数理解析研究所講究録
第 533 巻 1984 年 188-219

熱方程式の基本解の漸近状態

池田信行 (N. Ikeda)

1。序。Riemannian manifold (M, g) 上の熱方程式の基本解は M と g に関する豊富な情報を持っており、その情報は $t\downarrow 0$ または $t\uparrow\infty$ の漸近状態を考えることにより引出せることは良く知られている。例えば、Kac ([15]) や、McKean-Singer ([23]) の研究以来盛んに考察されている、Laplace-Beltrami 作用素のスペクトルの漸近分布と幾何学的量の関係は $t\downarrow 0$ の時のことから知ることの出来る典型的な例である。また $t\uparrow\infty$ の時の性質は確率論や統計力学等で広く用いられている([16])。この報告ではそれらと違った形の $t\downarrow 0$ の時の漸近状態に関する問題について述べる。その問題の出発点は Buslaev ([8]) による研究であるが、厳密な証明をつけることの出来る結果は現在の所非常に少ないので、問題の性格、特徴および関連して派生する技術的なことの概観に重点をおいて述べる。従って筋を重視し、通常の意味での証明は充分期待されるが、必ずしも実現されていないことも、事実の中におりまぜながら話を進める。

Buslaev の研究の話に進む前に通常良く知られていることの概観から始める。M を滑かな多様体とし、常に connected, σ-compact, orientable 等必要な性質は仮定されているとする。g は M 上に定義された Riemannian metric で連続ではあるが，一般には必ずしも滑かさは仮定しない。g に対応する Laplace-Beltrami 作用素を Δ とする。その時（一般化した意味での）熱方程式

(1.1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$$

が考えられる。g に対応する Riemannian volume m を基準にした，対称で連続な (1.1) の基本解

(1.2) $$p : (0,\infty)\times M\times M \ni (t,x,y) \longrightarrow p(t,x,y) \in R^1_+$$

が存在する，(例えば [1], [2] 参照)。ただし必ずしも一意的でないので次の意味で minimal なものをとる：任意の compact な台を持つ非負の連続関数 f に対して，$u(0+,x)=f(x)$ なる任意の (1.1) の解 $u(t,x)$ に対し

$$u(t,x) \geq \int_M f(y)\,p(t,x,y)\,m(dy), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times M$$

が成立する。いま (M,g) が完備とすれば，g の滑かさについては非常に少ない仮定の下で，$x, y \in M$，$x \neq y$ に対し，

(1.3) $$-\log p(t,x,y) \sim \rho(x,y)^2/2t, \qquad t\downarrow 0$$

が成立する。ここで $\rho(x,y)$ は x と y の geodesic distance である。さらに M_1 を M の compact な集合とすれば，$x, y \in M_1$ なる範囲では (1.3) は一様に成立している。詳細につ

いては Varadhan [28], [29] 参照。いま $x, y \in M$ に対し，$\Omega_{x,y} = \{\phi ; \phi : [0,1] \to M$, 連続でしかも絶対連続であり，その速度ベクトル $\dot{\phi}$ が2乗可積分$\}$ とすれば，その任意の元 ϕ に対し作用積分 E が

(1.4) $$E[\phi] = \int_0^1 g_{\phi(s)}(\dot{\phi}(s), \dot{\phi}(s))\,ds$$

で与えられる。(1.3) の結果は基本解 p の $t \downarrow 0$ の時の漸近状態の主要項は作用積分 E の critical point = geodesic で支配されることを示している。次に主要項からの偏差が問題になるが，もし g が滑か（すなわち C^∞）ならば R^d や hyperbolic space 等基本解が具体的に書き下せる時（[10]）と類似の結果が成立することが知られている。このことについては古くは Minakshisundaram-Pleijel（[24]）の結果が有名であるが，最近は非常に多くの結果がある。証明方法までこめてこれからの話に最も関係深いのは Molchanov（[25]）の研究である。例えば x と y を結ぶ minimal geodesic が高々有限個で，（$x \neq y$），x と y はその各々に関し non-conjugate であれば，正の関数 $H : R^1_+ \to R^1_+$ が存在し，

(1.5) $$p(t,x,y) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \exp\{-\rho(x,y)^2/2t\}\, H(\rho(x,y)), \quad t \downarrow 0$$

が成立する。さらに D を充分小さな領域とすれば，$x, y \in D$ について

上の関係は一様に成立する。(1.5) が成立するための条件および出て来る量は作用積分の critical point = geodesic にそった Jacobi 場に関連している。すなわち作用積分の critical point における2次変分に関係する。g の滑かさを弱めて行く時 (1.5) が成立する限度を求めることは1つの問題である。これらの事情については Azencott の一連の研究がある。例えば [3], [4] 参照。

Molchanov による (1.5) の証明を見れば、作用積分の2次変分が定義出来ない位に g の滑かさが弱まると事情が一変する可能性が予見される。実際彼の証明によれば主要項が geodesic で規制されることは x と y を結ぶ道の空間で大数の法則により平均が定まるのと類似の事情が起きることによっており、それからの偏差は中心極限定理的なものによって定まって来る。従って確率論における極限定理で平均からの偏差について成立する最も古典的な事実の類似が考えられる。すなわち parameter がある範囲にある限りは中心極限定理として共通の性格のものが成立し、違いは量的な関係だけに現われ、その限度をこすと parameter ごとに違った性格の法則が成立する。しかもその違いはまたある parameter で表示される。Buslaev の研究は事実その様な現象が存在することを示唆するものであり、この報告の目的はこの事情に関連す

ることを可能な限り数学らしく述べることである。

2. Buslaevの主張。 Neumannの境界条件をみたす熱方程式を境界を持たないRiemannian manifoldで取扱う時に滑かなさの弱いRiemannian metricが現われることは良く知られている。その様な事情はスペクトルの漸近分布の研究でも考慮されている,(例えば[23]参照)。Buslaev([8])は真に凸な領域によるdiffractionの問題をDの外部領域におけるNeumann条件をみたす熱方程式の基本解の漸近評価の主要項からの偏差を求めることに帰着した。この言い換えがどの様な場合に,どれ位詳しい評価があれば保証されるかは興味あることだが,ここではそのことは忘れて熱方程式の問題のみを考える。

DをR^dの有界で真に凸な領域で滑かな境界を持つものとする。M^+をその外部領域とし,そこで平坦なR^dの計量g^+を考える。Riemannian manifold (M^+, g^+)上の熱方程式(1.1)をNeumannの境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{2.1}$$

で考える。いまM^+のhomeomorphic copy M^-を考え∂M^+と∂M^-を同一視しNとし,多様体$M = M^+ \cup N \cup M^-$上に

(M, g) が (M^+, g^+) の symmetric double になる様に Riemannian metric g をとれば、Neumann条件の時の基本解は (M, g) における熱方程式 (1.1) の基本解によって簡単な形で表わされる。従ってこの (M, g) 上の熱方程式を考えればよいが、この g は連続ではあるが、D が真に凸なことの反映として、N で normal 方向には滑かでなく、丁度 Lipschitz 連続になっている。Buslaev の主張を (M, g) の問題として整理して述べると次の形になる: $x, y \in N$, $x \neq y$ を固定する。(N, g) で考えて x と y を結ぶ minimal geodesic γ が唯1つとする。そのとき

$$(2.2) \qquad -\log p(t, x, y) \sim \frac{\rho(x, y)^2}{2t} + \frac{\lambda_1 \Phi_\gamma(x, y)}{2t^{1/3}}, \quad t \downarrow 0$$

となる。ここで

$$(2.3) \qquad \Phi_\gamma(x, y) = \int_0^1 |K(\dot{\gamma}(s))|^{2/3} ds$$

で、$\dot{\gamma}$ は γ の速度ベクトルで、K は R^d に於ける ∂D の第2基本形式 $\beta : T(N) \times T(N) \longrightarrow T(N)^\perp$ より

$$(2.4) \qquad K(V(s)) = 2\beta(V(s), V(s))$$

で定められる。ここで $V(s)$ は γ にそったベクトル場とする。また λ_1 は固有値問題

$$(2.5) \qquad \frac{d^2}{dx^2}u - xu = -\lambda u \qquad x \in (0, \infty), \qquad \frac{d}{dx}u(0+) = 0$$

の第1固有値であり，$\lambda_1>0$である。

(M,g)でNの第2基本形式が恒等的に0になることはなく，$|K(\gamma(s))|>0$，$0\leq s\leq 1$である．ところがNはtotally geodesicな部分多様体である。gが滑かならば，この様なことはおきないが，gが滑かでないのでこのことは矛盾ではない。従って上に考えたγは(M,g)で考えてもgeodesicになっている。このことから(1.3)で主張されている通り，(2.2)でも主要項は作用積分のcritical point = geodesicで規制されていることがわかる。この場合はcritical pointにおける作用積分の任意の方向からの変分はとれないが，片側変分に相当するものは定義出来，それに関連する量が，主要項からの偏差を支配している。実際$\Xi_\gamma(x,y)$についてはこのことは明らかであり，λ_1とその巾$1/3$がgのLipschitz連続性に依存していることは次節で明らかになる。

(2.2)の数学的な証明はDが球の場合以外は知られていない（[12]参照）。しかしながら(2.2)についてのBuslaevの説明は簡単ではあるが説得力のあるものである．彼はNの近傍におけるRiemannian metricの展開で滑かな場合と違ったことが現われることを指摘し，この局所的な量が大局的な量として集積する事情を数理物理学で用いられている"continuum integral"の概念を用いて説明している。詳しく

は Buslaev [8], I, §5 参照。

3. 問題の定式化と主要な結果。 Buslaev が提起したことの解決にはほど遠いが, (2.2) で D が R^d の球の場合をふくみ, §1 で述べた目的には役立つ1つの定式化を次に述べる。

M_i, $i=1,2$, は滑かな d_i 次元の多様体とし, いづれも §1 に述べた条件は必要な限りみたしているとする。それらの直積空間を $M=M_1\times M_2$ とし, 自然な射影 $\pi_i : M\longrightarrow M_i$, $i=1,2$ を考える。g_i, $i=1,2$ は M_i 上の滑かな Riemannian metric とし, また任意に固定された $x_1\in M_1$ に対し, M_2 上の Riemannian metric $\hat{g}_{x_1}$ が対応しているとする。

[仮定] 1. M の Riemannian metric g は次の形で定まっている。任意の $x\in M$ と任意の $X, Y\in T_x(M)$ に対して,

$$g_x(X,Y)=(g_1)_{\pi_1(x)}\big((\pi_1)_*(X),(\pi_1)_*(Y)\big)+\hat{g}_x\big((\pi_2)_*(X),(\pi_2)_*(Y)\big), \tag{3.1}$$

ただし, $V_1, V_2\in T_{\pi_2(x)}(M_2)$ に対し

$$\hat{g}_x(V_1,V_2)=\left(\hat{g}_{\pi_1(x)}\right)_{\pi_2(x)}(V_1,V_2) \tag{3.2}$$

とする。また $(\pi_i)_*$ は写像 π_i の differential とする。

[仮定] 2. M_1 の定点 ξ_0 とその normal な近傍 U と

正の連続関数 $a : U\times M_2 \to R^1_+$ が存在し，任意の $(\xi,\eta) \in U\times M_2$ に於いて

$$(3.3)\qquad (\hat{g}_\xi)_\eta(V_1,V_2) = a(\xi,\eta)^{-1}(g_2)_\eta(V_1,V_2), \qquad V_1,V_2\in T_\eta(M_2)$$

となる。さらに ξ_0 を中心とするある normal coordinate $\xi=(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{d_1})$ に対して a は次の形に表わされる：

$$(3.4)\quad a(\xi,\eta) = 1 - \sum_{i=1}^{d_1} K_i^{(1)}(\eta)|\xi^i|^\alpha + \sum_{i=1}^{d_1} K_i^{(2)}(\xi,\eta)|\xi^i|^2, \quad \eta\in M_2 .$$

ただし，関数 $K_i^{(1)} : M_2 \to R^1_+$ は滑かで真に正であり，関数 $K_i^{(2)} : M \to R^1$ は滑かとする。さらに

$$0<\alpha<2$$

が成立しているとする。

ここで[仮定]2 の ξ_0 に対して，

$$N = \{(\xi_0,\eta) ; \eta\in M_2\}$$

とおく。 $x,y\in N$ に対する基本解 $p(t,x,y)$ の漸近評価を考える限り，(1.3) によって，考察を N の近傍に制限出来る。従ってある意味では一般性を失わず次のことを仮定出来る。

[仮定] 3 。 N は totally geodesic な (M,g) の部分多様体である。

[注意] 3.1. [仮定] 1 と[仮定] 2 の (3.3) をみたす典型的な例は Bishop-O'Neill [5] によって Riemannian manifold の正の関数による warped product と呼ばれるものに (M, g) がなっている場合である。すなわち正の連続関数

(3.5) $$a : M_1 \longrightarrow R^1_+$$

が存在し，任意の $x \in M$ と任意の $X, Y \in T_x(M)$ に対して

(3.1)' $$g_x(X,Y) = (g_1)_{\pi_1(x)}((\pi_1)_*(X), (\pi_1)_*(Y)) + a(\pi_1(x))^{-1}(g_2)_{\pi_2(x)}((\pi_2)_*(X), (\pi_2)_*(Y))$$

となっている。さらに [仮定] 2 に述べた $\xi_0 \in M$ とその近傍 U および U における normal coordinate $\xi = (\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^{d_1})$ に対し，a が次の形に表わされるとする：

(3.4)' $$a(\xi) = 1 - \sum_{i=1}^{d_1} K_i^{(1)} |\xi^i|^\alpha + \sum_{i=1}^{d_1} K_i^{(2)}(\xi) |\xi^i|^2,$$

ここで $K_i^{(1)} > 0$ で関数 $K_i^{(2)} : M_1 \ni \xi \longrightarrow K_i^{(2)}(\xi) \in R^1$ は滑かであるとする。

このとき [仮定] 2 がみたされる。更に

(3.6) $$0 < a(\xi) < 1 = a(\xi_0), \qquad \xi \in M_1 \setminus \{\xi_0\}$$

を仮定すれば [仮定] 3 が自動的にみたされる。

例 3.1. 注意 3.1 で考えた場合の特別の場合として Buslaev の設定で D が R^d の球の場合がふくまれる。この場合 $M^+ = R^d \setminus \overline{D}$ とし，M^+ の平坦な Riemannian metric

を g^+ とする。R^d の極座標 $(x, \theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^{d-1})$ をとり、M^+ の座標を

$$x^1 = x - 1, \quad x^i = \theta^{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots, d$$

で決める。この座標により M^+ は $[0, \infty) \times S^{d-1}$, ($S^{d-1}$ は R^d の中の $d-1$ 次元球面), と同一視される。この座標で考えた M^+ の Riemannian metric を (g^+_{ij}) とすれば

$$g^+_{11} = 1 \qquad g^+_{1j} = 0 \qquad j = 2, 3, \cdots, d$$

$$g^+_{ij} = a(x^1)^{-1} \bar{g}_{ij} \qquad i, j = 2, 3, \cdots, d$$

となる。ここで

(3.7) $$a(x^1)^{-1} = (1 + x^1)^2$$

で $(\bar{g}_{ij})$ は S^{d-1} の標準的な Riemannian metric とする。従って (3.7) の関数を 0 に対称に拡張した $(1 + |x^1|)^2$ も同様に $a(x^1)^{-1}$ と書けば (M^+, g^+) の symmetric double は R^1 と球面 S^{d-1} の関数 $a(x^1)^{-1}$ による warped product になっている。この時は, (3.6) は明らかに成立している。

現在の所, まだ完全な証明は得られていないが, 解決が期待されることは次の形の問題として定式化される。もしこれが肯定的であれば §1 の事情は相当に解明される。

[問題] [仮定] 1, 2, 3 の下で, もし $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ ならば, 次

のことが成立することを示せ： $x, y \in N$, $x \neq y$ を固定し、次の条件がみたされるとする。

(a) (N, g) で x と y を結ぶ、唯1つの minimal geodesic が存在する。

(b) x と y は (N, g) で考えて γ にそって non-conjugate である。

その時

$$(3.8) \quad -\log p(t, x, y) \sim \frac{\rho(x, y)^2}{2t} + \frac{\lambda_1 \Phi_\gamma(x, y)}{2t^\beta}, \quad t \downarrow 0$$

となる。ここで

$$\Phi_\gamma(x, y) = \sum_{i=1}^{d_1} \int_0^1 \left| \beta^i_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)) \right|^{2/(2+\alpha)} ds$$

$$(3.9) \quad \beta^i_x(X, Y) = K^{(i)}_i(\pi_2(x))\,(g_2)_{\pi_2(x)}(X, Y), \quad X, Y \in T_x(N),\ x \in N$$

$$\beta = (2-\alpha)/(2+\alpha)$$

とする。ただし上の式の第2行で $X, Y \in T_x(N)$ は $T_{\pi_2(x)}(M_2)$ の元と同一視している。また λ_1 は次の固有値問題：

$$(3.10) \quad \frac{d^2}{dx^2}u - x^\alpha u = -\lambda u \qquad x \in (0, \infty), \quad \frac{d}{dx}u(0+) = 0$$

の第1固有値である。

注意 3.2。 (N, g) は (M_2, g_2) と同一視出来るので、上記の (a), (b) の条件は滑かな多様体の場合の結果から定

兼可能である。

注意 3.3. 上の問題で $1/2<\alpha<2$ としたのは、$0<\alpha\le 1/2$ の場合には (3.8) が成立する場合が全く知られていないからである。ただし、Δ と1階微分の項だけ違う作用素 L を考え、

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}Lu$$

の基本解で (3.8) の右辺の評価を持つものを作ることは、$0<\alpha\le 1/2$ の場合も可能である。

注意 3.4. (3.8) の右辺の主要項からの偏差は定性的には (2.2) の場合と同一の性格のもので、滑かな場合とは違う性質のものである。しかも g の滑かさの度合を示す α は $1/2<\alpha<2$ の範囲では (3.9) の関係によって β に反映する。いま形式的に $\alpha\uparrow 2$ と近づけると $\beta=0$ になり、漸近問題に良く見られるように $1/t^{0}$ の order を $\log t$ と思いなおすと、order の関係は滑かなものに対応するものが出て来る。

注意 3.5. λ_1 も g の滑かさの次数を表わす定数 α より一定の規則で定まっている。尚 $\lambda_1>0$ となることは知られている。(例えば [9] の結果からもわかる)。

現在の所厳密な証明が得られて、比較的に体系的と思われるのはつぎに述べる場合だけである([12], [13]参照)。

[主要な結果]。 $M_1=R^{d_1}$ で g_1 は R^{d_1} の平坦な metric とする。関数 a は (3.5), (3.4)$'$, (3.6) をみたすとする。(M,g) が関数 a^{-1} による (M_1,g_1) と (M_2,g_2) の warped product ならば、上記の問題は肯定的に解決される。

[注意] 3.6　問題の考察を N の近傍に限ることが出来るので、[条件] 1, 2, 3 が (3.5), (3.4)$'$, (3.6) をみたす a に対し成立し、$M_1=R^{d_1}$ で g_1 が R^{d_1} の平坦な metric ならば問題は肯定的に解決されることを上記の結果は示している。

現在知られている上記の結果の証明は (M,g) が warped product であることに基本的に依存している。一般性を失わず、$\xi_0=0\in R^{d_1}$ とし、

$$N=\{(0,x_2)\ ;\ x_2\in M_2\}$$

とする。R^{d_1} 上の作用素

$$L=\frac{1}{2}\,a(x)^{d_2/2}\sum_{i=1}^{d_1}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a(x)^{-d_2/2}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{3.11}$$

を考える。この時

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu$$

の基本解 $\bar{p}:(0,\infty)\times M_1\times M_1\longrightarrow R^1$ は連続で正である。 ${}_{''}$

ま

$W^{d_1}(t)=\{w;\ w: [0,t]\ni s \longrightarrow w(s)\in R^{d_1}$ continuous, $w(0)=w(t)=0\}$

とおき，L に対応する，0より出発し，t で0に帰る pinned 拡散過程の $W^{d}(t)$ 上の確率を $Q_{0,t}$ とする。この時 Markov 過程論の skew product の方法を用いれば，$x=(0,x^2)$，$y=(0,y^2)\in N$ に対して，$\phi_t(w)=\int_0^t a(w(s))ds$，$w\in W^{d_1}(t)$ とおけば，

$$(3.12)\qquad p(t,x,y)=\int_{W^{d_1}(t)} g(\phi_t(w),x_2,y_2)\,Q_{0,t}(dw)\,\bar{p}(t,0,0)$$

なる表現が得られる。ここで $g:(0,\infty)\times M_2\times M_2\longrightarrow R^1$ は (M_2,g_2) 上の熱方程式の基本解とする。つぎに0より出発し，時刻 t で0に帰る d_1次元 pinned Brownian motion の確率を $P_{0,t}$ とすれば，(3.12) と (3.11) より

$$(3.13)\qquad p(t,x,y)=\int_{W^{d_1}(t)} g(\phi_t(w),x_2,y_2)\,P_{0,t}(dw)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^{d_1}(1+o(1))$$

が得られる。この段階で $1/2<\alpha<2$ なる条件を用いる。ここで g に (1.5) を適用し，[仮定] 3 を用いれば

$$(3.14)\qquad p(t,x,y)=\int_{W^{d_1}(t)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^{d}\exp\left\{-\frac{\rho(x,y)^2}{2\phi_t(w)}\right\}P_{0,t}(dw)\,H(\rho(x,y))\,(1+o(1))$$

が得られる。これに Brown 運動の scaling に関する性質を用いると，

$$(3.15)\qquad p(t,x,y)=\int_{W^{d}(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^{d}\exp\left\{-\frac{\rho(x,y)^2}{2t\phi_1(w_t)}\right\}P_{0,1}(dw)\,H(\rho(x,y))\,(1+o(1))$$

が得られる。ここで $w_t(s)=\sqrt{t}\,w(s)$, $0\le s\le 1$ で $w_t\in W^d(1)$ の元を定める。つぎに，有限次元空間で Lebesgue 測度に対する積分の漸近評価の際に有効な役割を果たす Laplace の方法に相当することを，$W^d(1)$ 上の Wiener 測度 $P_{0,1}$ による積分に対して適用すれば，原理的には単純だが，簡単ではない計算の積み重ねの結果，(3.15) より，任意に大きい K に対し

$$p(t,x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \exp\left\{-\frac{\rho(x,y)^2}{2t}\right\}$$

$$(3.16)\qquad \times\int_{W^d(1)} \exp\left\{-\frac{\rho(x,y)^2}{2t^{(2-\alpha)/2}}\sum_{i=1}^{d_1} K_i^{(1)}\int_0^1 |w^i(s)|^\alpha ds\right\} P_{0,1}(dw)$$

$$\times H(\rho(x,y))(1+o(1)) + O(\exp\{-Kt^{-\beta}\})$$

が成立することが示される。ただしこの場合の Laplace の方法に関しては Schilder [27] 等で示されたものと類似はしているが，そのままは適用出来ず，この場合特有の工夫が必要である。(3.16) より結論に進むには有名な Feynman-Kac の公式を用いればよい([17] 参照)。

注意 3.7。厳密な証明が知られている場合で上に述べたものは N の曲率に相当するものが定数の場合だけである。しかし warped product の方法を何回か組合せて用いることにより，それが定数でない場合にも (3.8) と同性質の漸近評価を示せることがある。ただしこの場合の Riemannian manifold は先に定式化した枠組からはみ出してしまうが，その枠組の中のものに非常に近いものが得られる。例えば R^3 の単位円筒の外部領域 $M^+ = (1,\infty)\times S^1 \times R^1$ を考える。例3.1の場合で $d=2$ の場合に相当する座標 (x^1, x^2) と Riemannian metric を $(1,\infty)\times S^1$ に考える。その metric を $\tilde{g}^+$ で表わせば，Riemannian manifold $((0,\infty)\times S^1, \tilde{g}^+)$ が得られる。つぎに正の連続関数 $b: R^1\times S^1 \to R^1$ で次の条件をみたすものを考える：(1) $b(\xi,\eta) = b(-\xi,\eta)$，$(\xi,\eta)\in R^1\times S^1$，(2) 任意に固定した $\eta \in S^1$ に対し $b(\xi,\eta)$ は $|\xi|$ に関し単調減少で，$(0,\infty)$ で ξ に関し滑か，(3) $b(0,\eta)=1$，$\eta\in S^1$，(4) $\frac{\partial}{\partial\xi} b(\xi,\eta)|_{\xi=0+} = K(\eta)$ が存在し，S^1 上で滑かで，しかも真に負の値をとる。$((0,\infty)\times S^1, \tilde{g}^+)$ の symmetric double と R^1 の関数 b による warped product を考えれば，上記の問題の定式化からははずれるが，(3.8) と同じ性質の漸近評価は示される。この場合は x を固定した時（但し $x=(0,x^2,x^3)$ の形の点），$y=(0,y^2,y^3)$ を結ぶ minimal geodesic は x^2 と y^2 が S^1 上で対蹠点ならば2本で，そうでなければ1本である。このために関数 $K(\eta)$ のとり方によっては一般には (3.8) の右辺の第2項の係数は y に不連続になる。この様に主要項からの偏差を表わす項の係数の連続性は minimal geodesic の集合の構造に密接に関連している。ある意味で運動の相の変化を

係数の不連続性が反映する。([13])。

4. parametrix について。 Hadamard の parametrix は基本解の構成だけでなく、漸近評価にとっても有効な働きをすることは良く知られている。(1.5) の証明も解析的方法によるものはこの方法によっている。良く用いられるのは、Minakshisundaram-Pleijel ([24]) の parametrix である。それは、局所的には

$$(4.1) \qquad p_n(t,x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \exp\left\{-\frac{\rho(x,y)^2}{2t}\right\}\left(U_0(x,y)+U_1(x,y)t+\cdots+U_n(x,y)t^n\right)$$

の形で与えられる。ここで $U_i(x,y)$ は $U_{-1}(x,y)\equiv 0$ として、微分方程式

$$(4.2) \qquad r\frac{dU_k}{dr}+\frac{r}{2}\frac{d\log\sqrt{G}}{dr}U_k+kU_k=\Delta U_{k-1}, \quad k=1,2,\cdots,n$$

で順次定められる。ここで G は normal coordinate で表わした Riemannian metric の行列で、$\frac{d}{dr}$ は x より出発した geodesic にそった微分とする。(4.1) と基本解の差は積分方程式によって評価される。$t\downarrow 0$ の時の漸近評価という立場から見るならば、その役割において (4.1) と (3.15) の右辺の

$$(4.3) \qquad \int_{W^d(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \exp\left\{-\frac{\rho(x,y)^2}{2t\phi_1(w_t)}\right\}P_{0,1}(dw)\,H(\rho(x,y))$$

はLaplaceの方法を介在させれば類似の働きをする。その意味で(4.3)は§3のwarped productの場合の熱方程式に対するparametrixと考えられる。parametrixをこの様に広く考えた時，それをWiener空間上の積分で書くことの意味，および有効性が次に問題になる。この立場で最も徹底していて非常に興味深いのは最近のBismutの研究である。([6]，[7]参照)。彼はRiemannian metricが滑かな時に，Wiener空間上の解析だけで，その上に漸近評価に有効なparametrixをWiener空間上の積分を用いて構成した。我々は(4.2)を得るのに，gが滑かな時の(1.5)の評価を使ったが，これらの部分をBismutの結果でおきかえるならば，gが滑かでなくてもwarped productの場合はWiener空間上の解析だけでparametrixが構成出来て(3.15)に到達出来ることになる。この様にparametrixの構成に$\Delta/2$に対応する運動の性質と作用積分最小化の原理を直接的に反映させる方法が，gが滑かでない時に有効な働きをするかどうかを知るために，まずgが滑かな時のBismutの考えの要点を反省してみる。

説明を簡単にするために$M=R^d$で，その上のベクトル場で滑かな$A_0, A_1, A_2, \cdots, A_r$が存在し，$\Delta$が

(4.4) $$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} A_k^2 + A_0$$

と表わされるとする。つぎに

$$W_0^r = \{w;\ w: [0,1] \to R^r: 連続,\ w(0)=0\}$$

とし，(Stratonovich 型) 確率微分方程式

$$dX(t) = \sum_{k=1}^{r} A_k(X(t)) \circ dW^k(t) + A_0(X(t))dt \tag{4.5}$$

の $X(0)=x$ なる解 $X(t,x,w)$ を考える，(詳しくは [14] 参照)。いまベクトル場 $A_0, A_1, \cdots, A_r$ はすべての次数の微分が連続かつ有界であることを仮定する。しかも (4.4) の作用素が退化していないとしているので，写像

$$X(t,x): W_0^r \ni w \longrightarrow X(t,x,w) \in R^d$$

による Wiener 測度 P^W の image measure $P(t,x,dy)$ は Riemannian volume m について密度関数 $p(t,x,y)$ を持ち，それが基本解になっていることが Malliavin の結果より Wiener space 上の解析だけで示される ([20], [21], [19] 参照)。以下 (3.8) 程度の漸近評価には A_0 は関係しないことに注意し，作用素

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} A_k^2 \tag{4.6}$$

に対する方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \tag{4.7}$$

の基本解について考える。それも同じ記号 $p(t,x,y)$ で書く。

対応する確率微分方程式は (4.5) で $A_0=0$ の場合である。すなわち

$$(4.8)\qquad dx(t)=\sum_{k=0}^{r}A_k(x(t))\circ dw^k(t)$$

の場合である。解その他に関する記号は (4.5) の時と同じものを用いる。W_0^r の部分空間

$$(4.9)\qquad H=\{h\in W_0^r\ ;\ h\text{の各成分は絶対連続で微分は2乗可積分}\}$$

に，内積

$$(4.10)\qquad \langle h_1,h_2\rangle=\sum_{k=1}^{r}\int_0^1\dot{h}_1^i(s)\,\dot{h}_2^i(s)\,ds\ ,\quad h=(h_1,h_2,\cdots,h_r)\in H$$

を定め Hilbert 空間が得られる。ここで $\dot{h}$ は h の速度ベクトル。(4.8) に対応した常微分方程式

$$(4.11)\qquad \dot{\phi}(s)=\sum_{k=1}^{r}A_k(\phi(s))\,\dot{h}(s)$$

を考え，$\phi(0)=x$ なる解を $\phi(t,x,h)$ で表わす。$x,y\in R^d$ に対し，

$$(4.12)\qquad K_y^x=\{h\in H\ ;\ \phi(1,x,h)=y\}$$

とおく。一方 H に作用積分

$$(4.13)\qquad I[h]=\langle h,h\rangle/2\qquad h\in H$$

を導入し，

$$(4.14)\qquad E[y]=\begin{cases}\inf_{h\in K_y^x} I[h] & K_y^x\neq\phi\\ \infty & K_y^x=\phi\end{cases}$$

とするとき、

(4.15) $\quad E[y] = I[h_0], \qquad h_0 \in K_y^x$

なる唯一つのh_0が存在するとする。このことはRiemannian manifoldでxとyを結ぶminimal geodesicが唯一つの仮定に相当し、h_0を求めることはそのminimal geodesicのR^dへの展開を求めることに相当している。$\phi(1,x,h) = (\phi^1(1,x,h), \phi^2(1,x,h), \cdots, \phi^d(1,x,h))$ の$h_0 \in K_y^x$での変分$D\phi^i(1,x,h)$をHの元と同一視し、h_i^*, $i=1,2,\cdots,d$ とする。典型的な場合はこれらのベクトルが1次独立な場合でそのことを仮定する。これらで生成されるHの部分空間をH_2、Hの中におけるH_2の補空間をH_1とする。$H = H_1 \oplus H_2$なる直和分解に対して、W_0^rのpseudo-orthogonalな分解

(4.16) $$W_0^r = W_1 \oplus W_2$$

が得られる。すなわち$W_2 = H_2$で、$H_2 \subset W^*$と考え、$W_1 = \{w \in W_0^r ; h_i^*(w) = 0,\ i=1,2,\cdots n\}$として与える。この分解に対応して$W_0^r$上のWiener測度$P^W$が$W_1$上のGauss測度$P_1$と$W_2$上の有限次元のGauss測度$P_2$の直積に分解される(例えば[6], [22], [26]等参照)。この様にしてh_0で$\phi(1,x,h)$を動かす方向(H_2による方向)と動かさない方向(H_1の方向)にWiener測度P^Wが分解され、動かす方向は有限次元で、Lebesgue測度に絶対連続で、密度関数も作用積

分を用い具体的に表示される。このことが parametrix の構成で，Laplace の方法と組合せると有効な計算が可能な具体的な形が得られる理由の1つになっている。さらにベクトル場に充分に条件を仮定すれば，H_1 の0の近傍 $\tilde{U}_0$ と R^d の y の近傍 V_y と写像 $\tilde{G} : H_1 \times V_y \longrightarrow H_2$ が存在し，任意の $h_1 \in \tilde{U}_0$ と任意の $z \in V_y$ に対し

$$(4.17) \qquad z = \phi(1, x, h_0 + h_1 + \tilde{G}(h_1, z))$$

となることが陰関数の定理より示される。W_0^r 上の関数 $X(1, x, w)$ は w に関し一般には連続ですらないので，このことから自明に導かれるのではないが，確率微分方程式の解であることから，充分な仮定をベクトル場 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ におけば，W_1 での0の近傍 U_0 と写像 $G : W_1 \times V_y \longrightarrow W_2 = H_2$ が存在し，任意の $w_1 \in U_0$ と任意の $z \in V_y$ に対し，

$$(4.18) \qquad z = X(1, x, h_0 + w_1 + G(w_1, z))$$

となる。しかも $\tilde{G}$ と G の対応は自然なものである（詳しくは Bismut [6] や Malliavin [22] 参照）。つぎに，L に対応する拡散過程の測度で，特に $X(0, x, w) = x$，$X(t, x, w) = y$ と条件つけたものを $Q_{x,y}^t$ とすれば，$t \downarrow 0$ の時に，おおまかに言って"非常に早い速度で" $\{\phi(s/t, x, h_0) ; 0 \leq s \leq t\}$ なる曲線のまわりに集中し，その近傍以外は無視出来ることが期待される。大胆な言い方をすれば，以上のことを念頭に入れて

(4.8) の確率微分方程式のかわりに、

$$(4.19)\qquad dX(s)=\sum_{k=0}^{r}A_k(X(s))\circ\sqrt{t}\,dW^k(s)$$

なる確率微分方程式を考えれば、基本解の parametrix を Wiener 空間上に P_1 による積分の形によって与えることが出来、Laplace の方法と組合せると $t\downarrow 0$ の漸近評価に充分な情報を与える。ここにその詳細を述べることが出来ないが、Bismut [6] の (4.57) 式および (5.21) 式参照。以上の推論には正当化を必要とする技術的な問題が残されており、それを実行出来るのは Bismut ([6]) 自身が述べている様に非常に限られた場合である。例えば (4.17) と (4.18) の対応や、(4.8) と (4.19) の解の関係等、Malliavin calculus を W_0^r 上に進める時に多くの困難を伴う。また一般の Riemannian manifold では △ が (4.4) の形に一般には表現されないので、正規直交化した frame の bundle 上に持ち上げて考える必要がある ([6], [14] 参照)。

いずれにしても、いくつかの方法の組合せでなく、Wiener 空間上の解析として一貫した方法で、$t\downarrow 0$ の時の漸近評価の parametrix の構成法の筋書きの1つが Bismut [6] により与えられたことになる。なおこの議論を一般に進めるためには、Malliavin calculus の全面的な検討が必要になるが、その

作業で重要な部分にかかわるものと思われる研究が最近楠岡氏（[18]）によって進められつつある。

最後にこのBismutの考えをgがなめらかでない時に活用出来るかどうかをみるために非常に簡単な例を1つ考えてみる。

例4.1。 $M=R^2$, $M_1=R^1$, $M_2=R^2$ で、通常の座標で考えて、

(4.20) $$g_{11}=1, \qquad g_{22}=a(x)^{-1}, \quad g_{12}=g_{21}=0$$

となるとする。aは[仮定]3.2, 3.3で述べた条件をみたすとし、$1/2<\alpha<2$とする。この例は一般には厳密な証明が与えられている場合になっていない。この時のΔは

(4.21) $$\Delta=\sqrt{a(x)}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{a(x)}^{-1}\frac{\partial}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$$

であたられる。従ってdriftの変換と呼ばれる確率論の方法を用いると、(3.8)程度の漸近評価には

(4.22) $$L=\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1}+a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2}$$

に対する方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}Lu$$

の基本解 $p(t,x,y)$ の漸近評価を考えるとよい。この時基礎になる測度は $m(dx)=a(x)^{-1/2}dx^1dx^2$ にとる。$L/2$ に対応す

る拡散過程は確率微分方程式

$$(4.23)\qquad \begin{aligned} dX^1(s) &= dW^1(s) \\ dX^2(s) &= \alpha(X^1(s), X^2(s))dW^2(s) \end{aligned}$$

により与えられる。ここで $\alpha(x)=\sqrt{a(x)}$ である。したがって，$x_1\in R^1$ を固定すると，

$$\alpha(x_1,\cdot): R^1 \ni x_2 \longrightarrow \alpha(x_1,x_2)\in R^1$$

はなめらかな関数である。いま $x=(0,x^2)\in R^2$ より出発した (4.23) の解を $X(t,x^2,w)=(X^1(t,x^2,w), X^2(t,x^2,w))$ とすれば，$w(t)=(w^1(t), w^2(t))$ とするとき，

$$(4.24)\qquad X^1(t,x^2,w)=w^1(t), \qquad 0\le t<\infty$$

となる。いまもし $a(x^1,x^2)$ が x^2 に無関係で x^1 だけの関数ならば §3 の skew-product の方法が用いられる。しかし一般にはこの方法は用いることが出来ない。いま $\{w^1(s);\ 0\le s<\infty\}$ で生成される σ-field を $\mathcal{F}_1$ として，$\mathcal{F}_1$ で条件付た Malliavin calculus を (4.24) に注意して用いると，

$$\mu^{w^1}_{t,x^2}(dy) = P^W[X^2(t,x^2,w)\in dy \,/\, \mathcal{F}_1]$$

で定まる確率が $a(0,y)^{-1/2}dy$ に関し密度関数 $g(t,x^2,y;w^1)$ を持ち，$(t,x^2,y)\in(0,\infty)\times R^1\times R^1$ について滑かなことがわかる。このことから §3 の記号を用いて，$x=(0,x^2)$, $y=(0,y^2)$ に対し

$$(4.25)\qquad p(t,x,y)=\int_{W^1(t)} g(t,x^2,y^2;w)\,P_{0,t}(dW^1)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

が示される。この関係式は(3.13)と類似なものである。これから(3.14)に進むことはもはや明らかではない。そこで，$X^2(t,x^2,W)$のみたす方程式

$$(4.26)\qquad dX^2(t)=\alpha(W^1(t),X^2(t))\,dW^2(t)$$

を，W^1を固定して考え，すなわち$\mathcal{F}_1$で条件つけてBismutの考えにそった推論を進めることが期待される。αは第2変数については滑かであるので，滑かさが欠けている部分はW^1を条件付けておく限りでは残らない。いま滑かな場合のh_0をW^1を固定した(4.26)式に対応して計算すれば

$$\dot{h}_0(t)=\rho(x,y)\left\{\int_0^1\alpha(W^1(s),\phi_s(x^2,h_0;W^1))ds\right\}^{-1}$$

で与えられる。ここで$\rho(x,y)=|x^2-y^2|$で，ϕ_sは$\dot{\phi}(t)=\alpha(W^1(t),\phi(t))\dot{h}(t)$，$h\in H$の$\phi(0)=x^2$なる解とする。いま条件付た場合のBismutの考えを進めることが出来て，さらにW^1について“ある意味で一様に”漸近評価が行えるならば，(4.25)より$x=(0,x^2)$，$y=(0,y^2)$に対し

$$(4.27)\quad p(t,x,y)\sim\int_{W^1(1)}\exp\left\{-\rho(x,y)^2\Big/\left(2t\int_0^1\alpha(\sqrt{t}W^1(s),\phi_s(x^2,h_0;\sqrt{t}W^1))ds\right)\right\}$$

$$\times P_{0,1}(dW^1)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$$

が導かれることが期待される。もしこの結果を認めるならば、(3.8) の形の漸近評価を得るための計算は §3 の場合と同様である。言うまでもなく、(4.25) より (4.27) に進むには解決すべき技術的な問題が数多く残されているが、期待感の持てる話の筋になっている。尚この例ですべてが具合良く進むならば本質的には §3 の問題で、$M_1 = R^{d_1}$ で g_1 が R^{d_1} の平坦な metric の場合に肯定的な答が得られることになる。

6. 結び。 先に述べた問題のたて方は $\alpha=1$ 以外の場合以外は現在の所、他の問題との関連がみつからず、人工的で形式的なひろげ方になっている。また本来の Buslaev の問題の特別の場合しかふくまれない点で好ましくない。しかしながら、既に述べた様にこの範囲でも解決しようとすれば、Wiener 空間上の解析としては解決すべき多くのことがあるという意味で興味がある様に思える。Buslaev の場合を完全に調べるには座標変換を上手に行っても、Wiener 空間上の解析としてはもう1段困難と思えることが出て来る。

滑かな時とそうでない時の違いは、Riemannian metric を局所的に座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^d)$ で展開した時、後者の場合は $|x^1|^\alpha$, $0<\alpha<2$ なる項が座標を上手にとっても codimension 1 の部分多様体上の近傍で残ることである。この量が大局的に見た時、どの様な形で集積し無視出来ないものになるかを解析する方法を確立するのが、ここで論じている型の問題である。

References

1. D. G. Aronson, Isolated singularities of solutions of second order parabolic equations, Arch. Rat. Mech. Anal., 19 (1965), 231-238.

2. D. G. Aronson, Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 890-896.

3. R. Azencott, Grandes déviations et applications, Cours de Probabilité de Saint Flour, Lect. Notes in Math., n° 774, Berlin, Springer, 1978.

4. R. Azencott et., Géodésiques et diffusions en temps petit, Astérisque 84-85, Société Math. de France, 1981.

5. R. L. Bishop and B. O'Neil, Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math., 145 (1969), 1-49.

6. J. M. Bismut, Large deviations and the Malliavin calculus, Birkhäser, 1984.

7. J. M. Bismut, The Atiyah-Singer theorems for classical elliptic operators: A probabilistic approach, to appear in Jour. Funct. Anal.

8. V. S. Buslaev, Continuum integrals and the asymptotic

behavior of the solutions of parabolic equations as $t \to 0$, Applications to diffraction, Topics in Math. Physics, 2 (1968), ed. by M. Sh. Birman.

9. M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time, Functional integration and its applications, Proc. international conf. at Cumberland Lodge, Windsor Great Park, London, 1974, ed. by A.M. Arhus, 15-33.
10. B. Gaveau, Principle de moindre action, Propagation de la chaleur, estimés sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math. 139 (1977), 96-153.
11. J. Hadamard, Le probléme de Cauchy et les équations aux dérives partielles linéaires hyperboliques.
12. N. Ikeda, On the asymptotic behavior of the fundamental solution of the heat equation on certain manifolds, Proc. Taniguchi intern. Symp. on Stochastic Analysis, Katata and Kyoto, 1982, Kinokuniya, 1984.
13. N. Ikeda, Short time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations and curvature of hypersurfaces, The talk at A.M.S. Summer Conf. 1983 at Bolder.

14. N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, Kodansha, 1981

15. M. Kac, Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly 73 (April, 1966), 1~23

16. M. Kac, Integration in Function spaces and some of its applications, Accademia Nazionale dei Lincei scuola normale superiore, Pisa, 1980

17. M. Kac, Probability, Number theory and Statistical Physics, Selected Papers ed. by K. Bachawski and D. Donsker, MIT Press, 1979.

18. S. Kusuoka, Malliavin calculus based on Brownian motion and Bismut's formula, preprint.

19. E. E. Levi, Sull equatione de calore, Annali di Math., (3a), 14 (1902), 187-264.

20. P. Malliavin, Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, Proc. Intern. Symp. S.D.E, Kyoto, 1976, ed. K. Itô, Kinokuniya, 1978.

21. P. Malliavin, C^k-hypoellipticity with degeneracy, Stochastic Analysis, ed. by A. Friedman and M. Pinsky, 197-214, 327-340, Academic Press, New York, 1978

22. P. Malliavin, Implicit functions in finite corank on the Wiener space, Proc. Taniguchi Intern. conf. on Stochastic Analysis, Katata and Kyoto, 1982, Kinokuniya, ed. by K. Itô, 1984.

23. H. P. McKean and I. M. Singer, Curvature and eigenvalues of the Laplacian, Jour. Diff. Geometry 1 (1967), 43-69.

24. S. Minakshisundaram and A. Pleijel, Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operators on Riemannian manifolds, Can. Jour. Math. 1 (1949), 242-256.

25. S. A. Molchanov, Diffusion processes and Riemannian geometry, Russian Math. Survey, 30 (1975), 1-63.

26. I. Shigekawa, Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measure, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 263-289.

27. M. Schilder, Some asymptotic formulas for Wiener integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 125 (1966), 63-85.

28. S. R. S. Varadhan, Asymptotic probabilities and differential equations, Comm. Pure. Appl. Math., 19 (1966), 261-286.

29. S. R. S. Varadhan, On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, Comm. Pure. Appl. Math., 20 (1967), 431-455.