数理解析研究所講究録
第534巻 1984年 52-66

指令フロー数の応用について(I)

東海大 情報数理　成島 弘
土屋守正
峯崎俊哉

序　指令フロー数とは、より数学的用語を用いて述べるならば、acyclic digraph の道(path)の個数、特に、順序集合の鎖(chain)の個数の総称として定めたものであり、上下関係のある組織の指令(command)の流れ方の数というイメージで名付けたものである[12, 13]。著者らのここ数年にわたる一連の研究[6, 10〜14, 19〜21, 24]の目的は、指令フロー数そのものの性質を調べるとともに、このような素朴でシンプルな量が、純粋、応用を問わず、各分野の組合せ論的量とどのように関連しているかを把握し、一つの統一的視点を与えることにある。

§1. 一般的結果　ここに述べる結果は成島[12, 13]にもとづくものである。$D = (V(D), A(D))$ を acyclic digraph とする。D の弧(arc) $(s, t) \in A(D)$ を $s \to t$ とかき、長さ1の道(path)である。また、$V(D)$ の要素(頂点)を長さ0の道とみなす。$\mathbb{R}$ を実数の集合とし、$\mathbb{R}[x]$ を $\mathbb{R}$ 上の1変数 x の多項式環とする。このとき、$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、D 上の多項

式を値としてもつ関数 $f^{(a,b)} : V(D) \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ を

$$f^{(a,b)}(s) = \begin{cases} a & s \text{ が sink のとき、} \\ \left(\sum_{s \to t} f^{(a,b)}(t)\right)x + b & \text{その他、} \end{cases}$$

のように帰納的に定める。ここで、$\{ f^{(a,b)} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ を $\mathcal{L}(D)$ で表し、D 上の（道に関する）初等組合せ論的関数空間とよび、D を $\mathcal{L}(D)$ の underlying digraph という。

定理 1　通常の和とスカラー倍のもとで、$\mathcal{L}(D)$ は 2 次元線形空間 $\mathbb{R}^2$ に同型な $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる。すなわち、$\{ f^{(1,0)}, f^{(0,1)} \}$ が線形空間 $\mathcal{L}(D)$ の base であり、

$$f^{(a,b)} = a f^{(1,0)} + b f^{(0,1)}$$

と一意に表現できる。

Remark 1　$f^{(1,0)}, f^{(0,1)}, f^{(1,1)} \in \mathcal{L}(D)$, $s \in V(D)$ に対して、

(1)　$f^{(1,0)}(s)$　($f^{(0,1)}(s)$) の x^i の係数は s から sinks (sinks 以外) への長さ i の道の数である。

(2)　$f^{(1,1)}(s)$ の x^i の係数は s から D のすべての頂点への長さ i の道の数である。

$f^{(a,b)} \in \mathcal{L}(D)$ に対して、$\tilde{f}^{(a,b)} = \sum_{s \in V(D)} f^{(a,b)}(s)$ を定め、$\{ \tilde{f}^{(a,b)} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ を $\tilde{\mathcal{L}}(D)$ で表す。

定理 2　$\tilde{\mathcal{L}}(D)$ は線形空間 $\mathbb{R}[x]$ の部分空間 $\langle \tilde{f}^{(1,0)}, \tilde{f}^{(0,1)} \rangle$ であり、

$$\tilde{f}^{(a,b)} = a\tilde{f}^{(1,0)} + b\tilde{f}^{(0,1)}$$

と一意に表現できる。

Remark 2　$\tilde{f}^{(1,0)}$、$\tilde{f}^{(0,1)}$、$\tilde{f}^{(1,1)} \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ に対して、

(1)　$\tilde{f}^{(1,0)}$ ($\tilde{f}^{(0,1)}$) の x^i の係数は sinks (sinks 以外の頂点) への長さ i の道の数である。

(2)　$\tilde{f}^{(1,1)}$ の x^i の係数は ($\mathcal{A}$ の) 長さ i のすべての道の数である。

以下 $\mathcal{A}$ として、順序集合 P を考える。正確には、$\mathcal{A}$ が順序集合 P の順序関係を表現するグラフ (P と同一視する) 及び P の被覆関係 (covering relation) を表すグラフ (ハッセ図 H(P) と同一視する) である場合を考える。特に、$\mathcal{L}(P)$ ($\mathcal{L}(H(P))$) を P 上の鎖 (被覆鎖) に関する初等組合せ論的関数空間とよび、P (H(P)) を $\mathcal{L}(P)$ ($\mathcal{L}(H(P))$) の underlying poset (Hasse diagram) という。$f \in \mathcal{L}(P)$ を順序関係を用いて、$f \in \mathcal{L}(H(P))$ を被覆関係を用いて書き換えると、次のようになる。

$f^{(a,b)} \in \mathcal{L}(P)$ に対して、

$$f^{(a,b)}(s) = \begin{cases} a & s \text{ が極小元のとき、} \\ \left(\sum_{s>t} f^{(a,b)}(t)\right)x + b & \text{その他、} \end{cases}$$

$f^{(a,b)} \in \mathcal{L}(H(P))$ に対しては、上式の $\sum_{s>t}$ を $\sum_{s \downarrow t}$ とすれば

よい。ただし、"$s \downarrow t$" は "t が s の直下の要素（s は t を被覆している）" を表す。

<u>Remark</u> 3

(1)　$f \in \mathcal{L}(P)$　($f \in \mathcal{L}(H(P))$)に対して、Remark 1 の D、sinks、道をそれぞれ P、極小元、鎖（被覆鎖）に書き換えたことが成り立つ。

(2)　$\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{L}}(P)$　($\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{L}}(H(P))$)　に対して、Remark 2 の D、sinks、道をそれぞれ P、極小元、鎖（被覆鎖）に書き換えたことが成り立つ。

順序集合 P の表現グラフが連結であるとき、P は<u>連結</u>であるという。以下の定理3〜5は、acyclic digraph D が順序集合 P であるとき特有の性質である。

<u>定理</u>3　P を連結な順序集合とする。$f^{(1,0)}$、$f^{(0,1)} \in \mathcal{L}(P)$に対し、$P$ の極小元以外のすべての要素 s に対して、

$$f^{(1,0)}(s) = (f^{(0,1)}(s))x \iff P \text{ が最小元をもつ。}$$

<u>定理</u>4　P（$|P| \geqq 2$）は最大元 $\mathbb{1}$ をもつ順序集合とする。このとき、$\tilde{f}^{(a,b)} \in \tilde{\mathcal{L}}(P)$、$f^{(a,b)} \in \mathcal{L}(P)$ に対して、

$$\tilde{f}^{(a,b)} = ((x+1)f^{(a,b)}(\mathbb{1}) - b)/x$$

が成立する。

<u>系</u>（[12] の Prop. 8）

(1)　$\tilde{f}^{(1,1)} = ((x+1)f^{(1,1)}(\mathbb{1}) - 1)/x$、

(2) $\hat{f}^{(1,1)}\big|_{x=1} = 2f^{(1,1)}(\mathbb{1}) - 1$。

定理5　μを順序集合PのMöbius関数とし、$[t,s]$をPの区間とするとき、$f^{(1,0)} \in \mathcal{L}([t,s])$に対して、

$$f^{(1,0)}(s)\big|_{x=-1} = \mu(t,s)$$

となる。

§2. 具体例　acyclic digraph Hまたは順序集合Pがより具体的な構造をもっているとき、多項式$f^{(1,0)}$、$f^{(0,1)} \in \mathcal{L}(H)$（$\mathcal{L}(P)$、$\mathcal{L}(H(P))$）がより具体的な漸化式として与えられる。母関数等の手法により、各多項式の係数式が決まったり、係数の漸近的性質、極限等の性質も明らかになる。また、その係数が各分野の組合せ論的量とどのようにかかわっているかの例を示す。

(I)　P＝格子束（正確には、格子束の被覆関係を表す有向グラフ）のとき、多項式$f^{(1,0)} \in \mathcal{L}(P)$の係数は2項係数、一般に、多項係数となり、Pとして$y=x$より下の部分を考えれば、カタラン数となる。

(II)　P＝T_{n+1}（高さ$n+1$のたすき順序集合）のとき、$f^{(1,0)}(\mathbb{1})(\in \mathcal{L}(T_{n+1}))$を$C_T^*(n;x)$で表すと、次のような漸化式、母関数及び多項式が得られる。

(1)　$$C_T^*(n;x) = \begin{cases} x & (n=0) \\ \left\{2\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_T^*(k;x)\right)+1\right\}x & (n \geq 1). \end{cases}$$

(2) $G(C_T^*(n;x);z)=\dfrac{x}{1-(1+2x)z}$.

(3) $C_T^*(n;x)=x(1+2x)^n=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}2^{k-1}x^k$.

定理6（峯崎、成島）　$C_T^*(n;x)$ の x^kの係数、すなわち、T_{n+1} の 1 と 0 の間を張る長さ k の鎖の数は n-cube の$(n+1)-k$ 次元面数に等しい。

(Ⅲ)　$P=n$ 次元ブール束 B_n のとき、$\mathcal{L}(B_n)$ 及び $\mathcal{L}(H(B_n))$ の base 多項式 $f^{(1,0)}$、$f^{(0,1)}$ 等の性質は詳しく調べられており〔4、6、10～14、20、21〕、すれちがい順列、onto maps の数、第2種のスターリング数、n－順列凸体の面数、全前順序（total preorder）数〔1〕、Lovász の map 数〔7〕、非負整数上幾何分布の n 次の積率等との関連も明らかになっている。$f^{(1,0)}(1)(\in\mathcal{L}(B_n))$ を $C_B^*(n;x)$ で表し、漸化式、母関数、多項式及び $C_B^*(n;1)$の漸近的性質を再録すれば、次のようなものである。詳しくは、成島〔13〕を参照されたい。

(1) $$C_B^*(n;x)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}C_B^*(k;x)\right\}x & (n\geq 1)\end{cases}.$$

(2) 指数型母関数 $G(C_B^*(n;x);z)=\dfrac{1}{(1+x)-xe^z}$.

(3) $C_B^*(n;x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(x+1)^{j+1}} j^n = \sum_{k=0}^{n} M(n,k)x^k$.

$M(n,k) = \sum_{i+j=k} (-1)^i \binom{k}{i} j^n = k!\,S(n,k)$、

$M(n,k)$ は A $(|A|=n)$ から B $(|B|=k)$ への onto maps 全体の数、$S(n,k)$ は第2種のスターリング数である。

(4) $C_B^*(n;x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{2^{j+1}} = \sum_{k=0}^{n} M(n,k)$.

$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{2^{j+1}}$ は幾何分布 $p_j = 2^{-(j+1)}$ の n 次積率であることに注意.

(5) $C_B^*(n;-1) = \mu(0,1) = (-1)^n$.

μ はブール束 B_n 上の Möbius 関数である。

(6) $\lim_{n\to\infty} \left(C_B^*(n;1) \Big/ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log 2}\right)^{n+1} \cdot n! \right) = 1$、

(成島、大矢)

(7) $\limsup_{n\to\infty} \left(C_B^*(n;1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log 2}\right)^{n+1} \cdot n! \right) = \infty$.

$\liminf_{n\to\infty} (\qquad \text{〃} \qquad) = -\infty$.

(成島、平野)

<u>Open Problem</u> $n \geqq 17$ の integer n が存在して、

$$\left| C_B^*(n;1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log 2}\right)^{n+1} \cdot n! \right| < \frac{1}{2}$$

となるかどうかを決定せよ。

n個の文字からなる各順列を座標としてもつ点によってできるconvex hull をn-順列多面体($n-1$次元順列多面体)といい、$\mathbb{P}_n$で表す。

定理7(Gross、成島、宮本) $C^*_B(n;x)$ のx^kの係数、すなわち、B_n の最大元と最小元の間を張る長さkの鎖の数は$\mathbb{P}_n$の$(n-k)$次元面の数に等しい。

§3. 単体的複体のオイラー標数 ここでは、オイラー標数が順序集合の鎖数とどのように関連しているかを示す。Vを空でない集合とし、ΣをVの有限個の部分集合からなるクラスとする。次の条件(i)〜(iii)をみたすとき、$\Delta=(V,\Sigma)$を抽象単体的複体(または単に、抽象複体)という。

(i) $\sigma\in\Sigma$、$\tau\subset\sigma$、$\tau\neq\phi \Rightarrow \tau\in\Sigma$、

(ii) $^\forall v\in V$、$\{v\}\in\Sigma$、

(iii) $\phi\notin\Sigma$、

$v\,(\in V)$を頂点、$\sigma=\{v_0,v_1,\cdots,v_n\}\,(\in\Sigma)$を$n$-単体という。$\sigma$、$\tau\in\Sigma$に対して、$\tau\subset\sigma$であるとき、$\tau$が$\sigma$の面(face)であるといい、$\tau<\sigma$とかく。順序集合$P$に対して、$V(P)=P$の頂点の集合、$\Sigma(P)=P$の鎖全体とする。このとき、$\Delta(P)=(V(P),\Sigma(P))$は抽象単体的複体となり、これを順序複体(order complex)とよび、Pを$\Delta(P)$の underlying poset とよぶ。抽象複体 $\Delta_1=(V_1,\Sigma_1)$、$\Delta_2=(V_2,\Sigma_2)$ に対

して、全単射 $f : V_1 \longrightarrow V_2$ が存在し、

(i) $\sigma, \tau \in \Sigma_1$, $\tau < \sigma \Longleftrightarrow f(\sigma), f(\tau) \in \Sigma_2$, $f(\tau) < f(\sigma)$,

をみたすとき、Δ_1 と Δ_2 は<u>同型</u>であるといい、$\Delta_1 \cong \Delta_2$ とかく。Euclid 複体 $\bar{K}$ に対して、$V(\bar{K}) = \bar{K}$ の頂点（0-単体）全体、$\Sigma(\bar{K}) = \{\{a_0, a_1, \cdots, a_n\} \mid \langle a_0, a_1, \cdots, a_n \rangle \in \bar{K},\ n \geq 0\}$ とすると、$\Delta(\bar{K}) = (V(\bar{K}), \Sigma(\bar{K}))$ は抽象複体となる。Euclid 複体 $\bar{K}$ が抽象複体 Δ の<u>幾何学的実現</u>であるとは、$\Delta(\bar{K}) \cong \Delta$ のときをいう。

<u>定理8</u>　任意の抽象複体 Δ は適当な次元の Euclid 空間内に幾何学的実現をもつ。また、その実現は同型を除いて一意である。（より詳しくは、郡山(19)を参照）

次に、順序複体 $\Delta(P)$ の<u>オイラー標数</u> $\chi(\Delta(P))$ を

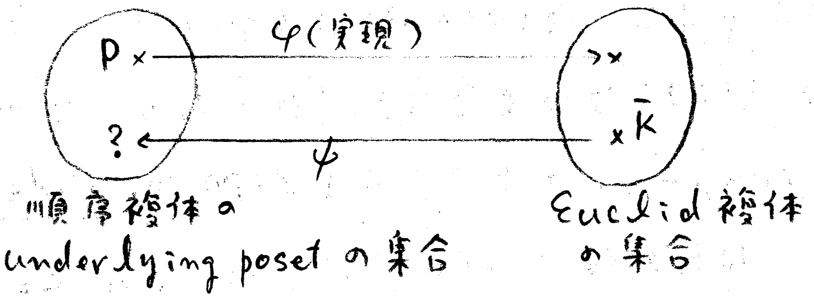
$$\chi(\Delta(P)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda_k, \quad \lambda_k \text{ は } k\text{-単体の個数},$$

によって定めることができる。

<u>定理9</u>　$\tilde{f}^{(1,1)} \in \mathcal{L}(P)$ とするとき、

$$\chi(\Delta(P)) = \tilde{f}^{(1,1)}\Big|_{x=-1} \qquad \text{（成島）}$$

となる。



§4. 順序集合上のInclusion-Exclusionの計算量

Ωを集合とし、Pを最大元をもつ有限順序集合とする。写像$f: P \longrightarrow \wp(\Omega)$が、weak morphismであるとは次の条件をみたすときである：

(i) $\forall x, y \in P$, $\exists z$（$\{x, y\}$の極小上界）$\in P$,
　　（$f(z) \supseteq f(x) \cap f(y)$）。

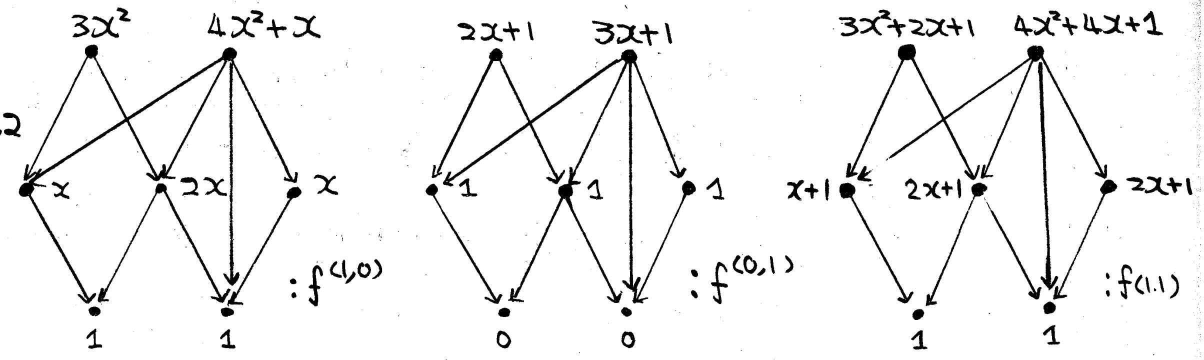
定理10（成島[14]）　写像$f: P \longrightarrow \wp(\Omega)$がweak morphismであるとき、$\wp(\Omega)$上の任意の測度mに対して、

$$m\Big(\bigcup_{x \in P} f(x)\Big) = \sum_{c \in C} (-1)^{l(c)} m\Big(\bigcap_{x \in c} f(x)\Big).$$

ただし、CはPの鎖全体の集合であり、$l(c)$は鎖cの長さを表す。

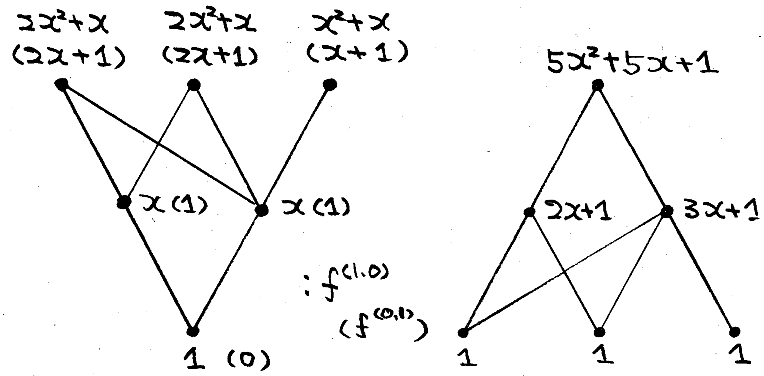
この定理は、写像$f: P \longrightarrow \wp(\Omega)$がweak morphismであるとき、$X \in \wp(P)$にわたる和でなく、Xが鎖であるときのみの和でよいことを示している。いわば、順序集合Pの鎖の個数$\hat{f}^{(1,1)}\big|_{x=1}$（$\hat{f}^{(1,1)} \in \hat{\mathcal{L}}(P)$）が、この定理が適用できる問題の加法的計算量となっていることがわかる。写像fがweak morphismとなる応用上重要なものとして、分割対、substitution propertyをもつ分割等によって誘導される（分割束上の）写像がある。この写像を通して、同型でない既約有限オートマトンの数が計算された[14]。

例1
Th. 1, 2
Remark 1, 2



$\tilde{f}^{(1,0)} = 7x^2+5x+2$. $\tilde{f}^{(0,1)} = 5x+5$ $\tilde{f}^{(1,1)} = 7x^2+10x+7$.

例2
Th. 3, 4
Cor
Remark 3.



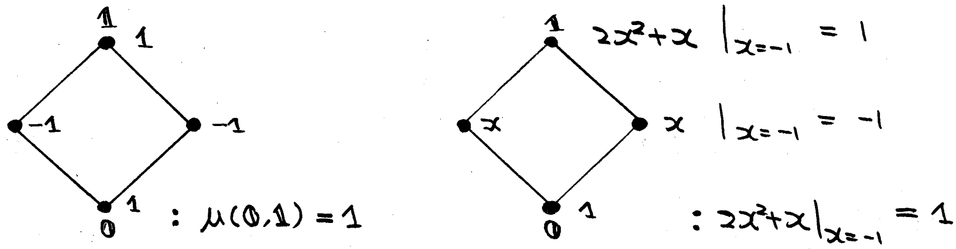
$\cdot\ f^{(1,1)}_{(1)} = 5x^2+5x+1\big|_{x=1} = 11$

$\cdot\ \tilde{f}^{(1,1)} = \{(x+1)(5x^2+5x+1)-1\}/x$

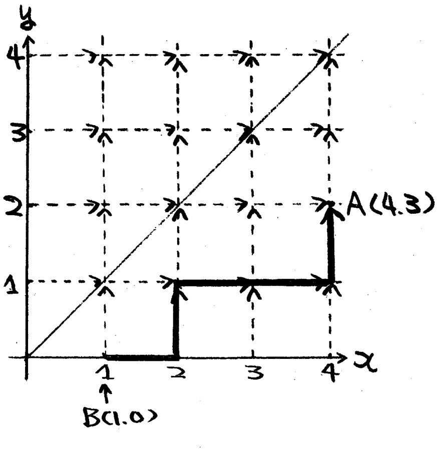
$= (5x^3+10x^2+6x)/x$

$= 5x^2+10x+6\big|_{x=1} = 21$

例3
Th. 5



例4 (I) P = 格子束



• 原点から A(k.l) への道数 $= \dfrac{(k+l)!}{k!\,l!}$

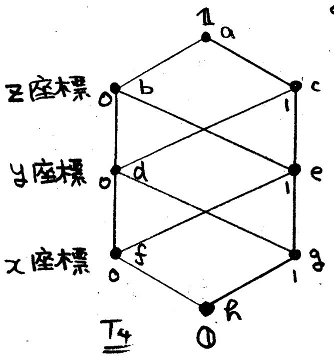
(2項係数)

• B(1,0) から A(n+1, n) への

$y=x$ と交わらない道数 $= \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

(カタラン数)

例5 (II) $P = T_{n+1}$



$8x^4+12x^3+6x^2+x \ (= f^{(1,0)}(1) = C^*_T(3, x))$

$4x^3+4x^2+x$

$2x^2+x$

x

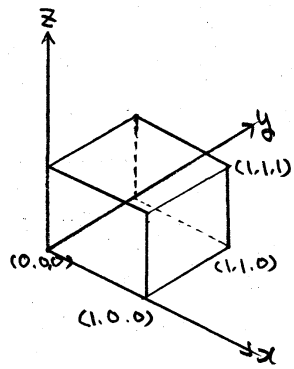
0

$\begin{cases} a-b-d-f-h \leftrightarrow (0,0,0) \\ a-b-e-g-h \leftrightarrow (1,1,0) \\ \vdots \end{cases}$ 点

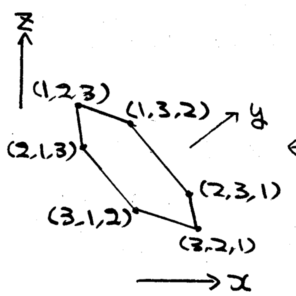
$\begin{cases} a-c-f-h \leftrightarrow (0,*,1) \\ \vdots \end{cases}$ 辺

$\vdots$

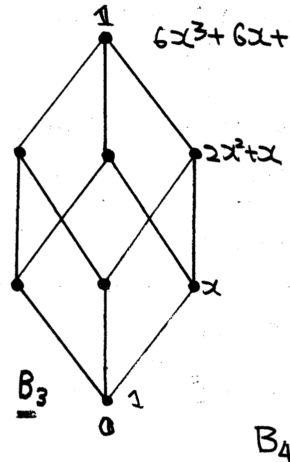
$a-h \leftrightarrow (*,*,*)$ 体



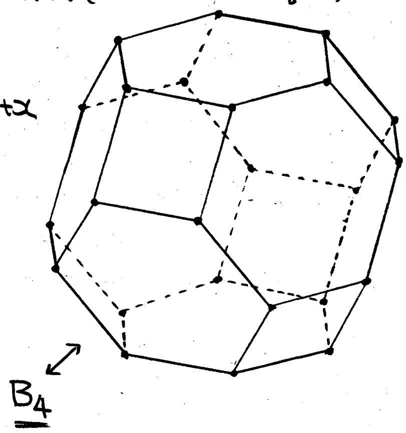
例6 (III) $P = B_n$



$\longleftrightarrow$



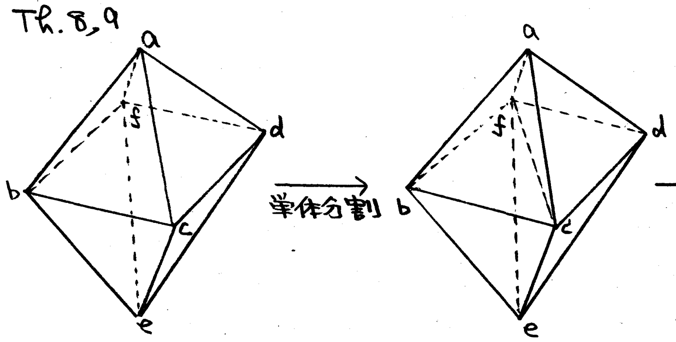
$6x^3+6x+x \ (= f^{(1,0)}(1) = C^*_B(3, x))$



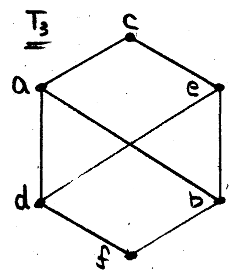
・4-順列多面体[2
・Kelvin 14面体 (冨澤[22,23])
・[4.6.6]型 アルキメデス準多面体 (一松[25])

例7

Th.8,9



$\longrightarrow$



$4x^3+8x^2+5x+1$

$2x^2+3x+1$

$x+1$

$1 \ : f^{(1,1)}$

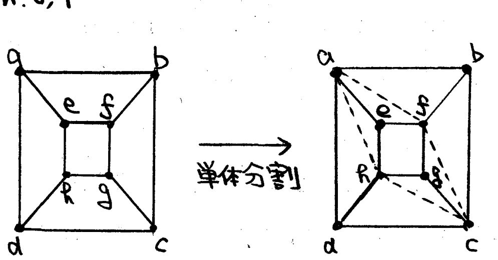
order complex of underlying poset

$\tilde{f}^{(1,1)} = 4x^3+12x^2+13x+6$

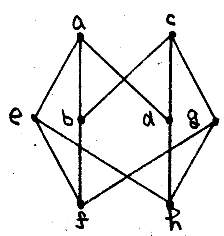
$\chi(\Delta) = \tilde{f}^{(1,1)}|_{x=-1} = 1$

例8

Th.8,9



$\longrightarrow$



$4x^2+5x+1$

$x+1$

$2x+1 \ : f^{(1,1)}$

1

$\tilde{f}^{(1,1)} = 8x^2+16x+8$

$\chi(\Delta) = \tilde{f}^{(1,1)}|_{x=-1} = 0$

order complex of underlying poset

文献

1. J. P. Barthelemy, An asymptotic equivalent for the number of total preorders on a finite set, Discrete Math. 29 (1980), 311-313.
2. C. Berge, Principles of Combinatorics, Academic Press, 1971.
3. A. Brondsted, An Introduction to Convex Polytopes, Springer, 1983.
4. O. A. Gross, Preferential arrangements, AM. Math. Monthly 69 (1962), 4-8.
5. G. Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl, Analyse algebrique d'un scrutin, Math. et Sci. Humaines 4 (1960), 9-33.
6. Y. Kusaka, H. Fukuda and H. Narushima, The number tables of the command flow numbers on a Boolean lattice and a partition lattice, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. XVI (1981), 21-27.
7. L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, North Holland Pub.,1979.
8. P. McMullen and G. C. Shephard,Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture, Cambrige Univ. Press, 1971.
9. N. Metropolis and G. C. Rota, Combinatorial Structure of the faces of n-cube, SIAM J. APPL. Math., Vol. 35, No. 4, 1978, 689-694.
10. T. Minezaki and H. Narushima, The number table of the coefficients of the command flow polynomial on a Boolean lattice, Proc. Fac. Sci. Tokai Uinv. XVIII (1983), 17-22.
11. I. Miyamoto, Bounding faces in convex set related to permutation, preprint, June 1983.
12. H. Narushima, A method for counting the number of chains in a partially ordered set, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. XVI (1981), 3-20.
13. H. Narushima, A class of recurrence relations on acyclic digraph of poset type, RIMS kokyuroku 427 (Applied Combinatorial Theory and Algorithms), June 1891, 56-57.

14. H. Narushima, Principle of inclusion-exclusion on partially ordered sets, Discrete Math., 42 (1982), 243-250.

15. R. P. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, Advances in Math., 35 (1980), 236-238.

16. K. Baclawski, Combinatorics: Trends and Examples (in "New Directions in Applied Mathematics (ed: P. J. Hilton and G. S. Young)), Springer, 1982.

17. 伊理正夫、白川 功、梶谷洋司、篠田庄司 ほか、演習グラフ理論、コロナ社、1983.

18. 梶谷洋司、An acyclicity of circuits of a digraph and the dual concept, 京大数解研講究録 471 (グラフ理論とその応用)、1982年10月、106-109.

19. 郡山 彬、束とホモロジー、束論談話会第3回会合予稿、1983年10月.

20. 土屋守正、恵羅 博、成島 弘、Acyclic digraph と acyclic orientation に関するいくつかの話題、京大数解研講究録、471 (グラフ理論とその応用)、1982年10月、97-105.

21. 土屋守正、Three faces in Combinatorial Theory、修士論文(東海大大学院・理・数学)、1983年3月.

22. 冨澤信明、ヘドロン空間の理論と応用、京大数解研講究録、471 (グラフ理論とその応用)、1982年10月、183-229.

23. 冨澤信明、基多面体について —新幾何学の誕生 Holometry— 束論談話会第3回会合予稿、1983年10月、

24. 成島 弘 述、土屋守正、造森あきの 記、情報科学特論第二集中講義ノート、東工大 大学院情報科学専攻、1984年1月.

25. 成島 弘、小高明夫、ブール代数とその応用、東海大出版会、1983年3月。

26. 一松 信、正多面体を解く、東海大出版会、1983年6月.