0^{\infty(\theta_1)}\int_0^{\infty(\theta_2)}F(t,s)e^{-(\frac{t}{x})^p-(\frac{s}{y})^q}t^{p-1}s^{q-1}dtds$$

とおくのだが、$f(x,y)$ の漸近性を示すために $F(t,s)$ を

$$F(t,s)=\sum_{\mu=0}^{m-1}\frac{t^{\mu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})}F_{\mu,*}(s)+\sum_{\nu=0}^{n-1}F_{*,\nu}(t)\frac{s}{\Gamma(1+\frac{\nu}{q})}-\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_{\mu\nu}t^{\mu}s^{\nu}}{\Gamma(1+\frac{\mu}{p})\Gamma(1+\frac{\nu}{q})}$$
$$+t^m s^n F_{m,n}(t,s)$$

と分解して代入すれば、自然に強漸近性が導かれる。この計算は1変数のときと全く同様なので省略する。以上で定理の略証を終わる。 $\square$

次に $B_{p,q}:\hat{\mathcal{O}}_{(p,q)}\longrightarrow\mathcal{H}_{(p,q)}$ により微分や積がどのようになるかを述べる。

<u>定義</u> $A(t,s),B(t,s)\in\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$ に対して

$$A\underset{p,q}{\#}B=pq\int_0^t\int_0^s A(\sqrt[p]{t^p-u^p},\sqrt[q]{s^q-v^q})B(u,v)u^{p-1}v^{q-1}\,du\,dv$$

$$A\underset{p,*}{\#}B=p\int_0^t A(\sqrt[p]{t^p-u^p},s)B(u,s)u^{p-1}du$$

$$A\underset{*,q}{\#}B=q\int_0^s A(t,\sqrt[q]{s^q-v^q})B(t,v)v^{q-1}dv$$

と定義する。但し、積分路は u,v それぞれに関して、0 と t 及び 0 と s を結ぶ線分とし、また $\sqrt[p]{t^p-u^p}$, $\sqrt[q]{s^q-v^q}$ は, $u=0$, $v=0$ のときそれぞれ t,s となる分枝をとるものとする。

このとき、$A\underset{p,q}{\#}B\in t^p s^q\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$, $A\underset{p,*}{\#}B\in t^p\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$, $A\underset{*,q}{\#}B\in s^q\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)$ が成り立つ。

次の命題は、$B_{p,q}(\hat{a}) = A$ のときは逆に

$$a = \frac{pq}{x^p y^q}\int_0^\infty\int_0^\infty A(t,s)e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^p-\left(\frac{s}{y}\right)^q}t^{p-1}s^{q-1}dtds$$

$$J(a) = \hat{a}$$

となることを用いて計算するだけなので証明を略す。

命題2　$B_{p,q}(\hat{a}) = A,\ B_{p,q}(\hat{b}) = B$ のとき

i) $B_{p,q}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}\right) = t\frac{\partial}{\partial t}$

$B_{p,q}\left(y\frac{\partial}{\partial y}\hat{a}\right) = s\frac{\partial}{\partial s}A$

ii) $B_{p,q}(x^p y^q \hat{a}\hat{b}) = A \underset{p,q}{\#} B$

iii) $$B_{p,q}(\hat{a}\hat{b}) = A(0,0)B(t,s) + \frac{1}{p}\frac{\frac{\partial A}{\partial t}(t,0)}{t^{p-1}} \underset{p,*}{\#} B(t,s) + \frac{1}{q}\frac{\frac{\partial A}{\partial s}(0,s)}{s^{q-1}} \underset{*,q}{\#} B(t,s) + \frac{1}{pq}\cdot\frac{\frac{\partial^2 A}{\partial t\partial s}(t,s)}{t^{p-1}s^{q-1}} \underset{p,q}{\#} B(t,s)$$

iv) $B_{p,q}\left(x^{p+1}\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}\right) = pA(t,s)t^p - p \underset{p,*}{\#} A(t,s)$

$B_{p,q}\left(y^{q+1}\frac{\partial}{\partial y}\hat{a}\right) = qA(t,s)s^q - q \underset{*,q}{\#} A(t,s)$

§2. Analytic Block-diagonalization

Pfaff系(1)の Formal Reduction において、形式変換の漸近的意味付けが必要となるのは、Block-diagonalization と呼ばれる段階のみである。以下、それについて説明する。

(1)の形のPfaff系に於て、今、$A, B \in M_n(\mathbb{C}[[x,y]])$ の状況を考える。つまり形式的なPfaff系とする。このとき、もし

$$A(0,0)=\begin{bmatrix} \mathring{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathring{A}_2 \end{bmatrix}$$ $\mathring{A}_1$ と $\mathring{A}_2$ は共通の固有値をもたない

であるならば、Pfaff系(1)は形式変換

$$u=T(x,y)u_1 \ , \qquad T(x,y)=1_n+\begin{bmatrix} 0 & T_{12} \\ T_{21} & 0 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}[[x,y]])$$

により

$$\begin{cases} x^{p+1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}u_1 \ , & A_1(0,0)=\mathring{A}_1 \ , \ A_2(0,0)=\mathring{A}_2 \\ y^{q+1}\dfrac{\partial u_1}{\partial y}=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}u_1 \end{cases}$$

と"より小さい系の直和"として書ける。この変換がBlock-diagonalizationと呼ばれるもので、Sibuya[7]で用いられた。ここで、係数をGevrey強漸近展開可能函数ないしはBorel総和可能級数にすると、$T(x,y)$もそのようになる。

定理3 上のBlock-diagonalizationに於て

$$A, B \in M_n\left(\hat{\mathbb{O}}_{(p',q')}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)\right)$$

であるとする。更に角度 α_1, β_1 については、次の条件(☆)を課す。

(☆) $C := \mathring{A}_1 \otimes 1 - 1 \otimes \mathring{A}_2$ とおくとき、$\det[pt^p - C] = 0$

の根の偏角を区間 (α_1, β_1) は含まない（mod 2π で）

このとき $T(x,y) \in M_n(\hat{\mathbb{O}}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2))$ となる。

$A(x,y) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ とおくと、T_{12}, T_{21} はそれぞれ

$$x^{p+1}\frac{\partial T_{12}}{\partial x} = A_{12} + A_{11}T_{12} - T_{12}A_{22} - T_{12}A_{21}T_{12}$$

$$x^{p+1}\frac{\partial T_{21}}{\partial x} = A_{21} + A_{22}T_{21} - T_{21}A_{11} - T_{21}A_{12}T_{21}$$

の形式巾級数解として一意的に求まるので、この定理は次の定理より直ちに出る。

定理4 $\hat{f}(x,y), \hat{b}_\nu(x,y) \in \hat{\mathbb{O}}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)^N$

$\hat{C}(x,y) \in M_N(\hat{\mathbb{O}}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2))$

とし、$\hat{b}_\nu(0,0) = 0$, $\det \hat{C}(0,0) \neq 0$

$\det[pt^p - \hat{C}(0,0)] = 0$ の根の偏角を区間 (α_1,β_1) は含まない（mod 2π で）

を仮定する。このとき $\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_N \end{bmatrix}$ に関する

方程式

$$x^{p+1}\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} = \hat{f}(x,y) + \hat{C}(x,y)\hat{\varphi} + \sum_{|\nu|=2} \hat{b}_\nu(x,y)\hat{\varphi}^\nu$$

は、一意解 $\hat{\varphi} \in \hat{\mathbb{O}}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)^N$ をもつ。但し、

$\nu = (\nu_1,\cdots,\nu_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_N$, $\hat{\varphi}^\nu := \hat{\varphi}_1^{\nu_1}\cdots\hat{\varphi}_N^{\nu_N}$

のこととする。

この定理4を示すには、$B_{p,q}$により$\mathcal{H}_{(p,q)}$での方程式に書きかえる。その際、次の補題を用いる。

補題5　$f(t,s),\ b_\nu(t,s) \in \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)^N$

$F_i(t,s) \in M_N(\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2))$

$G(t,s)$：原点の近傍及び $\alpha_1 < {}^\forall\alpha_1' \leqq \arg t \leqq {}^\forall\beta_1' < \beta_1$，

$\alpha_2 < {}^\forall\alpha_2' \leqq \arg s \leqq {}^\forall\beta_2' < \beta_2$ で有界正則な函数を係数とする $N\times N$ 行列

に対して作用素 L を

$$L\psi = G\left[f + L_1\psi + L_2\psi + L_3\psi + P\psi\right]$$

$$L_1\psi = \frac{F_1(t,s)}{t^{p-1}} \underset{p,*}{\#} \psi(t,s)$$

$$L_2\psi = \frac{F_2(t,s)}{s^{q-1}} \underset{*,q}{\#} \psi(t,s)$$

$$L_3\psi = \frac{F_3(t,s)}{t^{p-1}s^{q-1}} \underset{p,q}{\#} \psi(t,s)$$

$$P\psi = \sum_{|\nu|=2} b_\nu(t,s) \underset{p,q}{\#} \psi(t,s)^{\underset{p,q}{\#}\nu}$$

で定義する。但し、$\psi = \begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_N\end{bmatrix}$，$\psi^{\#\nu} = \underbrace{\psi_1\#\cdots\#\psi_1}_{\nu_1\text{回}}\#\cdots\#\underbrace{\psi_N\#\cdots\#\psi_N}_{\nu_N\text{回}}$

とする。このとき方程式

$$L\psi = \psi$$

は、唯一つの解 $\psi \in \mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)^N$ をもつ。

略証　次の3つのステップにより示される：

イ) 原点の近傍で一意的に正則解が存在すること

ロ) その解が $\alpha_1 < \arg t < \beta_1$, $\alpha_2 < \arg s < \beta_2$ での正則解に延長されること

ハ) $|\psi(t,s)| \leqq K e^{\lambda_1 |t|^p + \lambda_2 |s|^q}$ となること

イ)は、$\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ を十分小さく取り、$D = \{(t,s) \mid |t| \leqq \epsilon_1, |s| \leqq \epsilon_2\}$ とおくと、$L : \mathcal{O}(D)^N \longrightarrow \mathcal{O}(D)^N$ が縮小写像になることが分るので成り立つ。

ロ)は次のようにする。$|t| \leqq \epsilon_1$, $|s| \leqq \epsilon_2$ での解 $\psi(t,s)$ があるとき、$\frac{1}{2}\epsilon_1 < |t_0| < \epsilon_1$ なる t_0 を取り、未知変数を、

$$\psi'(t,s) = \psi(\sqrt[p]{t_0^p + t^p}, s)$$

と取りかえて、$L\psi = \psi$ を ψ' に関する方程式に書き直すと、ψ に関して2次の部分は $\#$ が convolution のようなものだから、片方は"既知"となり、ψ' に関する線型の Volterra 型の積分方程式になる。こうして $\arg t = \arg t_0$ の方向に $|t| \leqslant \frac{3}{2}\epsilon_1$ までは解が延長される。s についても同じことを行う。これをくり返せば、t, s それぞれについて、原点からのびる半直線に沿って（係数が定義される限り）解が延長されることが分る。従って、$\alpha_1 < \arg t < \beta_1$, $\alpha_2 < \arg s < \beta_2$ での正則解が作れる。

ハ)の証明には、2変数の Laplace 変換を用いる。難しくはな

いが、記号 etc. の説明から始めると弱干長くなるので、ここでは省略するが、解 $\varphi(t,s)$ に対して、

$$\Phi(u,v)=\sup_{\substack{|t|^p=u\\|s|^q=v}}|\varphi(t,s)|$$

とおいて、次の補題を使えばできる。 □

補題6　$F(z,w)$ は、$\mathrm{Re}(z)>\lambda_1$, $\mathrm{Re}(w)>\lambda_2$ で正則で、ここで $z,w\to\infty$ のとき $\exists c_1,c_2>1$ があり

$$F(z,w)=O(|z|^{-c_1}|w|^{-c_2})$$

が成り立つとすると、${}^\forall\xi_1>\lambda_1$, ${}^\forall\xi_2>\lambda_2$ に対して、積分

$$f(u,v)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty}\int_{\xi_2-i\infty}^{\xi_2+i\infty}e^{uz+vw}F(z,w)\,dz\,dw$$

は存在して、

i) $f(u,v)$ は $\mathbb{R}^2$ で連続で、$u<0$ or $v<0$ ならば $f(u,v)=0$

ii) ${}^\forall\lambda_1'>\lambda_1$, ${}^\forall\lambda_2'>\lambda_2$, $\exists K>0$ があり $|f(u,v)|\leq Ke^{\lambda_1'u+\lambda_2'v}$

iii) $\mathrm{Re}(z)>\lambda_1$, $\mathrm{Re}(w)>\lambda_2$ のとき、

$$F(z,w)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-zu-wv}f(u,v)\,du\,dv$$

この補題は、1変数の Laplace 変換ではよく知られたもので、2変数でも証明は大差ない。

<u>定理4の証明</u>　$\hat{b}_\nu(0,0)=0$ より $\hat{b}_\nu(x,y)$ を $x^{2p}y^{2q}\hat{b}_\nu(x,y)$ で取り換えてよい。このとき $B_{p,q}(\hat{f})=\tilde{f}$ etc. と $B_{p,q}$ による像を $\hat{}$ を $\tilde{}$ にかえて表わすことにすれば、$B_{p,q}$ により方程式は、

$$[pt^p-C(0,0)]\tilde{\varphi}(t,s)=\tilde{f}(t,s)+\left[p+\frac{1}{p}\frac{\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}(t,0)}{t^{p-1}}\right]\underset{p,*}{\#}\tilde{\varphi}(t,s)$$

$$+\frac{1}{q}\frac{\frac{\partial\tilde{C}}{\partial s}(0,s)}{s^{q-1}}\underset{*,q}{\#}\tilde{\varphi}(t,s)+\frac{1}{pq}\frac{\frac{\partial^2\tilde{C}}{\partial t\partial s}(t,s)}{t^{p-1}s^{q-1}}\underset{p,q}{\#}\tilde{\varphi}(t,s)+\sum_{|\nu|=2}\hat{b}_\nu(t,s)\underset{p,q}{\#}\tilde{\varphi}(t,s)^{\underset{p,q}{\#}\nu}$$

と $\mathcal{H}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)^N$ に於ける積分方程式に変換される（命題2を使う）。すると補題5により $\hat{\varphi}\in\hat{\mathbb{O}}_{(p,q)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2)^N$ となる　□

これで Block-diagonalization が Borel 総和可能であることが分った。定理3で $\det[pt^p-C]=0$ の根の偏角の方向が障害になったが、この方向が Borel 総和できない方向である。この方向を"特異方向"ということにする。Pfaff系(1)の特異方向は、determining factor から求めることができる（後述）。

§3. 形式解と Gevrey 強漸近解

Pfaff系(1)は、常微分方程式と似た形の形式解をもつが、このことは Charrière [1] によって示された。それによれば適当に変数変換 $x=x_1^k$, $y=y_1^l$ $(k,l\in\mathbb{N})$ を施すことにより Pfaff系(1)は次の形の形式解をもつ：

(3) $$\widehat{H}(x_1,y_1)\,x_1^{L_1}y_1^{L_2}\,e^{Q_1\left(\frac{1}{x_1}\right)}\,e^{Q_2\left(\frac{1}{y_1}\right)}$$

$$(\heartsuit)\left\{\begin{array}{l} \widehat{H}\in M_n(\mathbb{C}[[x_1,y_1]]) \\ L_1, L_2\in M_n(\mathbb{C}) \\ Q_1=\begin{bmatrix} Q_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_{1,n}\end{bmatrix},\ Q_2=\begin{bmatrix} Q_{2,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_{2,n}\end{bmatrix} \\ Q_{1,i},\ Q_{2,j}\ \text{は定数のない多項式}\end{array}\right.$$

系(1)が与えられたとき最初に $x\mapsto x^{1/k}$, $y\mapsto y^{1/\ell}$ として書き直せば、その系は分数巾をとらずに $x_1=x$, $y_1=y$ として(3)なる形式解をもつ。以下では、この状況で話を進める i.e. Pfaff系(1)は、($\heartsuit$)をみたす $H, L_1, \cdots$ たちによって

(4) $$\widehat{H}(x,y)\,x^{L_1}y^{L_2}\,e^{Q_1\left(\frac{1}{x}\right)}\,e^{Q_2\left(\frac{1}{y}\right)}$$

と表わされる形式解をもつものとする。(4)を求めるには、Formal Reduction と呼ばれる操作を行うのだが、これは§2で説明したBlock-diagonalizationや他の変換を組み合わせて、(1)から始めて順次 p または q がより小さい(他の) Pfaff系に変換し最終的には $p=q=0$ までもっていく Algorithm である。(1)の係数 $A(x,y)$, $B(x,y)$ が収束巾級数のとき(または、より一般的に (p,q)-Borel総和可能のとき)、Formal Reductionで現れる形式巾級数は Borel総和可能であり(定理3を参照)、Block-diagonalizationを除いては、その class も悪くなることはない。(何故なら、それらは代数的な変換だから)

以上のことと、定理3、を組合せると、形式解(4)における$\hat{H}(x,y)$をBorel総和可能級数の積に分解できることが分る。しかも、Formal Reductionのやり方をみると、Block-diagonalizationが行なわれるときの"p"及び"q"の値や、定理3における角度α_1, β_1の制限となった"特異方向"が$Q_1(\frac{1}{x})$, $Q_2(\frac{1}{y})$から決定できることが分る。結果のみを以下に述べる。

$$Q_{1,i}\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{\nu}\frac{\lambda_{i\nu}^{(1)}}{x^{\nu}} \quad , \quad Q_{2,j}\left(\frac{1}{y}\right)=\sum_{\nu}\frac{\lambda_{j\nu}^{(2)}}{y^{\nu}}$$

$\{\deg(Q_{1,i}-Q_{1,j})\}$の全体を $0<p_1<\cdots<p_k<\infty$

$\{\deg(Q_{2,i}-Q_{2,j})\}$の全体を $0<q_1<\cdots<q_\ell<\infty$

$$\sum\nolimits_{p'}^{(1)}=\left\{\arg\sqrt[p']{\lambda_{ip'}^{(1)}-\lambda_{jp'}^{(1)}}\ \middle|\ \deg(Q_{1,i}-Q_{1,j})=p' \text{ なる } {}^{\forall}i,j\right\}$$
$$p'\in\{p_1,\cdots,p_k\}$$

$$\sum\nolimits_{q'}^{(2)}=\left\{\arg\sqrt[q']{\lambda_{iq'}^{(2)}-\lambda_{jq'}^{(2)}}\ \middle|\ \deg(Q_{2,i}-Q_{2,j})=q' \text{ なる } {}^{\forall}i,j\right\}$$
$$q'\in\{q_1,\cdots,q_\ell\}$$

$$\sum\nolimits^{(1)}=\bigcup\sum\nolimits_{p'}^{(1)} \quad , \quad \sum\nolimits^{(2)}=\bigcup\sum\nolimits_{q'}^{(2)}$$

とするとBlock-diagonalizationを行うときの"p" "q"の値はそれぞれ $p_1<\cdots<p_k$; $q_1<\cdots<q_\ell$ であり、その時の特異方向全体は、$\sum_{p'}^{(1)}$, $\sum_{q'}^{(2)}$ である。これらのことは、Formal Reductionのやり方より容易に分る。

今までのことより、次の定理を得る：

定理7　記号は前頁のものを用いる。

$\Gamma_\nu=(p_i,q_j)$ 　, $\nu=i+j-1$

なる"降下列" $\Gamma_{k+l-1}\gneq\cdots\gneq\Gamma_1$ を任意にとり, また

$\alpha_1<\beta_1$, $\alpha_2<\beta_2$ を

$$(\alpha_1,\beta_1)\cap\Sigma^{(1)}=\phi \quad , (\alpha_2,\beta_2)\cap\Sigma^{(2)}=\phi$$

と取る。このとき,

$$\hat{H}(x,y)=\hat{H}_{\Gamma_{k+l-1}}(x,y)\cdots\hat{H}_{\Gamma_1}(x,y)$$

$$\hat{H}_{\Gamma_\nu}(x,y)=\hat{H}_{(p_i,q_j)}(x,y)\in M_n(\hat{\mathbb{O}}_{(p_i,q_j)}(\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2))$$

なる $\hat{H}(x,y)$ があり (1) の形式基本解を

$$\hat{H}(x,y)\,x^{L_1}y^{L_2}e^{Q_1(\frac{1}{x})}e^{Q_2(\frac{1}{x})}$$

とかける。

同じことだが漸近展開の言葉でいうと,

定理7′　$\Gamma_\nu=(p_i,q_j)$, $\alpha_1<\beta_1$, $\alpha_2<\beta_2$ は上の通りとする。このとき (1) は 基本解行列

$$H(x,y)x^{L_1}y^{L_2}e^{Q_1(\frac{1}{x})}e^{Q_2(\frac{1}{y})}$$

但し,

$$H(x,y)=H_{\Gamma_{k+l-1}}(x,y)\cdots H_{\Gamma_1}(x,y)$$

$$H_{\Gamma_\nu}(x,y)\in M_n\left(\mathcal{A}_{(\rho_i,\sigma_j)}\left(\alpha_1-\frac{\pi}{2p_i},\beta_1+\frac{\pi}{2p_i};\alpha_2-\frac{\pi}{2q_j},\beta_2+\frac{\pi}{2q_j}\right)\right)$$

$$\rho_i=1+\frac{1}{p_i}\ ,\ \sigma_j=1+\frac{1}{q_j}$$

をもつ。

参考文献

[1] H. Charrière : Triangulation formelle de certains systèmes de Pfaff complètement intégrables et application à l'étude C^∞ des systèmes non linéaires, thèse de 3ième cycle de Université Strasbourg, Publ. IRMA (1980)

[2] R. Gérard, Y. Sibuya : Étude de certains systèmes de Pfaff avec singularités, Lecture Notes in Math. 712 (1979)

[3] H. Majima : Analogues of Cartan's decomposition theorem in asymptotic analysis, Funk. Ekvac. 26 (1983)

[4] F. Nevanlinna : Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen, Ann. Acad. Sci. Fennicae ser. A. 12 (1918)

[5] F. Nevanlinna : Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen, Ann. Acad. Sci. Fennicae ser. A. 16 (1922)

[6] J. P. Ramis : Les séries k-sommables et leurs applications, Lecture Notes in Physics 126 (1980)

[7] Y. Sibuya : Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point, Funk. Ekvac. 4 (1962)

[8] G. N. Watson : A theory of asymptotic series, Trans. Royal Soc. London, ser. A 211 (1911)