数理解析研究所講究録
第534巻 1984年 88-90

3－消去可能グラフについて

石塚 昭夫　上野 修一　梶谷 洋司

東京工業大学 工学部 電気電子工学科

（0）小文では、k－消去可能グラフを定義し，3－消去可能グラフを特徴付ける。この特徴付けから、与えられたグラフが3－消去可能グラフであるか否かを判定する多項式時間のアルゴリズムを導くことができる。

（1）単純無向連結グラフを$G=(V, E)$とする。VはGの点集合、EはGの枝集合である。$E=\phi$のとき，Gを空グラフとよぶ。$|V|=n$とおく。一対一写像$\phi:\{1, 2, \cdots, n\}\to V$を$V$の順序付けとよぶ。$\Gamma(v)$は点$v$に隣接する点の集合である。$G(A)$は、$A\subseteq V$上の誘導部分グラフである。

（2）Gから点vを消去するとは、$\Gamma(v)$のすべての非隣接二点間に枝を付加し、点vを除去することである。Gから点vを消去して得られるグラフを$G*v$で表す。$G*(v_1, v_2, \cdots, v_k)$は、$G$から点$v_1, v_2, \cdots, v_k$をこの順に消去して得られるグラフである。

(3) 次の二条件を満足するVの順序付けϕが存在するとき、$G=(V,E)$をkー消去可能グラフとよぶ：

(イ) Gにおいて、$|\Gamma(\phi(1))|\leq k$,

(ロ) $G*(\phi(1),\phi(2),\cdots,\phi(i-1))$において、$|\Gamma(\phi(i))|\leq k$,

$i=\ 2,\cdots,n.$

Gが1(2)ー消去可能グラフであるための必要十分条件は、Gが木(直並列グラフ)であることである。

(4) $G=(V,E)$に$|\Gamma(x)|\leq 2$であるような点xが存在すると仮定する。このとき、Gが3ー消去可能グラフであるための必要十分条件は、$G*x$が3ー消去可能グラフであることである。

(5) $G=(V,E)$に$|\Gamma(x)|=3$かつ$G(\Gamma(x))$が空グラフではないような点xが存在すると仮定する。このとき、Gが3ー消去可能グラフであるための必要十分条件は、$G*x$が3ー消去可能グラフであることである。

(6) $G=(V,E)$に$\Gamma(x)=\Gamma(y)$かつ$|\Gamma(x)|=|\Gamma(y)|=3$であるような二点$x$、$y$が存在すると仮定する。このとき、$G$が3ー消去可能グラフであるための必要十分条件は、$G*(x,y)$が3ー消去可能グラフであることである。

(7) $G=(V,E)$に$\Gamma(x)=\{y_1,y_2,y_3\}$, $|\Gamma(y_i)|=3$, $|\bigcup_i\Gamma(y_i)|=4$, $|\Gamma(y_i)\cap\Gamma(y_j)|=2$ $(i\neq j)$なる四点x,

y_1, y_2, y_3が存在すると仮定する。このとき、Gが3－消去可能グラフであるための必要十分条件は、$G*(y_1, y_2, y_3, x)$が3－消去可能グラフであることである。

（8） $G=(V, E)$が3－消去可能グラフならば、次の(ハ)～(ヘ)の少なくとも一つが成立する。

(ハ) $|\Gamma(x)| \leq 2$ なる点xが存在する。

(ニ) $|\Gamma(x)| = 3$ かつ$G(\Gamma(x))$が空グラフではないような点xが存在する。

(ホ) $\Gamma(x)=\Gamma(y)$ かつ$|\Gamma(x)| = |\Gamma(y)| = 3$であるような二点$x$, yが存在する。

(ヘ) $\Gamma(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$, $|\Gamma(y_i)| = 3$, $|\bigcup_i \Gamma(y_i)| = 4$, $|\Gamma(y_i) \cap \Gamma(y_j)| = 2$ $(i \neq j)$ であるような四点x, y_1, y_2, y_3 が存在する。

（9）(4)～(8) より、与えられたグラフが3－消去可能グラフであるか否かを判定する多項式時間のアルゴリズムを導くことができる。4以上のkに対してk－消去可能グラフを特徴付けることは今後の課題である。