

VLSI設計におけるチャンネルグラフ分割問題について

PARTITION OF CHANNEL-GRAPH INTO FOREST IN VLSI DESIGN

広島大学 工学部 菊野 亨 (Tohru KIKUNO)
吉田 典可 (Noriyoshi YOSHIDA)
藤井 隆志 (Takashi FUJII)

1. まえがき

VLSIのパターン設計における2段階配線法⁽⁵⁾では、スイッチボックスルータの負担の軽減が重要な課題の1つである⁽⁶⁾。筆者らは、文献(7)で、全体の配線領域を木状領域 (rectilinear tree-shaped region) に分割し木状領域上で配線することでこの問題を解決する試みを行っている。

チップ全体の配線領域をチャンネルグラフと呼ばれる無向グラフ G によって表す。このとき配線の局所性を考慮した上述の木状領域への分割は、グラフ G に対する最小グラフ分割問題 MCPF として定式化される。既に、文献(2)において、 G を一般のグラフとした場合の NP 困難性が証明されている。本稿では、 G を最大次数4の平面グラフと制限した場合の分割問題 MCPF がやはり NP 困難となることを示す。

2. 準備

2.1 チャンネルグラフ

本稿で議論の対象とするチップ構造の例を図1(a)に示す。同図のB1~B4はブロックを表し、その境界線上には他のブロックと接続するための端子がある。端子の対をネットと呼び、ネットの集合 N (例えば $N = \{(a, a'), (b, b'), \dots\}$)を結線要求と呼ぶ。

チップ上でのブロックの相対位置、及び、各ネットに対する配線経路の割り当てが既に与えられていると仮定する。このとき、ブロックの相対位置からチップ全体の配線領域を表すチャンネルグラフ $G = (V, E)$ が構成される⁽⁴⁾。チャンネルグラフの各枝 $e \in E$ はチャンネルに、各節点 $v \in V$ はチャンネルの結合領域に、それぞれ対応する。図1(a)に示すチップに対応するチャンネルグラフを同図(b)に示す。

2.2 パス

各ネットの配線経路はチャンネルグラフ G 上の枝列として次の様に表される。今、ネット (t, t') の2つの端子 t, t' が面しているチャンネルに対応する G 上の枝を $e_t, e_{t'}$ とする。このとき枝列 $\rho = (e_{i_0} (= e_t), e_{i_1}, \dots, e_{i_k} (= e_{t'}))$ を t と t' を結ぶネットに対応するパス、あるいは、 e_t と $e_{t'}$ を結ぶパスと呼ぶ。但し、枝 e_{i_j} ($0 \leq j \leq k$)はネット (t, t') の配線経路に含まれる

チャンネルに対応しているとする。上述の ρ に対し、枝 e_{i_ℓ} と $e_{i_{\ell+1}}$ ($0 \leq \ell \leq k-1$) が節点 v_{m_ℓ} ($0 \leq \ell \leq k-1$) において隣接しているなら、 ρ は節点 v_{m_ℓ} を通過するという。通過する節点の個数をパス ρ の長さとして定義し、 $\|\rho\| (=k)$ で表す。パス ρ の通過する節点がすべて異なるとき、 ρ を単純パスと呼ぶ。

図1(b)において、ネット(a, a')に対応するパス ρ_1 は $\rho_1 = (e_0, e_1, e_2)$ として表される。パス ρ_1 は節点 v_1, v_2 を通過しており、その長さは $\|\rho_1\| = 2$ である。

上述の様に、ネットの配線経路が与えられるとパスが1つ定義できる。逆に、 e_t と $e_{t'}$ を結ぶ1つのパス ρ が与えられると、それは一般に e_t と $e_{t'}$ に対応するチャンネルに面した端子間を結線する複数のネットに対応する。こうしたネットの数を ρ の重み $w(\rho)$ と定める。

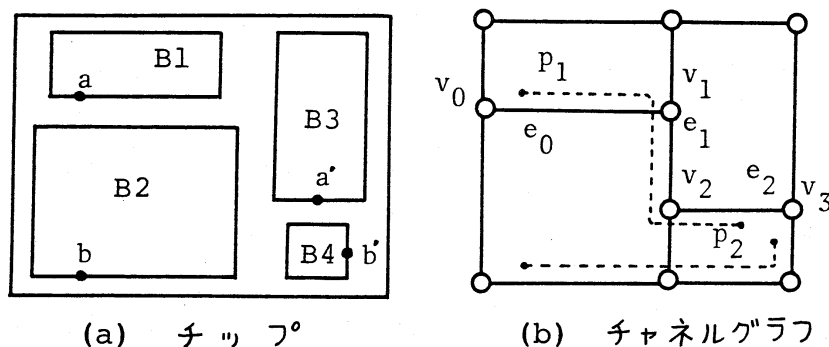


図1 チャンネルグラフ

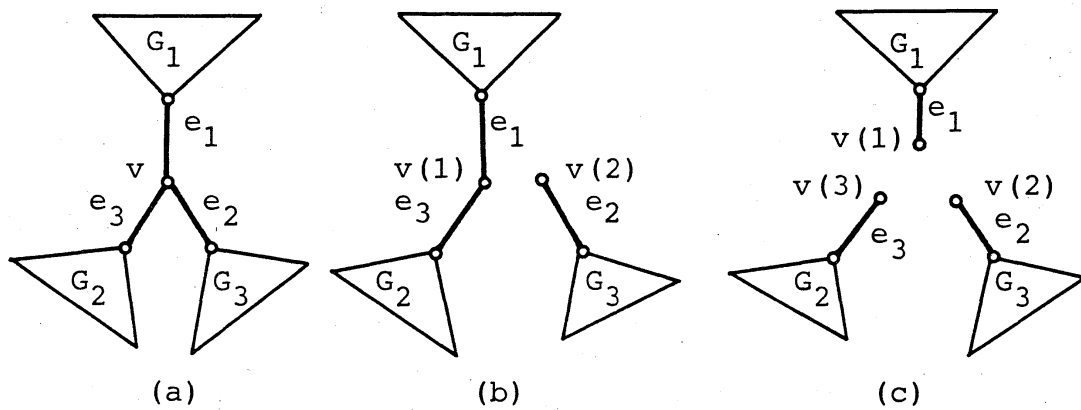
2.3 節点での切断

チャンネルグラフを無向グラフ $G=(V, E)$ で表す。グラフ G

上で節点 v に接続している枝の集合を $I_G(v) (\subseteq E)$ で表す。次の (1)-(3) を満たすグラフ $G'=(V', E')$ をグラフ G の節点 v での切断と定める。

- (1) n を $2 \leq n \leq |I_G(v)| - 1$ なる正整数とする。
- (2) $V' = \{v(i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup (V - \{v\})$
- (3) E_1, E_2, \dots, E_n (各 $E_i \subseteq E$) を集合 $I_G(v)$ の任意の分割とする。このとき $E' = \{(v(i), w) \mid (v, w) \in E_i, 1 \leq i \leq n\} \cup (E - I_G(v))$ とする。

節点 v の次数が 3 以上の場合, 上述の構成法の内で (1), (3) は一意に定まらない。そこで (3) における分割を $\mathcal{E}(v) = \{E_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ で表す。図 2 (a) に示すグラフ G , $I_G(v)$ に対する節点 v での分割の例を同図 (b), (c) に示す。



$$I_G(v) = \{e_1, e_2, e_3\} \quad \mathcal{E}(v) = \{\{e_1, e_3\}, \{e_2\}\} \quad \mathcal{E}(v) = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}\}$$

図 2 節点 v での切断

3. チャネルグラフの分割

3.1 最小グラフ分割問題, 判定問題

チップ全体の配線領域を木状領域に分割することは, チャネルグラフ G に対する最小グラフ分割問題として次の様に定式化される⁽²⁾.

<最小グラフ分割問題MCPF> グラフ $G=(V, E)$, G 上の単純パスの集合 $P=\{p_i \mid \|p_i\| \geq 1\}$ と重み $w(p_i)$ が入力として与えられる. このとき, 次の条件(i)~(iii)を満足する G の部分グラフの集合 $T=\{T_i=(V_i, E_i) \mid V_i \subseteq V, |V_i| \geq 2, E_i \subseteq E\}$ を求めよ.

(i) 各 T_i は木である.

(ii) $E_1, E_2, \dots, E_{|T|}$ は E の分割である.

(iii) P に基づいて集合 $P'=\{p=(e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_{\|p\|}}) \in P \mid \exists T_i, T_j (i \neq j) [e_{\alpha_\ell} \in E_i \wedge e_{\alpha_m} \in E_j (0 \leq \ell < m \leq \|p\|)]\}$ とする. このとき評価関数 $z = \sum_{p \in P'} w(p)$ の値が最小となる. \square

問題MCPFの条件を満たす G と T に対し, 切断を行った節点の集合を $V^C (\subseteq V)$ とする. このとき G 上の $v \in V^C$ を通過するパス $p=(e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_j}=(u, v), e_{i_{j+1}}=(v, w), \dots, e_{i_{\|p\|}})$ に対して, $(u, v) \in E_i$, 且つ, $(v, w) \in E_j (i \neq j)$ のとき, p は v で切断されるという.

分割問題MCPFの部分問題を2つ導入する.

<最小グラフ分割問題MCPF-3, MCPF-4P> グラフ G が最

大次数3のグラフの場合の分割問題MCPFを特に分割問題MCPF-3と呼ぶ。更に、グラフ G を最大次数4の平面グラフと制限した場合の問題MCPFを分割問題MCPF-4Pと呼ぶ。□

上述の分割問題に対応する判定問題を次の様に定義する。

〈判定問題DMCPF-3, DMCPF-4P〉 分割問題MCPF-3の入力として正整数 K が更に与えられて、評価関数 $\sum \leq K$ なる T が存在するか否かを判定する問題を判定問題DMCPF-3と呼ぶ。同様に、分割問題MCPF-4Pに対応して判定問題DMCPF-4Pを定義するものとする。□

3.2 判定問題DMCPF-3のNP完全性

準備として、既にNP完全性が知られている次のグラフ分割問題PFについて説明する。

〈判定問題PF〉⁽³⁾ グラフ $G=(V, E)$, 正整数 $K (\leq |V|)$ が入力として与えられる。このとき、 G の節点の集合を $k (\leq K)$ 個の互いに素な部分集合 $V_1, V_2, \dots, V_k (V_i \subseteq V)$ に分割できるか否かを判定せよ。但し、 G 上で各 $V_i (1 \leq i \leq k)$ によって誘導される部分グラフ $G_i=(V_i, E_i)$ はサイクルを持たない。□

判定問題PFの条件を満たす $G=(V, E)$ と $G_i=(V_i, E_i) (1 \leq i \leq k)$ に対し、枝の集合を $E^C = E - \bigcup_{i=1}^k E_i$ とするとき、各枝 $e \in E^C$ を G から除去された枝と呼ぶ。

〔補題1〕⁽²⁾ 判定問題PFの条件を満たす $G=(V, E)$ と $G_i=$

(V_i, E_i) ($1 \leq i \leq k$) に対し, 除去された枝の集合を E^c とすれば, $|E^c| = |E| - |V| + k$ が成立する. □

[補題 2] ⁽¹⁾ 判定問題 DMCPF-3 は NP 完全である.

(証明方針) 判定問題 DMCPF-3 がクラス NP に属するのは明らかである. 以降では, 問題 PF の任意の問題例 $G = (V, E)$, $V = \{v_i\}$, $E = \{e_i\}$ と K から問題 DMCPF-3 の問題例 G_P, P, w, K_P の多項式時間変換についてのみ説明する.

(1) $G_P = (V_P, E_P)$: $V_P = V^* \cup \tilde{V}$, $E_P = E^* \cup \tilde{E}$ とする. ここで, $V^* = \{v_i^* \mid e_i \in E\}$, $\tilde{V} = \{\tilde{v}_i(\ell) \mid v_i \in V, e_\ell \in I_G(v_i)\}$, $E^* = \{(\tilde{v}_i(\ell), v_i^*), (v_i^*, \tilde{v}_i(\ell)) \mid e_i = (v_i, v_j) \in E\}$, $\tilde{E} = \{(\tilde{v}_i(i_j), \tilde{v}_i(i_{j+1})), 1 \leq j \leq m-1 \mid v_i \in V, I_G(v_i) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}\}\}$ とする. 図 3 に変換例を示す. 同図 (b) の実線, 破線はそれぞれ E^* , \tilde{E} に属する枝を表す.

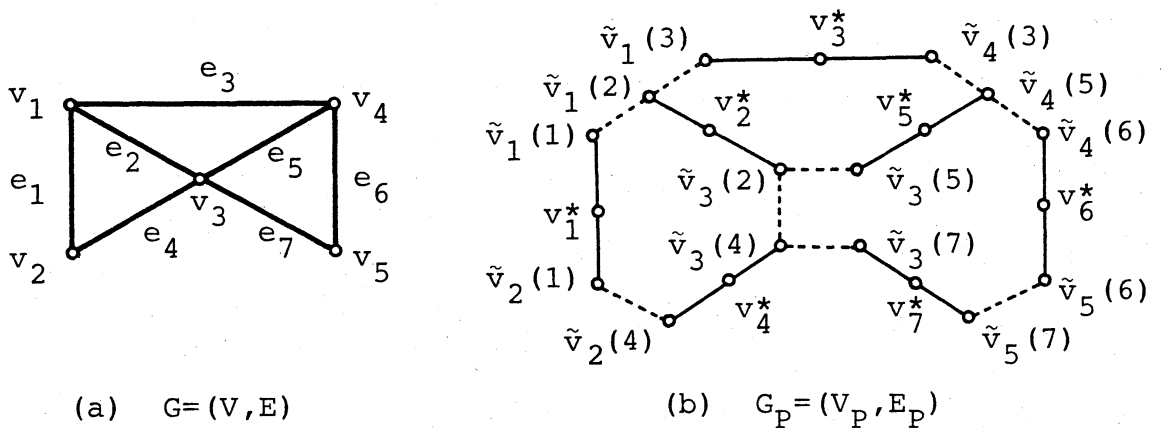


図 3 変換例 (補題 2)

(2) P : $P = \{(e_i, e_j) \mid e_i = (s, t), e_j = (t, u), t \neq u, e_i, e_j \in E_P\}$.

(3) w : パス $p = (e_i, e_j) \in P$ (但し, $e_i = (s, t)$, $e_j = (t, u)$ とする) の重み $w(p)$ は, $t \in V^*$ ならば $w(p) = 1$, $t \in \tilde{V}$ ならば $w(p) = |E_p|$ とする.

(4) K_p : $K_p = |E| - |V| + K$. □

3.3 問題MCPF-4PのNP困難性

グラフ G 上で定義される単純パス $p = (e_0, e_1, \dots, e_{\|p\|})$ の連続した部分系列 $p' = (e_i, e_{i+1}, \dots, e_{i+j})$ ($j \geq 0$) に対し, $p = (e_0, e_1, \dots, e_{i-1}, p', e_{i+j+1}, \dots, e_{\|p\|})$ と表記する.

[補題3] 判定問題DMCPF-4PはNP完全である.

(証明方針) 判定問題DMCPF-4PがクラスNPに属するのは明らかである. 以降では, 判定問題DMCPF-3の問題例 G, P, w, K から判定問題DMCPF-4Pの問題例 G_p, P_p, w_p, K_p の多項式時間変換についてのみ説明する.

(1) $G_p = (V_p, E_p)$: 次のステップ1 ~ ステップ3に従って構成する.

ステップ1: 次の① ~ ④を満たす様に $G = (V, E)$ を平面に埋め込む. 埋め込まれた節点 $v \in V$, 枝 $(u, v) \in E$ をそれぞれ点節点 $d(v)$, 線枝 $(d(u), d(v))$ と呼ぶ.

① 同じ枝に対応する線枝同士は交差しない.

② $d(v)$ 上を枝 $e \in I_G(v)$ に対応する線枝が通過しない.

③ 3本以上の線枝が点節点以外の点で交差しない。

④ $u \neq v (u, v \in V)$ ならば $d(u) \neq d(v)$ である。

ステップ2: 以下の操作を点節点以外の平面上の交点に適用し, 得られる線枝の集合を L , 新たに設けた点節点の集合を U とする. 点節点以外の交点で線枝 $(d(a), d(b)), (d(c), d(d))$ が交差しているとする. このとき, 新たに点節点 u を設け, 線枝を4本の線枝 $(d(a), u), (u, d(b)), (d(c), u), (u, d(d))$ に分解する.

ステップ3: 以上の計算に基づき, $V_p = V \cup U$, $E_p = L$ と定める.

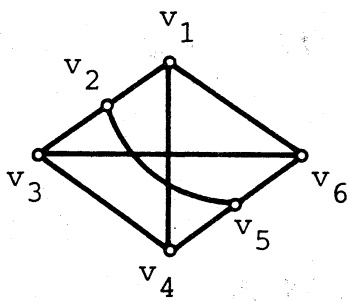
図4(a)に示す G に対する平面への埋め込み(ステップ1)の例を同図(b)に, G から変換した G_p (ステップ2, 3)を同図(c)に示す. 図中の "●" は U に属する節点を表す.

一般に, ステップ2において線枝 $(d(a), d(b))$ が線枝の系列 $(d(a) (=x_0), x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, d(b) (=x_n))$ ($x_i \in U$, $1 \leq i \leq n-1$) に分解される場合, この系列を $S(a, b)$ で表す.

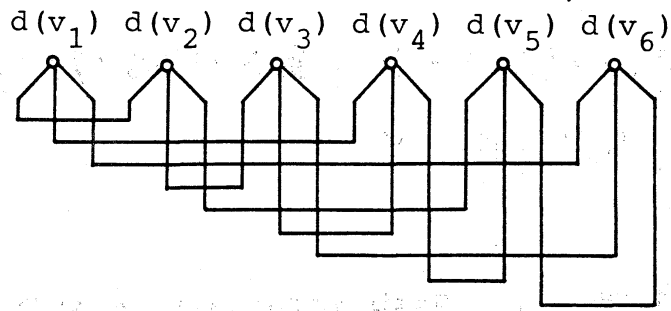
更に, $S(a, b)$ 上の連続した枝の部分系列 $((x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_{i+2}), \dots, (x_{i+j-1}, x_{i+j})) = \alpha$ に対し, α は $S(a, b)$ の部分枝であるといい, $\alpha \triangleleft S(a, b)$ で表す.

(2) P_p : $P_p = \tilde{P} \cup P_0$ とする.

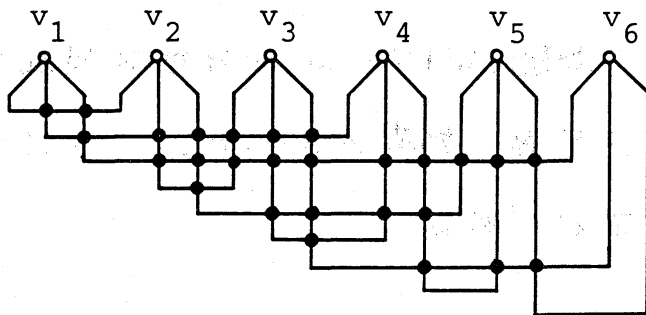
\tilde{P} の構成: $p = (e_0, e_1, \dots, e_{\|p\|}) \in P$ ($e_i = (v_i, v_{i+1})$ とする) に



(a) $G=(V, E)$



(b) G の平面への埋め込み



(c) $G_P=(V_P, E_P)$

図4 G_P の構成例(補題3)

対し $\tilde{p} = ((u, v_1), S(v_1, v_2), \dots, S(v_{\|p\| - 1}, v_{\|p\|}), (v_{\|p\|}, u'))$ とする。ここで, $(u, v_1) \triangleleft S(v_0, v_1)$, $(v_{\|p\|}, u') \triangleleft S(v_{\|p\|}, v_{\|p\|+1})$ が成立するものとする。各パス $p \in P$ に対して, 上述の変換を行って得られるパス \tilde{p} の集合を \tilde{P} と定める。以降では, $\tilde{p} \in \tilde{P}$ が $p \in P$ に変換を行って得られるならば, $\tilde{p} \leftarrow p$ と表す。

P_U の構成: $P_U = \{(e_i, e_j) \mid e_i = (a, t) \in E_P, e_j = (t, u) \in E_P, a \neq u, t \in U, \exists (a, b) \in E [(e_i, e_j) \triangleleft S(a, b)]\}$ とする。

(3) w_p : パス $\tilde{p} \in \tilde{P}$ の重みは $\tilde{p} \leftarrow p$ ならば $w_p(\tilde{p}) = w(p)$ と

する。パス $p \in P_U$ の重みは $w_p(p) = \sum_{f \in p} w(f)$ とする。

(4) K_p : $K_p = K$. □

[定理 1] 問題 MCPF-4P は NP 困難である。 □

今後の課題としては，問題 MCPF-4P が多項式時間で解けるグラフの形状に関する考察，効率のよいヒューリスティックアルゴリズムの開発などがある。

文 献

- (1) 藤井: "最大次数4の平面グラフに対する最小グラフ分割について," ECS Tech. Rep. No.84-06, Hiroshima Univ. (1984).
- (2) 藤井, 若林, 菊野: "LSI設計の配線におけるグラフの分割," 京都大学数理解析研究所講究録(掲載予定).
- (3) Garey, M.R. and Johnson, D.S.: "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness," W.H. Freeman and Company, San Francisco (1979).
- (4) 井上, 井戸, 小山, 三木, 石井: "LSIレイアウト設計に於ける配線チャンネル構成の一手法," 信学技報, CAS80-107, pp.25-32 (1980).
- (5) Kani, K., Kawanishi, H. and Kishimoto, A.: "ROBIN; a building

block LSI routing program," Proc. ISCAS, pp.1-4 (1976).

(6) Soukup, J.: "Circuit layout," Proc. IEEE, 69, 10, pp.1281-1304 (1981).

(7) 若林, 菊野, 吉田, 藤井: "最小の垂直トラックを用いたチャンネルの配線問題," 信学技報, CAS83-73, pp.13-18 (1983).