数理解析研究所講究録
第 533 巻 1984 年 256-271

実解析解の極小次元特異点集合の解析性について*)

東大 教養 金子 晃**)

ここで実解析係数の線型偏微分方程式 $P(x, D)u=0$ の実解析解 u に対し C がその（除去不可能な）特異点集合であるとは，u が C の各点の近傍まで超函数（hyperfunction）解として（即ち，局所性を保つ範囲でどんなに弱い意味でも解としては）延長できないことを云う．所謂古典的な意味での正則函数（即ちCauchy-Riemann方程式の解）の特異点と同義である．さてこのような特異点集合のうち集合としての次元が極小なものに限れば，その形状に強い制限がつくであろうというのが講者の長く考えていた問題である．即ち，作用素 P に固有の値 r があり，実解析解の特異点は少くとも r 次元の集合をなし，かつ最低次元 r の特異点集合は P に関して "timelike" な実解析的集合となる．一般の特異点集合は

*) On the analyticity of the locus of singularity of real analytic solutions with minimal dimension.

**) Akira KANEKO, College of General Education, Univ. of Tokyo.

かかる極小な特異点の“重量”としてすべて得られ，一般に“weakly timelike”である，というのが一般的予想である．正確な命題とするにはこれを局所化して集合芽の言葉で述べる必要があり，また r の値は更にある種の方向性を意味する函数にも依存する（それ故最小次元よりも極小次元の方が正確な云い方である）．誌者は既に一般の作用素 $P(x,D)$ に対し機会ある毎に種々の部分的結果を発表して来たが，ここでそれらを正確に述べ直すのは言葉の準備等が煩雑になるので，総合解説的な文献［6］，［8］を参照願うこととし，以下では波動方程式

$$(1) \qquad P(D) = D_1^2 + \cdots + D_{n-1}^2 - D_n^2$$

に限って問題の本質を説明することとしよう．

以下 $P(D)$ に関して非特性的な解析的超曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ を一つ固定し，$C \subset S$ なる特異点集合のみを考える．[1)]

既知の結果 I) $P(D)u=0$ の実解析解の特異点集合 C は，次元が[2)] 1 以上で，かつ weakly timelike となる（即ち，C

---

1) この条件は超函数的境界値問題を用いるという方法論的制約から来る．ただし，波動方程式に限って云えば双曲性から C が weakly timelike なことが直ちに出るし，また楕円型因子を含まないので 0 次元の特異点集合はあり得ないこと（［3］の結果）もわかるので，この条件は，例えば 1) を結論するには不要である．

のすべての余法線方向[2)]が $\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2 \geq \xi_n^2$ を満たす)。([5], Theorem 3.)

II) 更に、Cは1次元の連続曲線で、uは特異点集合Cに沿って tempered singularity を持つ(即ち、distribution としてCの近傍まで延長できる)とする。このときCは実は実解析的曲線である。([5], Theorem 4.)

III) 更に、CはPに関して非特性的なある超平面に含まれているとする。このときCはいたるところ timelike な(即ち余法線方向が $\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2 > \xi_n^2$ を満たす)曲線となるか、或は一本の陪特性直線と一致する。([7], Corollary 4.4).

IV) 逆にCを到る処 timelike な任意の実解析的曲線とすれば、Cを除去不可能な特異点集合とする $P(D)u=0$ の実解析解が存在する。この解はCに沿って tempered singularity を持つようなものの範囲で構成できる。([6], Theorem IV)

以下の話の背景を理解してもらうため、各主張の証明の粗筋を述べておこう。解uの超曲面Sへの両側からのj次境界

---

2) 集合Cの点 $x^0\in C$ における一般的な意味での余法線 ξ とは $\exists\varepsilon>0$ について $B_\varepsilon^\pm(x_0)=\{\frac{1}{\varepsilon}(x-x^0)^2<\langle x-x^0,\pm\xi\rangle<\varepsilon\}$ のいずれかがCと交わらぬことを云う。また点 $x^0\in C$ におけるCの次元 $\dim_{x^0}C$ とは $x^0\in C$ におけるCの余法線の集合 $\cup\{0\}$ に含まれる $\mathbb{R}^n_\xi$ の部分ベクトル空間の余次元の最小値を云い、Cの次元とは $\max_{x^0}\dim_{x^0}C$ を指すこととする。いずれも部分多様体に対しては通常の意味になる。

値の差 u_j ($0 \leq j \leq m-1$, ここに $m = \deg P$) を考えると,

(2) C が除去不可能な特異点集合 $\Longleftrightarrow \bigcup_{j=0}^{m-1} \operatorname{supp} u_j = C$

これと S.S. u_j が weakly timelike な方向のみより成るという, 実解析解の境界値の特異スペクトル評価に対する結果 ([4], Theorem 2.1) をつき合わせると, 河合-柏原のホルムグレン型定理より C の余法線が weakly timelike の条件を満たすことがわかる.

II) はこのとき u_j が C の"接線方向"の変数につきミクロ解析的となることから, 次の補題 ([5], Lemma 5) に帰着される.[3)]

<u>鍵的補題 $\varphi(t)$ を n 変数のパラメータ t の連続函数とし, $C = \{x = \varphi(t)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とする. もし $\operatorname{supp} u = C$ なる distribution $u(x, t)$ で t を実解析パラメータとして含むものがあれば, $\varphi(t)$ は実解析函数である.</u>

我々の波動方程式 $P(D)$ に対しては $t = x_n$ (でパラメータは1個), また C は $n-1$ 個の函数 $\varphi_j(t)$ ($1 \leq j \leq n-1$) で記述される (超曲面 S に入っているので実質的にはもう一つ少ないが) ので, 変数の個数が合わない様に見えるが, u の多項式倍の定積分をすべて考えることにより各成分 φ_j に対する同じ主張に帰着されるのである. (一方パラメータ t の方は一般には一個に帰着できないので上の補題では一般の作用

3) u の singularity が tempered だと境界値 u_j が distribution となる.

素の場合に合わせて n 変数としてある．正則函数の場合と異なり，次の主張は正しくないことに注意せよ：$\varphi(t)$ は n 変数 t の連続函数で，任意の実解析曲線 $t=\chi(s)$ に対し $\varphi(\chi(s))$ が一変数実解析函数となるようなものとする．このとき $\varphi(t)$ は実解析函数となる？ 反例は $(t_1^4+t_2^4)^{1/2}$ で与えられる．（柏原氏の教示による）．）

Ⅲ）の主張は陪特性直線に沿う境界値の特異性伝播の結果（［7］, Theorem 4.2）から出るので，ここまで精密に云えるのは今のところ波動方程式の場合だけである．この引用文献は定数係数作用素のみを扱っているため，S が超平面という仮定が付いているのだが，この仮定は恐らく不要であろう．（その辺のことについては別の機会にゆずる．）

Ⅳ）に主張するような解は C を台とする線密度 $\delta_C(x)$ に対しミクロ函数 $P^{-1}\delta_C(x)$ の超函数としての代表元として与えられる．この証明法から distribution の範囲でも構成できることが知れる．なおこの主張に関しては $C\subset S$ という条件は当然のことながら何の制約ともなっていない．

さて，当面の問題は主張Ⅱ）（従ってⅢ））における，u の singularity が tempered という仮定をはずそうというものである．このためには上の鍵的補題を hyperfunction に対しても示す必要がある：

予想 上の鍵的補題は $u(x,t)$ が t を実解析パラメータとして含む超函数(hyperfunction)に対しても正しい.

この予想はすでに[5]の中に述べられているが,そこではまさに"当推量"の意味であった.しかし最近 $u(x,t)$ の階数が無限大でもかなり一般な場合まで成り立っていることがわかったので,以下それを示すことを本日の話の主題とする.ただしまだ完全な解答ではないので,問題の難しさを示し旁少し廻り道をして今まで考えたこの予想に対する種々の云い換えを与えておくのをお許し願いたい.

そこで $u(x,t)$ を $\mathrm{supp}\, u = C = \{x=\varphi(t)\}$ なる超函数とし[4] t を実解析パラメータとして含むとする.(この意味は,S.S. $u(x,t)$ が $\pm i\,dt\infty$ 方向を含まぬことで,台の条件からこれは複数個[5]のパラメータ ω を含む任意の実解析函数 $\psi(x,\omega)$ に対し $\int u(x,t)\psi(x,\omega)\,dx$ が t,ω の実解析函数となることと同値である.) このような超函数はS.S.の定義により

(3) $$u(x,t) = F_+(x+i0,t) - F_-(x-i0,t)$$

と境界値表示される.ここに $F_\pm(z,\tau)$ は $\pm\mathrm{Im}\,z$ 軸を含むある錐 $\pm\Gamma = \{\frac{1}{\delta}|\mathrm{Im}\,\tau| < \pm\mathrm{Im}\,z < \delta\}$ の開きを持った楔で正則な函数であり,$u(x,t) = F_+((x,t)+i\Gamma 0) - F_-((x,t)-i\Gamma 0)$ と書けば

4) 証明すべき主張は明らかに局所的なので,以下 $\varphi(0)=0$ とし,$0 \in C$ の近傍で考え,必要ならこの近傍を適宜縮める.

5) 十分条件としては変数 x の個数の2倍に限ってもよい.脚注6)参照.

普通であるが上の表現は一度 t を実軸に制限して得られる正則パラメータ z を含んだ超函数 $F_{\pm}(z,t)$ から更に境界値をとったものと解釈すれば厳密な意味を持つ．さて $\mathrm{supp}\, u \subset C$ より $F_{\pm}(z,\tau)$ は実軸上 C の外で正則につながるので実は一つの函数 $F(z,\tau)$ と思って良い．特に $F(z,\tau)$ は $\{0<|z|<\delta\}\times\{|\tau|=0\}$ の近傍で正則となり，従って $\forall\varepsilon>0$ に対し $^{\exists}T_{\varepsilon}>0$ があって，$F(z,\tau)$ は $\{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant\delta-\varepsilon\}\times\{|\tau|\leqslant T_{\varepsilon}\}$ で正則となる．今，$\delta-\varepsilon$, T_{ε} を夫々改めて δ; T と書き $F(z,\tau)$ を一定の多重円環 $\{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant\delta\}\times\{|\tau|\leqslant T\}$ 上の正則函数とみなそう。仮定により $F(z,\tau)$ は更に τ を $\{|\tau|\leqslant T\}$ 内の実数値 t に固定するとき z につき $|z|\leqslant\delta$, $|z-\varphi(t)|>0$ まで解析接続できる[6]．

<u>予想の云い換えI</u>　<u>$F(z,\tau)$ は閉多重円環 $\{\varepsilon\leqslant|z|\leqslant\delta\}\times\{|\tau|\leqslant T\}$ で正則で，τ を実数値 t に固定する毎に z につき $\{|z|\leqslant\delta\}\setminus\{\varphi(t)\}$ まで解析接続されるとする。このとき $\varphi(t)$ は t の実解析函数となる．</u>

試みに t を実数値として固定し $F(z,t)$ を z につき Laurent 級数に展開してみよう：

(4)
$$F(z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(t)}{(z-\varphi(t))^k}+H(z,t)$$

6) このような定義函数としては $G(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x,t)}{z-x}dx$ で標準的なものが得られる．一般論により $G(x+i0,t)-G(x-i0,t)=u(x,t)$ がわかるので，この積分が z,t につき実解析的なら $u(x,t)$ が t を実解析パラメータとして含むことがわかる．

ここで $H(z,t)$ は容易にわかるように $\{|z|\leq\delta\}\times\{|\tau|\leq T\}$ で正則となり超函数 $u(x,t)$ の定義には寄与しない[7]. 定積分 $\int_{-\infty}^{\infty}x^k u(x,t)dx = -\oint_{|z|=\delta}z^k F(z,t)dz$ を $k=0,1,2,\cdots$ について計算してみると

$$a_1(t) = F_0(t)$$

$$a_2(t)+a_1(t)\varphi(t) = F_1(t)$$

$$\vdots$$

$$a_k(t)+\binom{k-1}{1}a_{k-1}(t)\varphi(t)+\cdots+\binom{k-1}{k-1}a_1(t)\varphi(t)^{k-1} = F_{k-1}(t)$$

という等式の列が得られる. 右辺は仮定により $|\tau|\leq\delta$ まで正則函数として延長できるので, これらの式から $a_1(t)$ は常に $|\tau|\leq\delta$ で正則となること, また $a_k(t)$ $(k\geq 2)$ は $\varphi(t)$ とこれら正則函数により表わされることがわかる。故にもし $u(x,t)$ が distribution なら, ある番号から先の $a_k\equiv 0$ となり, $\varphi(t)$ は正則函数を係数とする代数方程式の根となってそこから $\varphi(t)$ の解析性が導かれる. しかし一般には困難が次々と生まれてくるだけで, この無限連立系からは何も期待できそうにない.

注意 函数論では次の Hartogs の定理が良く知られている. (例えば [2], 定理 3.14): $\varphi(\tau)$ は $|\tau|\leq T$ の一価函数, $F(z,\tau)$ は多重円盤 $\{|z|\leq\delta\}\times\{|\tau|\leq T\}$ から余次元 2 の集合 $z=\varphi(\tau)$ を除いたところで正則で, かつこの集合を除去不可

7) 脚注 6) で述べた標準定義函数 $G(z,t)$ を用いればこの項は始めから存在しない. 以下の計算でわかるように係数 $a_k(t)$ は $u(x,t)$ に対する定積分で直接決まるので定義函数に依存しない.

能な特異点として持つとする．このとき$\varphi(\tau)$はτの正則函数となる．これを我々の言葉に翻訳すれば次のようになる：$u(z,\tau)$は"正則パラメータ"τを含む解析汎函数で，τを固定したときのzに関するその支台が常に一点$\varphi(\tau)$に等しいならば，$\varphi(\tau)$はτの正則函数である．我々の場合はτが実軸から離れるにつれて支台が広がるのでこの有名な定理の証明は適用できそうもない．

そこで次に別の工夫を用いることとし，$u(x,t)$をxにつき部分Fourier変換してみる：

$$\hat{u}(\zeta,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\zeta}u(x,t)dx=-\oint_{|z|=\delta}e^{iz\zeta}F(z,t)dz$$

$\hat{u}(z,t)$は$\mathbb{C}\times\{|\tau|\leq T\}$で正則で，$\tau$を固定するとき$\zeta$につき高々型$\leq\delta$の指数型整函数であり，また$\tau$を実数値$t$に固定すれば$J(\zeta,t)e^{i\varphi(t)\zeta}$と因数分解される．ここに$J(\zeta,t)$はパラメータ$t$に連続に依存する$\zeta$の劣指数型整函数である。

予想の言い換えII　実変数$|t|\leq\delta$の実数値連続函数$\varphi(t)$と，このtに連続に依存する劣指数型整函数$J(\zeta,t)$があり，積$J(\zeta,t)e^{i\varphi(t)\zeta}$は$\zeta,t$につき多重円盤$\mathbb{C}\times\{|\tau|\leq T\}$まで解析接続され，かつそれは$\tau$を固定したとき$\zeta$につき型$\leq\delta$の指数型整函数であるとする．このとき実は$J(\zeta,t)$，$\varphi(t)$が別々に同じところまで解析接続される．

2つの因子の性質が離れすぎているときには，積が解析接続

されるのは個々の因子が解析接続される以外にあり得ないというわけである。実際 $J(\zeta,t)$ が t に連続に依存する多項式のときはそのような方針でも容易に証明できる。$J(\zeta,t)$ が劣指数型のときは問題はかなり微妙である.

補題1　$J(0,t)\equiv 1$ としても一般性を失わない.

実際, $J(0,t)=\hat{u}(0,t)$ は仮定より $|\tau|\leq T$ に解析接続される. 故に $\hat{u}(0,0)\neq 0$ なら(必要なら $t=0$ の近傍を縮めて) $\hat{u}(0,t)$ で割り算したものを考えればよい. $\hat{u}(0,0)=0$ のとき, これが $\hat{u}(0,t)$ の位数 $k<\infty$ の零点なら $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u(x,t)$ を考えれば上に帰着する. 最後に $\hat{u}(0,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,dx\equiv 0$ のときは不定積分 $\int_{-\infty}^{x}u(x,t)\,dx$ が $u(x,t)$ と同じ性質を持つ. 不定積分を何回か続けると(これは $\int_{-\infty}^{x}x^k u(x,t)\,dx$, $k=0,1,2,\cdots$ を考えるのと同値) $u(x,t)$ 自身が自明でない限り遂には $\neq 0$ なるものが得られる.

そこで劣指数型整函数の因数分解定理

$$(5)\qquad J(\zeta,t)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{\alpha_k(t)}\right)$$

を適用しよう. ただし, $|\alpha_1(t)|\leq|\alpha_2(t)|\leq\cdots$ と並んでいるものとする. (絶対値の同じ根の並べ方は議論に影響しない.)

Lindelöf の定理([1], Theorem 2.10.3)によれば各固定した t について $|\alpha_k(t)|\leq r$ なる α_k の個数 $n(r)=o(r)$ で, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(t)}$ は条件収束する.

<u>補題 2</u> $\displaystyle i\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(t)}+\hat{u}_\zeta(0,t).$

<u>証明</u> $\zeta=0$ の近傍で

$$\log\hat{u}(\zeta,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{\zeta}{\alpha_k(t)}\right)+i\varphi(t)\zeta$$

の両辺を ζ につき微分すると

$$\frac{\hat{u}_\zeta(\zeta,t)}{\hat{u}(\zeta,t)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{\alpha_k(t)}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{\alpha_k(t)}\right)+i\varphi(t).$$

よく知られているようにこれらの級数は t を固定したとき ζ につき広義一様収束するので変形は正当である。ここで $\zeta=0$ と置けば上の公式が得られる。

$\hat{u}_\zeta(0,t)$ は明に $|\tau|\leq\delta$ まで解析接続されるので、この公式から $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(t)}$ の解析接続を論じれば良いこととなる。$J(\zeta,t)=0$ は $\hat{u}(\zeta,t)=0$ と同値なので後者の根を改めて $\alpha_k(\tau)$ と記し、$|\alpha_1(\tau)|\leq|\alpha_2(\tau)|\leq\cdots$ と並べておこう。再び Lindelöf の定理により（[1], Theorem 2.5.13 と Theorem 2.10.1, 及びその証明参照）$n(r)=\#\{\alpha_k(\tau);|\alpha_k(\tau)|\leq r\}\leqq e\delta r$ （$e=2.71\cdots$ δ は指数型）で、かつ部分和

(6) $$\beta_N(\tau)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\alpha_k(\tau)}$$

は指数型 δ の普遍定数倍で評価される（従って $|\tau|\leq\delta$ につき一様に有界となる）。$\alpha_k(\tau)$ が（絶対値も込めて）他から分離しているところでは、それは解析的集合 $\hat{u}(\zeta,\tau)=0$ の局所方程式として正則となることに注意せよ。

<u>命題 3 $|\tau|\leq\delta$ において大域的に $|\alpha_1(\tau)|<|\alpha_2(\tau)|<\cdots$ と</u>

する。このとき $\varphi(t)$ は $|\tau|<\delta$ に解析接続できる.

証明　上に注意したところにより部分和 $\beta_N(\tau)$ は $|\tau|<\delta$ で正則, かつ一様に有界である. 故に Montel の定理により $\{\beta_N(\tau)\}$（の任意の部分列）は $|\tau|<\delta$ で広義一様収束する部分列を含む. その極限は $|\tau|<\delta$ で正則となり, かつ実軸上では条件収束級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k(t)}$ の和と一致するのだから, 後者が解析接続できることがわかった. ちなみに極限が一定となるので微積分で良く知られた論法により実は級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k(\tau)}$ 自身が $|\tau|<\delta$ で広義一様収束する.

上の補題は何らの変更なしに次の場合に拡張できる.

命題 3′　正数の列 $r_N \nearrow \infty$ があり, 各円周 $|\zeta|=r_N$ は $\hat{u}(\zeta,\tau)$ の根 $\alpha_k(\tau)$ を一つも含まぬとする. このとき命題 3 と同じ結論が得られる.

実際, 今度は

$$(7) \qquad \beta_N(\tau) = \sum_{|\alpha_k(\tau)|<r_N} \frac{1}{\alpha_k(\tau)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r_N} \frac{\hat{u}_\zeta(\zeta,\tau)}{\hat{u}(\zeta,\tau)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

で定まる正則函数の列に Montel の定理を適用すればよい.

このように根が分離できることを仮定するのはあまり一般的ではないので, 今度はある程度の重根があり, またそれがある程度動き回る場合を考えよう.

命題 4　正数の組 $\{r_{N1}<r_{N2}<\cdots<r_{Nm_N}\}$ の列 $(N=1,2,\cdots)$ を, $r_{N1} \leq |\alpha_k(\tau)| \leq r_{Nm_N}$ なる根の数が[8] $o\left(\frac{r_{N1}}{m_N}\right)$ の正数

8) もちろん重複度も込めて

n_N で一様に抑えられる様に選び

$$E_{Nj} = \{\tau\ ;\ \text{ある } k \text{ について } |\alpha_k(\tau)| = r_{Nj}\}$$

とおく ($1 \le j \le m_N$, $N = 1, 2, \cdots$). いま E_{Nj} の ε-近傍を E_{Nj}^{ε} で表わすとき, もしも正数列 ε_N で

(8) $$\frac{n_N}{r_{N1}\varepsilon_N} = O(1) \qquad (N \to \infty)$$

を満たし, かつ

(9) $$E_{N1}^{\varepsilon_N} \cap \cdots \cap E_{Nm_N}^{\varepsilon_N} = \phi$$

となるものが存在すれば, 命題3と同じ結論が成り立つ.

証明
$$\beta_{Nj}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\ \mathrm{p.v.}\oint_{|\zeta| = r_{Nj}} \frac{\hat{u}_\zeta(\zeta, \tau)}{\hat{u}(\zeta, \tau)} \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (1 \le j \le m_N,\ N = 1, 2, \cdots)$$

とおく. ただし p.v. は円周 $|\zeta| = r_{Nj}$ 上に分母の零点があったときはそこで積分の主値をとる意味である. $\beta_{Nj}(\tau)$ は $\{|\tau| \le \delta\}$ から集合 E_{Nj} を除いたところで正則, かつ一様有界であり, E_{Nj} においても値の跳躍は高々 $\dfrac{n_N}{r_{Nj}} \le \dfrac{n_N}{r_{N1}} = o(1)$ である. 今 $\beta_{Nj}(\tau)$ を E_{Nj} の ε_N 近傍内で一様有界性を保ちつつ C^1 級に修正し, かつその導函数も一様有界であるようにする. (これは仮定(8)により可能となる.) さて, こうして得られた "函数の列" $\{\beta_{Nj}(\tau)\}$ (より正確には函数列 $\{\beta_{N1}(\tau)\}_{N=1}^{\infty}$) は一様有界, かつ $|\tau| < \delta$ で同程度連続であるから, Ascoli-Arzelà の定理により広義一様収束する部分列を持つ. これを実軸上で見れば, $\beta_{Nj}(t)$ は $\displaystyle\sum_{|\alpha_k(t)| \le r_{Nj}} \frac{1}{\alpha_k(t)}$ と高々円周 $|\zeta|$

$= r_{Nj}$ 上の根の分，即ち $\frac{n_N}{r_{N1}} = o\left(\frac{1}{m_N}\right)$ でしか違っておらず，従って上の部分列の極限は $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k(\tau)}$ と一致する．故にあとは極限が $|\tau| < \delta$ で正則なことを示せば良い．各 $\beta_{Nj}(\tau)$ は $|\tau| \leq \delta$ 全体で正則ではないが，それを m_N 個組み合わせて考えれば，$|\tau| \leq \delta$ の各点でそのどれかが正則となっている（仮定(9)）．故に問題は，正則函数列の一様収束極限の正則性を主張する古典的補題を次のように拡張することに帰着された．

補題5　連続函数の組 $\{f_{N1}(z), \cdots, f_{Nm_N}(z)\}$ の列 $(N=1,2,\cdots)$ があり，次の諸条件を満たしているとする：

1) 正数列 ε_N $(N=1,2,\cdots)$ で $m_N \varepsilon_N \to 0$ $(N \to \infty)$ を満たすものがあり

$$|f_{Nj}(z) - f_{Nk}(z)| \leq \varepsilon_N \qquad (1 \leq j, k \leq m_N).$$

2) 各 N について $|\tau| \leq \delta$ の部分領域による被覆 $D_{N1} \cup \cdots \cup D_{Nm_N}$ があり $f_{Nj}(z)$ は D_{Nj} で正則 $(j=1,\cdots,m_N)$．

このとき $f_{N1}(z)$ が $f(z)$ に $|\tau| < \delta$ で広義一様収束していれば，極限函数 $f(z)$ は $|\tau| < \delta$ で正則となる．

証明　古典的補題の場合と同様，Cauchy の積分定理が成り立つことを示せばよい．$\{|\tau| < \delta\}$ 内の任意の区分的に滑らかな単純閉曲線 γ に対し N を一つ固定して閉曲線 $\gamma_j \subset D_{Nj}$ $(1 \leq j \leq m_N)$ を $\sum \gamma_j = \gamma$ となる様に選べば，

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m_N} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

$$= \sum_{j=1}^{m_N} \oint_{\gamma_j} f_{Nj}(z)\,dz + \sum_{j=1}^{m_N} |\gamma| \cdot \sup_{z\in\gamma} |f(z) - f_{Nj}(z)|$$

ここで第一項は各 $f_{Nj}(z)$ の D_j における正則性により 0，また第二項は $\leq |\gamma| \sup |f(z)-f_{N1}(z)| + m_N \varepsilon_N$ であり，仮定により $N\to\infty$ のとき 0 に近づく．故に $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ である．

最後の命題の条件はあまり見易くはないが，直観的に云えば重根が動き回っても $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\alpha_k(\tau)}$ の末尾の項を適当に修正したものの極限を考えれば良い，ということであり，分岐点があまり多くなければ上の仮定を満たすような正数列 $\nu_N \nearrow \infty$ が選べるだろうというわけである．指数型整函数の零点はそう多くはないので，分岐点がそれほど密には現われず，従って上の命題の仮定に近いことが一般に成り立っているであろう，と想像されるのだが御静聴下さった諸兄には我々の予想をどの程度信頼して頂けたであろうか？

文献

[1] Boas R. Ph.: Entire Functions, Academic Press, New York, 1954

[2] 一松 信: 多変数解析函数論, 培風館, 1960

[3] Kaneko A.: On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A 17 (1970), 567-580.

[4] ———: Singular spectrum of boundary values of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 25 (1975), 59-68; 訂正 [7], Appendix B.

[5] ———: Analyticity of minimal dimensional singularity of real analytic solutions, Ibid. 26 (1976), 1-5.

[6] ———: On continuation of regular solutions of linear partial differential equations, Publ. RIMS Kyoto Univ. 12 Suppl. (1977), 113-121.

[7] ———: Estimation of singular spectrum of boundary values for some semi-hyperbolic operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A. 27 (1980), 401-461.

[8] ———: On continuation of real analytic solutions of linear partial differential equations, Astérisque 89-90, (1981), 11-44.