数理解析研究所講究録
第534巻 1984年 15-27

完全2組グラフのP_3因子分解

近畿大学　潮　和彦　(Kazuhiko Ushio)

1. はじめに

P_3を3点を結ぶパスとする。成分がすべてP_3であるような全域部分グラフをP_3因子とよぶ。完全2組グラフ$K_{m,n}$を，互いに線を共有しないように，P_3因子の和に分解するP_3因子分解を考える。$K_{m,n}$がP_3因子をもつための必要十分条件について述べる。さらに，$K_{m,n}$がP_3因子分解可能であるための必要十分条件について述べる。

2. $K_{m,n}$とP_3因子

$K_{m,n}$の2組の点集合をV_1, V_2 ($|V_1|=m$, $|V_2|=n$) とし，

$$V_1=\{1, 2, \cdots, m\}, \quad V_2=\{1, 2, \cdots, n\}$$

で表わす。V_1の点iとV_2の点jを結ぶ線を(i,j)で表わす。$K_{m,n}$の部分グラフP_3は，V_1の点1個とV_2の点2個を結ぶパスであるか，あるいは，V_1の点2個とV_2の点1個を結ぶパスのいずれかである。P_3の次数2の点をP_3の中心点とよぶ。する

と，$K_{m,n}$ の P_3 因子は，この２種類の P_3 を成分にもつような，$K_{m,n}$ の全域部分グラフである。

$K_{m,n}$ が P_3 因子をもつための必要十分条件に関して，次の定理が成り立つ。

定理１　$K_{m,n}$ が P_3 因子をもつ $\Longleftrightarrow$ $m+n\equiv 0 \pmod 3,\ m\leqq 2n,\ n\leqq 2m.$

証明　($\Longrightarrow$) $K_{m,n}$ の１つの P_3 因子を F とする。この F に対して，中心点が V_1 にある P_3 成分の数を x，中心点が V_2 にある P_3 成分の数を y ($0\leqq x\leqq m,\ 0\leqq y\leqq n$) とする。$F$ は $K_{m,n}$ の全域部分グラフであるから，$K_{m,n}$ の $m+n$ 個の点は，この $x+y$ 個の P_3 のいずれかに１回だけ現われている。P_3 は３個の点をもっているので $m+n\equiv 0 \pmod 3$ である。さらに，この x 個の P_3 は，V_1 の点を x 個と V_2 の点を $2x$ 個もっている。また，y 個の P_3 は，V_1 の点を $2y$ 個と V_2 の点を y 個もっている。$m+n$ 個の点が全て１回ずつ現われているので，$x+2y=m$，$2x+y=n$ である。この連立方程式を解いて，$x=(2n-m)/3$，$y=(2m-n)/3$ を得る。$0\leqq x\leqq m$，$0\leqq y\leqq n$ より $m\leqq 2n$，$n\leqq 2m$ が出てくる。

($\Longleftarrow$) $m+n\equiv 0 \pmod 3,\ m\leqq 2n,\ n\leqq 2m$ をみたす m,n に対して，$x=(2n-m)/3$，$y=(2m-n)/3$ とおく。$m+n\equiv 0 \pmod 3$ より，この x,y は共に整数である。また，$m\leqq 2n,\ n\leqq 2m$ より，$0\leqq x\leqq m$，$0\leqq y\leqq n$ である。このとき，$x+2y=m$，$2x+y=n$

が成り立つ。V_1の点x個とV_2の点$2x$個を一度ずつ使って，中心点がV_1にあるP_3をx個作る。残ったV_1の点$2y$個とV_2の点y個を一度ずつ使って，中心点がV_2にあるP_3をy個作る。すると，作られた$x+y$個のP_3が$K_{m,n}$のP_3因子となる。(証明終り)

特に，$m=n$の場合には，次の系が得られる。

系1　$K_{n,n}$がP_3因子をもつ$\Leftrightarrow n\equiv 0 \pmod 3$.

3. $K_{m,n}$のP_3因子分解

$K_{m,n}$がP_3因子をもつ場合に，さらに，互いに線を共有しないように，$K_{m,n}$をP_3因子の和に分解する事を考える。これは，$K_{m,n}$のmn本の線が，どれかのP_3因子に1回だけ現われるようにできるかという問題である。

$K_{m,n}$がP_3因子の和に分解可能であるための必要十分条件に関して，次の定理が成り立つ。

定理2　$K_{m,n}$がP_3因子分解可能である

$\Leftrightarrow m+n\equiv 0 \pmod 3, m\leqq 2n, n\leqq 2m$，かつ，$\frac{3mn}{2(m+n)}$は整数.

特に，$m=n$の場合には，次の系が得られる。

系2　$K_{n,n}$がP_3因子分解可能である$\Leftrightarrow n\equiv 0 \pmod{12}$.

3.1　定理2の必要性の証明

$K_{m,n}$の分解で得られたP_3因子の数をrとする。すると，$K_{m,n}$はこれらのP_3因子をもつので，定理1から，$m+n\equiv 0$ $\pmod 3$, $m\leqq 2n$, $n\leqq 2m$が得られる。各P_3因子がもつP_3成

分の数を t とすれば，P_3 因子は $K_{m,n}$ の全域部分グラフであることから，$m+n=3t$ である。さらに，$K_{m,n}$ の mn 本の線は，これら rt 個の P_3 に1回だけ現われている。各 P_3 は2本の線をもつ。そこで，$mn=2rt$ が成り立つ。これから，$r=\frac{mn}{2t}=\frac{3mn}{2(m+n)}$ は整数でなければならない。

3.2　$K_{m,n}$ の P_3 因子分解の拡張定理

$K_{m,n}$ が P_3 因子分解可能である場合には，次の様な拡張定理が成り立つ。

定理3　$K_{m,n}$ が P_3 因子分解可能である

$\Rightarrow$ $K_{\alpha m,\alpha n}$ も P_3 因子分解可能である $(\alpha>0)$.

証明　$K_{\alpha m,\alpha n}$ の2組の点集合 $V_1=\{1,2,\cdots,\alpha m\}$，$V_2=\{1,2,\cdots,\alpha n\}$ を分割する。$V_1=\bigcup_{i=1}^{\alpha}V_1^{(i)}$，$V_2=\bigcup_{j=1}^{\alpha}V_2^{(j)}$。$V_1^{(i)}=\{(i-1)m+1,(i-1)m+2,\cdots,im\}$ $(i=1,2,\cdots,\alpha)$．$V_2^{(j)}=\{(j-1)n+1,(j-1)n+2,\cdots,jn\}$ $(j=1,2,\cdots,\alpha)$ とする。この 2α 個の部分集合 $V_1^{(i)}, V_2^{(j)}$ を点と見て，2つの部分集合 $V_1^{(i)}, V_2^{(j)}$ の間に結ばれている mn 本の線を1本の線と見れば，$K_{\alpha m,\alpha n}$ から1つの新しいグラフ $\widetilde{K}_{\alpha,\alpha}$ が作られる。$\widetilde{K}_{\alpha,\alpha}$ が1-因子分解可能である，即ち，P_2 因子分解可能であることは良く知られている。これをもとの $K_{\alpha m,\alpha n}$ にもどって見直せば，$\widetilde{K}_{\alpha,\alpha}$ の P_2 因子は $K_{\alpha m,\alpha n}$ の $K_{m,n}$ 因子に相当する。従って，$K_{\alpha m,\alpha n}$ は $K_{m,n}$ 因子分解可能である。仮定より，$K_{m,n}$ は P_3 因子分解可能であるから，$K_{\alpha m,\alpha n}$ が P_3 因子分解可能であることは容易に分る。
（証明終り）

3.3 定理2の十分性の証明

$m+n\equiv 0 \pmod 3$, $m\leqq 2n$, $n\leqq 2m$, かつ, $\frac{3mn}{2(m+n)}$は整数であるようなパラメータ m,n に対して, $K_{m,n}$ がP_3因子分解可能であることを証明する。

(I) $m=2n$の場合　この場合には, 次の lemma が成り立つ.

Lemma 1　$m=2n \Rightarrow K_{m,n}$ はP_3因子分解可能である.

証明　$K_{2,1}=P_3$であるから, 定理3より, $K_{2n,n}$はP_3因子分解可能である。(証明終り)

(II) $n=2m$の場合　この場合には, 次の lemma が成り立つ。

Lemma 2　$n=2m \Rightarrow K_{m,n}$はP_3因子分解可能である.

証明　$K_{1,2}=P_3$であるから, 定理3より, $K_{m,2m}$はP_3因子分解可能である。(証明終り)

(III) $m<2n$, $n<2m$ の場合　$x=(2n-m)/3$, $y=(2m-n)/3$, $t=(m+n)/3$, $r=3mn/2(m+n)$ とおく。$m+n\equiv 0 \pmod 3$, $\frac{3mn}{2(m+n)}$ は整数, という条件より, この x,y,t,r は共に整数である。また, $m<2n$, $n<2m$ より, $0<x<m$, $0<y<n$ である。このとき, $x+2y=m$, $2x+y=n$ が成り立つ. この2式を r の式に代入すれば, $r=\frac{3mn}{2(m+n)}=\frac{3(x+2y)(2x+y)}{2(3x+3y)}=(x+y)+\frac{xy}{2(x+y)}$ となる. r は整数であるから, $\frac{xy}{2(x+y)}$ も整数である. $z=\frac{xy}{2(x+y)}$とおき, その整数性を追求する。今, x と$2y$ の最大公約数を d として, $(x,2y)=d$, $x=dp$, $2y=dq$, $(p,q)=1$ とおく。明らかに, dqは偶数である。

このとき，$z=\frac{xy}{2(x+y)}=\frac{dp\cdot\frac{dq}{2}}{2dp+dq}=\frac{dpq}{2(2p+q)}$となる。次のlemmaを用意する。

<u>Lemma 3</u>　$(p,q)=1 \Rightarrow (pq,p+q)=1$

<u>証明</u>　$(pq,p+q)=d'\neq 1$と仮定する。d'の素因数の1つをd_0とする。$d_0|pq$より，$d_0|p$ 又は $d_0|q$ である。$d_0|p$ ならば，$d_0|(p+q)$ より $d_0|q$ となり，$d_0|q$ ならば，$d_0|(p+q)$ より $d_0|p$ となり，いずれの場合にも，$d_0|(p,q)$ となり $(p,q)=1$ に反する。従って，$d'=1$ である。（証明終り）

このlemmaから次のlemmaが得られる。

<u>Lemma 4</u>　$(p,q)=1 \Rightarrow (pq,2p+q)=\begin{cases}1 & (q:\text{奇数のとき})\\ 2 & (q:\text{偶数のとき})\end{cases}$

<u>証明</u>　<u>(i) qが奇数のとき</u>　$(p,q)=1$ より $(2p,q)=1$ である。上のLemma 3より，$(2pq,2p+q)=1$。従って，$(pq,2p+q)=1$。

<u>(ii) qが偶数のとき</u>　$q=2q'$ とおく。$(p,q)=1$ より $(p,q')=1$ である。上のLemma 3より $(pq',p+q')=1$。従って，$(pq,2p+q)=(2pq',2p+2q')=2\times(pq',p+q')=2$.（証明終り）

$z=\frac{dpq}{2(2p+q)}$ の整数性から，次のlemmaが得られる。

<u>Lemma 5</u>　パラメータm,nは，$(p,q)=1$をみたすp,qを用いて，次の様な形で表わされる。

(i) q:奇数のとき，　$m=2(p+q)(2p+q)\alpha$, $n=(4p+q)(2p+q)\alpha$

(ii) $q=4q''$ のとき，　$m=(p+4q'')(p+2q'')\alpha$, $n=2(p+q'')(p+2q'')\alpha$

(iii) $q=2q'$, q':奇数のとき、 $m=2(p+2q')(p+q')\alpha$, $n=2(2p+q')(p+q')\alpha$

ここで, αは任意の正の整数である。

証明 (i) q:奇数のとき Lemma 4より, $(pq, 2p+q)=1$ である。さらに, dq は偶数であるから, d は偶数である. さらに, $2p+q$ は奇数である。従って, $z=\frac{dpq}{2(2p+q)}$ の整数性から, d は $2(2p+q)$ の倍数である。 $d=2(2p+q)\alpha$ とおく。 $x=dp=2p(2p+q)\alpha$, $y=\frac{1}{2}dq=q(2p+q)\alpha$, $m=x+2y=2p(2p+q)\alpha+2q(2p+q)\alpha=2(p+q)(2p+q)\alpha$, $n=2x+y=4p(2p+q)\alpha+q(2p+q)\alpha=(4p+q)(2p+q)\alpha$ を得る.

(ii) $q=4q''$ のとき Lemma 4より, $(pq, 2p+q)=(4pq'', 2p+4q'')=2$ である。従って, $(2pq'', p+2q'')=1$, $(pq'', p+2q'')=1$ である。$z=\frac{dpq}{2(2p+q)}=\frac{dpq''}{p+2q''}$ の整数性から, d は $p+2q''$ の倍数である。$d=(p+2q'')\alpha$ とおく。 $x=dp=p(p+2q'')\alpha$, $y=\frac{1}{2}dq=2q''(p+2q'')\alpha$, $m=x+2y=p(p+2q'')\alpha+4q''(p+2q'')\alpha=(p+4q'')(p+2q'')\alpha$, $n=2x+y=2p(p+2q'')\alpha+2q''(p+2q'')\alpha=2(p+q'')(p+2q'')\alpha$ を得る。

(iii) $q=2q'$, q':奇数のとき Lemma 4より, $(pq, 2p+q)=(2pq', 2p+2q')=2$ である。従って, $(pq', p+q')=1$ である。さらに, q は偶数であるから, $(p,q)=1$ より, p は奇数である。$z=\frac{dpq}{2(2p+q)}=\frac{dpq'}{2(p+q')}$ の整数性から, d は $2(p+q')$ の倍数である。$d=2(p+q')\alpha$ とおく。$x=dp=2p(p+q')\alpha$, $y=\frac{1}{2}dq=2q'(p+q')\alpha$, $m=x+2y=2p(p+q')\alpha+4q'(p+q')\alpha=2(p+2q')(p+q')\alpha$, $n=2x+y=4p(p+q')\alpha+2q'(p+q')\alpha=2(2p+q')(p+q')\alpha$ を得る。(証明終り)

Lemma5での$\alpha=1$のときのパラメータm, nに対して，$K_{m,n}$がP_3因子分解可能であることを，分解アルゴリズムを示すことによって証明する。次の3つのlemmaが成り立つ。

<u>Lemma6</u>　$(p,q)=1$, q:奇数のとき

$m=2(p+q)(2p+q)$, $n=(4p+q)(2p+q) \Longrightarrow K_{m,n}$は$P_3$因子分解可能である。

<u>証明</u>　この場合，$x=2p(2p+q)$, $y=q(2p+q)$, $t=(2p+q)^2$, $r=(p+q)(4p+q)$である。$r_1=p+q$, $r_2=4p+q$, $m_0=m/r_1=2(2p+q)$, $n_0=n/r_2=2p+q$とおく。$K_{m,n}$の2組の点集合は，$V_1=\{1,2,\cdots,2(p+q)(2p+q)\}$, $V_2=\{1,2,\cdots,(4p+q)(2p+q)\}$である。共に長さが$4(2p+q)$の2つの数列$R, C$を考える。

$$R:\ 1,1,2,2,\ \cdots,\ 2(2p+q),\ 2(2p+q)$$

$$C:\ 1,2,3,4,\ \cdots,\ 4(2p+q)-1,\ 4(2p+q)$$

数列Rのどの要素にも$(i-1)\times 2(2p+q)$を加えてできる数列をR_i($i=1,2,\cdots,p$)とする。数列Cのどの要素にも$2(i-1)$を加え，それを$4(2p+q)$で割った剰余(割り切れたときは，剰余は$4(2p+q)$とする)に$(i-1)\times 4(2p+q)$を加えてできる数列をC_i($i=1,2,\cdots,p$)とする。次に，共に長さが$2(2p+q)$の2つの数列R', C'を考える。

$$R':\ 1,2,3,4,\ \cdots,\ 2(2p+q)-1,\ 2(2p+q)$$

$$C':\ \overbrace{1,3,5,\cdots,2p+q}^{p+\frac{q-1}{2}},\ \overbrace{2,4,6,\cdots,2p+q-1}^{p+\frac{q-1}{2}},\ \overbrace{1,3,5,\cdots,2p+q}^{p+\frac{p+1}{2}},$$
$$\overbrace{2,4,6,\cdots,2p+q-1}^{p+\frac{q-1}{2}}$$

数列R'のどの要素にも$(i-1)\times 2(2p+q)+2p(2p+q)$を加えてできる数列を$R'_i$ $(i=1,2,\cdots,q)$とする。数列C'のどの要素にも$2p+i-1$を加え，それを$2p+q$で割った剰余（割り切れたときは，剰余は$2p+q$とする）に$(i-1)\times(2p+q)+4p(2p+q)$を加えてできる数列を$C'_i$ $(i=1,2,\cdots,q)$とする。数列$R_1,R_2,\cdots,R_p,R'_1,R'_2,\cdots,R'_q$を一列に並べてできる数列をIとする。数列$C_1,C_2,\cdots,C_p,C'_1,C'_2,\cdots,C'_q$を一列に並べてできる数列をJとする。数列I,Jの長さは，共に$4(2p+q)\times p+2(2p+q)\times q=2(2p+q)^2=2t$である。数列I,Jの才$k$番目の要素を$i_k,j_k$で表わす$(k=1,2,\cdots,2t)$。$V_1$の点$i_k$と$V_2$の点$j_k$を結ぶ線$(i_k,j_k)$ $(k=1,2,\cdots,2t)$で作られるグラフをFとすれば，Fは$K_{m,n}$のP_3因子になっていることが分る。このFを数列I,Jで作られたP_3因子とよぶことにする。数列Iのどの要素にも$(i-1)m_0$を加え，それをmで割った剰余（割り切れたときは，剰余はmとする）でできる数列をI_i $(i=1,2,\cdots,r_1)$とする。数列Jのどの要素にも$(j-1)n_0$を加え，それをnで割った剰余（割り切れたときは，剰余はnとする）でできる数列をJ_j $(j=1,2,\cdots,r_2)$とする。数列I_i,J_jで作られたP_3因子をF_{ij}とすれば，F_{ij} $(i=1,2,\cdots,r_1;\ j=1,2,\cdots,r_2)$が$K_{m,n}$の$P_3$因子分解を与えていることが分る。（証明終り）

<u>Lemma 7</u>　$(p,q)=1$，$q=4q''$のとき

$$m=(p+4q'')(p+2q'')，n=2(p+q'')(p+2q'')\Rightarrow K_{m,n}は P_3 因子分解$$

可能である。

<u>証明</u>　この場合，$x=p(p+2q'')$，$y=2q''(p+2q'')$，$t=(p+2q'')^2$，$r=(p+4q'')(p+q'')$である。$r_1=p+4q''$，$r_2=p+q''$，$m_0=m/r_1=p+2q''$，$n_0=n/r_2=2(p+2q'')$とおく。$K_{m,n}$の２組の点集合は，$V_1=\{1, 2, \cdots, (p+4q'')(p+2q'')\}$，$V_2=\{1, 2, \cdots, 2(p+q'')(p+2q'')\}$である。共に長さが$2(p+2q'')$の２つの数列$R, C$を考える。

$$R:\ 1, 1, 2, 2, \cdots, p+2q'', p+2q''$$

$$C:\ 1, 2, 3, 4, \cdots, 2(p+2q'')-1, 2(p+2q'')$$

数列Rのどの要素にも$(i-1)\times(p+2q'')$を加えてできる数列をR_i $(i=1, 2, \cdots, p)$とする。数列Cのどの要素にも$2(i-1)$を加え，それを$2(p+2q'')$で割った剰余（割り切れたときは，剰余は$2(p+2q'')$とする）に$(i-1)\times 2(p+2q'')$を加えてできる数列をC_i $(i=1, 2, \cdots, p)$とする。次に，共に長さが$4(p+2q'')$の２つの数列R', C'を考える。

$$R':\ 1, 2, 3, 4, \cdots, 4(p+2q'')-1, 4(p+2q'')$$

$$C':\ \overbrace{1, 3, 5, \cdots, 2(p+2q'')-1}^{p+2q''}, \overbrace{2, 4, 6, \cdots, 2(p+2q'')}^{p+2q''}, \overbrace{3, 5, 7, \cdots, 2(p+2q'')-1, 1}^{p+2q''}, \overbrace{4, 6, 8, \cdots, 2(p+2q''), 2}^{p+2q''}$$

数列R'のどの要素にも$(i-1)\times 4(p+2q'')+p(p+2q'')$を加えてできる数列を$R'_i$ $(i=1, 2, \cdots, q'')$とする。数列C'のどの要素にも$2p+4(i-1)$を加え，それを$2(p+2q'')$で割った剰余（割り切れたときは，剰余は$2(p+2q'')$とする）に$(i-1)\times 2(p+2q'')+2p(p+2q'')$を加えて

できる数列を C_i' $(i=1,2,\cdots,q'')$ とする。数列 $R_1,R_2,\cdots,R_p,R_1',R_2',\cdots,R_{q''}'$ を一列に並べてできる数列を I とする。数列 $C_1,C_2,\cdots,C_p,C_1',C_2',\cdots,C_{q''}'$ を一列に並べてできる数列を J とする。数列 I,J の長さは，共に $2(p+2q'')\times p+4(p+2q'')\times q''=2(p+2q'')^2=2t$ である。数列 I のどの要素にも $(i-1)m_0$ を加え，それを m で割った剰余（割り切れたときは，剰余は m とする）でできる数列を I_i $(i=1,2,\cdots,r_1)$ とする。数列 J のどの要素にも $(j-1)n_0$ を加え，それを n で割った剰余（割り切れたときは，剰余は n とする）でできる数列を J_j $(j=1,2,\cdots,r_2)$ とする。数列 I_i,J_j で作られた P_3 因子を F_{ij} とすれば，F_{ij} $(i=1,2,\cdots,r_1;j=1,2,\cdots,r_2)$ が $K_{m,n}$ の P_3 因子分解を与えていることが分る。（証明終り）

<u>Lemma 8</u>　$(p,q)=1$, $q=2q'$, q':奇数のとき

$m=2(p+2q')(p+q')$, $n=2(2p+q')(p+q')$ $\Longrightarrow$ $K_{m,n}$ は P_3 因子分解可能である。

<u>証明</u>　この場合，$x=2p(p+q')$，$y=2q'(p+q')$，$t=2(p+q')^2$，$r=(p+2q')(2p+q')$ である。$r_1=p+2q'$，$r_2=2p+q'$，$m_0=m/r_1=2(p+q')$，$n_0=n/r_2=2(p+q')$ とおく。$K_{m,n}$ の２組の点集合は，$V_1=\{1,2,\cdots,2(p+2q')(p+q')\}$，$V_2=\{1,2,\cdots,2(2p+q')(p+q')\}$ である。共に長さが $4(p+q')$ の２つの数列 R,C を考える。

R: $1,1,2,2,\cdots,2(p+q'),2(p+q')$

C: $1,2,3,4,\cdots,4(p+q')-1,4(p+q')$

数列Rのどの要素にも $(i-1)\times 2(p+q')$ を加えてできる数列を R_i $(i=1,2,\cdots,p)$ とする。数列Cのどの要素にも $2(i-1)$ を加え，それを $4(p+q')$ で割った剰余（割り切れたときは，剰余は $4(p+q')$ とする）に $(i-1)\times 4(p+q')$ を加えてできる数列を C_i $(i=1,2,\cdots,p)$ とする。次に，共に長さが $4(p+q')$ の2つの数列 R', C' を考える。

$$R' : 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, 4(p+q')-1, 4(p+q')$$

$$C' : \overbrace{1, 3, 5, \cdots, 2(p+q')-1}^{p+q'}, \overbrace{1, 3, 5, \cdots, 2(p+q')-1}^{p+q'}, \overbrace{2, 4, 6, \cdots, 2(p+q')}^{p+q'},$$
$$\overbrace{2, 4, 6, \cdots, 2(p+q')}^{p+q'}$$

数列 R' のどの要素にも $(i-1)\times 4(p+q') + 2p(p+q')$ を加えてできる数列を R'_i $(i=1,2,\cdots,q')$ とする。数列 C' のどの要素にも $2p+2(i-1)$ を加え，それを $2(p+q')$ で割った剰余（割り切れたときは，剰余は $2(p+q')$ とする）に $(i-1)\times 2(p+q') + 4p(p+q')$ を加えてできる数列を C'_i $(i=1,2,\cdots,q')$ とする。数列 $R_1, R_2, \cdots, R_p, R'_1, R'_2, \cdots, R'_{q'}$ を一列に並べてできる数列をIとする。数列 $C_1, C_2, \cdots, C_p, C'_1, C'_2, \cdots, C'_{q'}$ を一列に並べてできる数列をJとする。数列I, Jの長さは，共に $4(p+q')\times p + 4(p+q')\times q' = 4(p+q')^2 = 2t$ である。数列Iのどの要素にも $(i-1)m_0$ を加え，それを m で割った剰余（割り切れたときは，剰余は m とする）でできる数列を I_i $(i=1,2,\cdots,n)$ とする。数列Jのどの要素にも $(j-1)n_0$ を加え，それを n で割った剰余（割り切れたときは，剰余は n とする）でできる数列を J_j

($j=1,2,\cdots,r_2$) とする。数列I_i, J_jで作られたP_3因子をF_{ij}とすれば，F_{ij} ($i=1,2,\cdots,r_1; j=1,2,\cdots,r_2$) が$K_{m,n}$の$P_3$因子分解を与えていることが分る。（証明終り）

Lemma 6〜8 と定理3より，Lemma 5 で与えられたパラメータm,nに対して，$K_{m,n}$がP_3因子分解可能であることがいえる。従って，Lemma 1 と Lemma 2 を合わせ考慮すれば，$m+n\equiv 0 \pmod 3$，$m\leqq 2n$，$n\leqq 2m$，かつ，$\frac{3mn}{2(m+n)}$ は整数であるようなパラメータm,nに対して，$K_{m,n}$はP_3因子分解可能である。（定理2の証明終り）

4. おわりに

グラフが特別な因子をもつかどうかの研究は色々となされている。特に，1-因子（P_2因子）に関する研究は有名である。因子分解に関する研究はかなり困難で，あまりなされていない。グラフを完全グラフや完全多組グラフに限定すれば，組合せ数学の世界では，リゾルバブルデザインの名前で因子分解に相当する研究がなされている。

この論文をまとめるに当って，適切なコメントをいただいた梶岡肇君に謝辞を述べます。また，活発な議論をしていただいた関西グラフ理論セミナーの各位にも感謝いたします。