数理解析研究所講究録
第534巻 1984年 91-138

Acycloid と Holometry の理論

新潟大 経済　　冨澤信明
(Nobuaki Tomizawa)

輓近自然科學ノ基礎ノ動揺ハ竟ニドノ邊ニ安定スルデアラウカハ知ラヌガ，若シモ不連續的數學（粒ノ數學）ガ絶對的ニ要求セラレル時ガ來ルナラバ，ソノ時ニハ古典數學ノ權威ハ地ニ墜チルデアラウ．青年學徒ハ粒ノ數學ノ見本トシテ格子幾何學ヲ閑却シテハナラナイ．（高木貞治數學雜談第一回"格子の幾何學"（1933年）より）

1. まえがき

グラフの一次元単体的複体としての代数的側面や行列の列ベクトルの間の線形独立・従属の概念を抽象化して生まれた"マトロイド"の理論は約50年の歳月を経て劣模関数によって決められる凸多面体である"ヘドロン"(1)の性質の研究から"Holometry"(2)の理論へと飛躍的に発展した。Holometry においてはマトロイドの基又はハイパーマトロイドの基ベクトルに相当する概念が"半順序"として表現される。半順序はアサイクリック・グラフの推移的閉包と考えられ，半順序が（単体座標系における）"尖凸多面錐"に対応し，Birkhoff による半順序と分配束の一対一の対応に関する定理も凸多面

錐に関する双極性（polarity）に他ならないという事実の発見がヘドロンの理論をHolometryへと発展させたきっかけである。[(3),(4)]

Holometryにおける半順序を（零ベクトル及び互に平行な列ベクトルを含まない）行列の列ベクトルの部分集合に適当に向きをつけて得られる尖凸多面錐に拡張することによって得られる"Greedy System"は一般に任意の尖凸多面体を含む概念である。[(5)] Holometryがヘドロンの抽象概念とすれば，Greedy Systemは尖凸多面体の抽象概念ともみなせるのである。すなわちヘドロンの一般化である「与えられたベクトルの集合と平行な稜のみを有する尖凸多面体」は一般の互に平行な稜がほとんど存在しない尖凸多面体と比較すればきわめて特殊な尖凸多面体のように見えるけれども，丁度ハイパーマトロイドの基多面体（≡ヘドロン）からみればマトロイドの基多面体（互に平行な稜が全くない単体もその一つである）がきわめて特殊な尖凸多面体であるように，むしろ平行な稜をほとんど持たない方が特殊であるともみなせるのである。ここで半順序のHasse図には尖凸多面錐の端射の族，すなわち"枠(frame)"が対応することに注意されたい。

$m \times n$ 実行列Aの列ベクトルの"非環反向(acyclic reorientation)"の全体はn次元超立方体$[-1,1]^n$のAによるaffine

写像である $r(=\mathrm{rank}A)$ 次元の尖凸多面体 $A[-1,1]^n$ の端点集合と一対一の対応をする。特にAがm点からなる完全グラフの枝に一つの向きを与えた有向グラフ（これは"トーナメント"と呼ばれる）の $m\times\frac{m(m-1)}{2}$ 点枝接続行列の場合には $A[-1,1]^n$ はm点集合上の全順序の全体（これはm次の対称群 S_m と一対一に対応している）と同一視され，これがHolometryと密接に関係しているのである。こうして丁度グラフ，行列からその線形独立・従属の概念を抽象化してマトロイドが生れたのと類似して与えられたグラフの枝，行列の列ベクトルあるいはより一般に有向マトロイドの"非環・循環(acyclicity・cyclicity)"の概念の抽象化，すなわち非環反向の抽象概念が存在することが明らかとなった。これを"非環システム(Acyclicity System)"又は"Acycloid"と呼ぶ。(6)

Acycloidはm点グラフの場合にはm点集合上の半順序全体がその包含関係に関してなす束（"半順序束(poset lattice)"(7)と呼ばれる），行列Aの場合にはAの列ベクトルの向きづけによる尖凸多面錐の全体が包含関係に関してなす束，に対応した概念である。

特にそのような束の最大元以外の極大元（超平面に相当し，束はそれらの交わり束となっている）は"全順序"の全体の抽象概念であり，対称群の抽象概念ともみなせる。こうして

Acycloidは"グラフ的Acycloid", "行列的Acycloid", それに有向マトロイドから作られる"マトロイド的Acycloid"があることが分かるが, Fukudaによりマトロイド的でないAcycloidの例が発見されたことによりより"一般のAcycloid"が存在することが明らかとなった。これらのAcycloidの分類に対応して, Acycloid上のHolometryも"グラフ的Holometry", "行列的Holometry", "マトロイド的Holometry", そして"一般のHolometry"が考えられる。従来, Holometryと呼んでいたものはグラフ的Holometryであり, Greedy Systemと呼んだものは特殊な行列的Holometryに他ならない。良く知られているように一般の"凸多面体グラフ"は尖凸多面体の位相構造を表現してはいるが, 尖凸多面体の凸性までは表現できない。その意味で行列的Holometryは凸性までを表現した凸多面体グラフの抽象化とみなすことができるのである。

有向マトロイドにおける1つの非環反向は有向マトロイドに一対一の対応をした球面系の1つの抽象凸多面体の双極概念である(2次元球面の場合には丁度平面グラフの双対性に対応している)。この意味で完全ヘドロンはトーナメントの点枝接続行列から得られる線形球面系の双極概念であったのである。そして完全ヘドロンの面束(台集合上の弱順序全体が

包含関係に関して作る束と同型）が線形独立・従属の概念，すなわちグラフ的マトロイドの構造を表わしており，“半順序束”が非環性を表わしているのである。行列の場合には尖凸多面錐は線形な球面系のすなわち通常の凸多面体の双極概念である。有向マトロイドの球面系はマトロイド的Acycloidの双極概念であって，有向マトロイドのマトロイドとしての表現はグラフ的Holometry であるマトロイドのヘドロンの稜に＋，－の符号がつけられて，それらが適当な公理を満たすものと考えるのが自然である。[8]

マトロイドやハイパーマトロイドの重み最小の基を求めるための greedy 算法又はグラフ的Holometryにおけるそれらの一般化である greedy 算法は丁度有向マトロイドと等価な球面系において“可能領域”を捜すためのいわゆる線形計画における“第一段階（phase 1）”の抽象概念の双極概念になっていたのである。すなわち一般のAcycloidは線形計画の第二段階が解けるシステム（ただし基底解という概念は存在しないことに注意）の抽象化であり，マトロイド的Acycloid（≡有向マトロイド）は線形計画の最適化のための第二段階が解けるシステムの抽象化である。こうしてグラフ，実行列，有向マトロイドは独立・従属の概念の抽象化としてのマトロイドの性質と非環・循環の概念の抽象化であるAcycloidの性質

の両面を持つシステムであることが分かる。

線形不等式系の研究は等式系よりは歴史が浅いとはいえ，Gordan(1873) をはじめ Farkas (1902)，Stiemke (1915)，Gale (1951)等の名が冠せられる二者択一定理は余りにも有名であるのに，Acycloidの発見がそれと対比せられるべきマトロイドの発見 (1935) より約半世紀程遅れたこと，およびマトロイド，ハイパーマトロイド，(グラフ的) Holometry を経過してはるかに遠まわりをして発見されたことはきわめて興味深い。“最小帰環枝集合 (minimum feedback arc set)”，“線形計画の第一段階”，それに“尖凸多面体”等の概念はマトロイドというよりも実はAcycloidに属する概念だったのである。きわめて特殊な例であるが Boole 束 $2^S=\{0,1\}^S$ はマトロイドの独立集合族の例であり，象限の族 $\{-,0,+\}^S$ における原点 $\{0\}^S$ を最小元に持つ“調和順序”はAcycloidの束の例であり，このとき $\{-,+\}^S$ は束の超平面に相当する。こうしてAcycloid は“象限”の概念の抽象化ともみなせるのである。

2. Acycloidの定義

“Acycloid” $\mathfrak{a}$ 又は“非環システム (acyclicity system)” $\mathfrak{a}$ はマトロイドと同様にいろいろな概念によって定義可能であるが，まず次の定義から始めよう。“単純 Acycloid” $\mathfrak{a}$ と

は有限集合 S と S 上の非空な集合族 $\mathfrak{P} \subseteq 2^S$ の対 $(S, \mathfrak{P})$ で次の公理系 $(\mathfrak{P}0)$, $(\mathfrak{P}1)$, $(\mathfrak{P}2)$ を満たすものである。[8),(9]

単純Acycloidの公理系：

$(\mathfrak{P}0)$ $|\mathfrak{P}| \geq 2$,

$(\mathfrak{P}1)$ $X \in \mathfrak{P} \Rightarrow X^* \equiv \overline{X} \in \mathfrak{P}$,

$(\mathfrak{P}2)$ $X, Y \in \mathfrak{P}, X \neq Y \Rightarrow {}^{\exists}z \in X \triangle Y : X \triangle \{z\} \in \mathfrak{P}$.

（ここで $\overline{X} = S - X$, $X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ と約束する）

$\mathfrak{A} = (S, \mathfrak{P})$ において，S を"射線集合(ray set)"，$n = |S|$ をその"次数(degree)"，$X \in \mathfrak{P}$ を"極(pole)"，X^* を X の"反極(antipole)"，$\mathfrak{P}$ を"極族(pole family)"，$|\mathfrak{P}|$ を $\mathfrak{A}$ の"位数(order)"，$\mathfrak{A} = (S, \mathfrak{P})$ を極族によって定義された"単純Acycloid (simple acycloid)"と呼ぶ。$X \in \mathfrak{P}$ は与えられた射線集合を"非環(acyclic)"とするために反向すべき射線の集合を表わしている。

台集合 E 上の基族によって定義されたマトロイド $\mathfrak{M} = (E, \mathcal{B})$ の自己双対な基の交換公理：

「$B, B' \in \mathcal{B}$, $B \neq B' \Rightarrow {}^{\exists}i \in B - B'$, ${}^{\exists}j \in B' - B$:

$B \cup \{j\} - \{i\}$, $B' \cup \{i\} - \{j\} \in \mathcal{B}$」

においては2つの基 B, B' が相互に交換可能であるのに対し，公理 $(\mathfrak{P}2)$ は S を E 上のトーナメント（E を点集合に持つ完全有向グラフのこと）とするとき片方のみを交換可能にした，

すなわち

$$B \cup \{j\} - \{i\} \in \mathcal{B}$$

で必ずしも $B' \cup \{i\} - \{j\} \in \mathcal{B}$ は成立しなくてもよいとしたものに相当している。公理（$\mathfrak{P}$2）を単純 Acycloid の極の"反向公理（reorientation axiom）"と呼び，$X \triangle \{z\}$ を X の"単位反向（elementary reorientation）"と呼ぶ。これは対称群における"隣接互換（elementary transposition）"に対応した概念である。

単純 Acycloid に対して一般の Acycloid は射線集合に"ループ"を添加したり，射線 $x \in S$ を互に"並列な同値類"でおきかえたりして得られる。

Acycloid $\mathfrak{A} = (S, \mathfrak{P})$ におけるループ $x \in S$ とは

$$\forall X \in \mathfrak{P} : x \notin X \text{ 又は } \forall X \in \mathfrak{P} : x \in X \tag{1}$$

となる射線のことである。S_0 をループの射線の全体とするとき，すなわち

$$S_0 = S_0^- \cup S_0^+ \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} S_0^- &= \{ x \in S \mid \forall X \in \mathfrak{P} : x \notin X \} \\ S_0^+ &= \{ x \in S \mid \forall X \in \mathfrak{P} : x \in X \} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

とするとき，公理（$\mathfrak{P}$1）は

（$\mathfrak{P}$1'）$X \in \mathfrak{P} \Rightarrow X^* \equiv \overline{X} \triangle S_0 \in \mathfrak{P}$.

に置きかえればよい。

一方 $x\in S$ に並列な（又は平行な）射線 $y\in S$ は

$$^\forall X\in\mathfrak{B} : x\in X \Leftrightarrow y\notin X \quad \text{又は} \quad ^\forall X\in\mathfrak{B} : x\in X \Leftrightarrow y\in X$$

となるような射線 $y\in S$ のことである。x に並列な射線の全体は１つの同値類を作るからそのような同値類の族を $\tilde{S}$（S の分割となっている）とするとき，すなわち

$$\tilde{S}=\{\{\{x\}\mid x\in S_0\}, S_1, S_2, \cdots, S_n\}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} S_i^-&=\{y\in S\mid {}^\forall X\in\mathfrak{B} : x\in X\Leftrightarrow y\notin X\} \\ S_i^+&=\{y\in S\mid {}^\forall X\in\mathfrak{B} : x\in X\Leftrightarrow y\in X\} \end{aligned}\right\}(x\in S_i) \tag{5}$$

とするとき，互に並列な射線は同時に反向しなければならないので公理($\mathfrak{B}2$)は

($\mathfrak{B}2'$) $X, Y\in\mathfrak{B},\ X\neq Y \Rightarrow {}^\exists Z\in\tilde{S} : Z\subseteq X\triangle Y,\ X\triangle Z\in\mathfrak{B}$.

と置きかえればよい。ここでループ $x\in S$ はそれ自身で１つの同値類 $\{x\}\in\tilde{S}$ を作り，$(X\triangle Y)\cap S_0=\phi$ であることに注意する。

必ずしも単純とは限らない一般の Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{B})$ は

($\mathfrak{B}0'$) $\mathfrak{B}\neq\phi$.

と($\mathfrak{B}1'$),($\mathfrak{B}2'$)によって定義される。このとき

$$n=|\tilde{S}|-|S_0| \tag{6}$$

を $\mathfrak{A}$ の"次数（degree）"と呼ぶ。

Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{B})$ が Acycloid $\mathfrak{A}_1=(S_1,\mathfrak{B}_1)$, $\mathfrak{A}_2=(S_2,\mathfrak{B}_2)$ の直積となっているとき，すなわち

$$S_1 \cup S_2 = S, \; S_1 \cap S_2 = \phi, \tag{7}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \equiv \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathfrak{B}_1, \; X_2 \in \mathfrak{B}_2\} \tag{8}$$

となっているとき，$\mathfrak{A}$は"可分(separable)"であるといい，そうでないとき"非可分(nonseparable)"であるという。Acycloidの非可分成分への分解は唯一意に決まり，ループはそれ自身で1つの非可分成分をなす。

射影幾何の場合と同様にAcycloidの本質的な部分は単純なAcycloidにあるので，以下特にことわらない限り，Acycloidは単純であるとする。

線形不等式が可解であるか否かを判定する問題，すなわち線形計画法における第一段階の抽象概念として，

「Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{B})$ において与えられた集合$Y(\subseteq S)$が極であるか否かを判定する問題」

は次のようにして解くことができる。

〈極判定算法〉

(0) 任意の初期極$X \in \mathfrak{B}$を選び(1)へ行く。

(1) $^\forall Z \in X \triangle Y : X \triangle \{Z\} \notin \mathfrak{B}$

ならば算法は終了する。このとき$Y \notin \mathfrak{B}$である。そうでないとき(2)へ行く。

(2) Xを$X' \equiv X \triangle \{Z\}$に変換する。$X=Y$ならば算法は終了する。このとき$Y \in \mathfrak{B}$である。そうでないとき(1)へ戻る。☒

次の定理1はAcycloidにおける最も基本的な定理である。

定理1．「Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$ において任意の極 $X\in\mathfrak{P}$ から他の極 $Y\in\mathfrak{P}$ に至る長さが $k=|X\triangle Y|$ の鎖：

$(X\equiv)X_0, X_1, \cdots, X_k(\equiv Y)$

が存在する。ここで X_{i+1} は X_i の単位反向である。特に $X\in\mathfrak{P}$ からその反極 $X^*\in\mathfrak{P}$ に至る長さ $n=|S|$ の組成列が存在する。」

3. Acycloidの回転，簡約，射影，極束

Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$ において任意の $T\subseteq S$ に対して

$$\mathfrak{P}\triangle T\equiv\{X\triangle T \mid X\in\mathfrak{P}\} \tag{9}$$

と定義すれば，

$$\mathfrak{A}\triangle T=\{S,\ \mathfrak{P}\triangle T\} \tag{10}$$

もやはりS上のAcycloid となる。これをTによる〝回転(rotation)〟と呼ぶ。$\mathfrak{A}$の回転は$\mathfrak{A}$と同型であり，$\mathfrak{A}$の回転の全体はS上のAcycloid全体の中で1つの同値類を作る。その中でも特に $\phi\in\mathfrak{P}$（したがって $S\in\mathfrak{P}$）をAcycloidの〝標準形(canonical form)〟又は〝アサイクリック・Acycloid〟と呼ぶ。標準形は〝アサイクリック・グラフ〟や〝強連結グラフ〟の抽象概念である。

任意の $T\subseteq S$ に対して

$$\gamma(T) = \min\{\,|T \cap X| \mid X \in \mathfrak{B}\,\} \tag{11}$$

を$\mathfrak{A} \triangle T$の"サイクロマテック数(cyclomatic number)"と呼び，特に$\gamma = \gamma(\phi)$を$\mathfrak{A}$のサイクロマテック数と呼ぶ。

問題1．「Acycloid $\mathfrak{A} = (S, \mathfrak{B})$における与えられた$T \subseteqq S$に対するサイクロマテック数$\gamma(T)$を決定せよ。(より一般には$\gamma(T)$が$n$の多項式オーダーの手間で決定できるAcycloidを特徴づけよ)」

この問題は単純な有向グラフにおけるまだ未解決であるところの"最小帰環枝集合"を求める問題の一般化であり，マトロイド理論的にこれと双対な"最小強連結化集合"を求めるというYoungerの問題(これも問題1の特別な場合である)の方は完全に解けている[10]。

Acycloid $\mathfrak{A} = (S, \mathfrak{B})$において，任意の$T \subseteqq S$に対して

$$\mathfrak{B} \cdot T \equiv \{\,X \cap T \mid X \in \mathfrak{B}\,\} \tag{12}$$

と定義すれば

$$\mathfrak{A} \cdot T = (T, \mathfrak{B} \cdot T) \tag{13}$$

はやはりAcycloidとなる。これを$\mathfrak{A}$のTへの"簡約(reduction)"と呼ぶ。簡約は有向マトロイドの球面系における超球面の"除去(deletion)"に対応する。

$$\mathfrak{A}/T = \mathfrak{A} \cdot \overline{T} \tag{14}$$

を$\mathfrak{A}$のTによる"簡約"と呼び，特に$T = S - \{x\}$のとき

$$\mathfrak{A}/\{x\} = \mathfrak{A}\cdot(S-\{x\}) \tag{15}$$

をxによる"単位簡約(elementary reduction)"と呼ぶ。

一方簡約に対して$x\in S$のとき

$$\mathfrak{P}\times(S-\{x\}) = \mathfrak{P}\div\{x\} \equiv \{X-\{x\} \mid x\in X\in\mathfrak{P},\ X-\{x\}\in\mathfrak{P}\} \tag{16}$$

と定義するとき

$$\mathfrak{A}\times(S-\{x\}) = (S-\{x\},\ \mathfrak{P}\times(S-\{x\})) \tag{17}$$

をxによる"単位射影(elementary projection)"と呼ぶ。これは有向マトロイドの球面系における"単位縮約(elementary contraction)"に対応した概念であるが，有向マトロイドにおいては単位射影は必ず有向マトロイドになるのに対し，Acycloidではそれは必ずしも再びAcycloidとはならないことに注意されたい(11)。単位射影を繰り返して得られる

$$\mathfrak{A}\times T = (T,\ \mathfrak{P}\times T) \tag{18}$$

を一般に"射影(projection)"と呼ぶ。

予想1.「Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$において任意の射影$\mathfrak{A}\times T$が全てAcycloidならば$\mathfrak{A}$は有向マトロイドである。」

標準的なAcycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$において，極族$\mathfrak{P}$が集合の包含関係$\subseteq$に関してJD的な半順序集合$(\mathfrak{P},\subseteq)$を作ることは明らかであるが，実はそれは束になっている。そのことは次の補題1を用いて$|S|$に関する帰納法によって示される。

補題1.「$\mathfrak{P}/\{x\}$をAcycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$の$x(\in S)$による

単位簡約の極族とする。$(\mathfrak{P}, \subseteqq)$, $(\mathfrak{P}/\{x\}, \subseteqq)$ において$\mathfrak{P}$から$\mathfrak{P}/\{x\}$への写像をfとするとき，次の関係がある。

$$X \subseteqq Y \Rightarrow f(X) \subseteqq f(Y), \tag{19}$$

$$f(X) \subsetneqq f(Y) \Rightarrow X \subsetneqq Y. \tag{20}$$
」

定理2. 「Acycloid $\mathfrak{A}=(S, \mathfrak{P})$ が標準形のとき極族$\mathfrak{P}$は集合の包含関係$\subseteqq$に関してϕを最小元，Sを最大元に持つJD束となる。」

極族$\mathfrak{P}$が作る定理2のような束を"極束(pole lattice)"と呼ぶ。Acycloid の任意の極$Z \in \mathfrak{P}$に対してZによる回転$\mathfrak{P} \Delta Z$を考えれば，Acycloidの任意の極Zを最小元(=南極)，Z^*を最大元(=北極)に持つ極束となる。これを

$$(\mathfrak{P}, \rightarrow_Z) \equiv (\mathfrak{P}\,;\, \uparrow_Z, \downarrow_Z) \tag{21}$$

と表わす。$\uparrow_Z$, $\downarrow_Z$ はそれぞれ極束の結びと交わりである。ここでZは明らかなときには書かないこともあり，特に標準形のときには$\rightarrow$を$\subseteqq$とも書く。

Acycloid $\mathfrak{A}=(S, \mathfrak{P})$の極束$(\mathfrak{P}, \rightarrow)$のHasse図の辺は射線$x$の反転に対応した$|S|$個の同値類$C(x)$ $(x \in S)$に分けられる。$(\mathfrak{P}/\{x\}, \rightarrow)$ のHasse図は$(\mathfrak{P}, \rightarrow)$ のHasse図において$C(x)$の辺を全て短路除去して得られる。$C(x)$は極束のHasse図の初等的カットセットとなっていて次の定理が成立している。

定理3. 「Acycloid $\mathfrak{A}=(S, \mathfrak{P})$の極束$(\mathfrak{P}, \rightarrow)$ はそのカ

ットセットC(x)により互に双対同型な2つの半束$(\mathfrak{P}_x^-, \rightarrow)$, $(\mathfrak{P}_x^+, \rightarrow)$に分けられる。」

ここで南極を含む方を"南半束", 北極を含む方を"北半束"と呼ぶ。これらは行列的Acycloidにおいては Affine 空間に対応した概念である。C(x)を"Jordanカット"と名づける。それはC(x)が次の

<u>Jordanの単純閉曲面定理.</u>「(d+1)次元位相球面$\mathbb{S}^{d+1}$とその中の$\mathbb{S}^d$をとったとき, $\mathbb{S}^{d+1}-\mathbb{S}^d$は連結な2つの部分に分けられ

$$\mathbb{S}^{d+1}-\mathbb{S}^d=\mathbb{S}_+^{d+1}\cup\mathbb{S}_-^{d+1},\ \mathbb{S}_+^{d+1}\cap\mathbb{S}_-^{d+1}=\phi, \tag{22}$$

$\mathbb{S}^d$は$\mathbb{S}_+^{d+1}$と$\mathbb{S}_-^{d+1}$の共通の境界でどちらからも到達可能である」

の離散的双対概念になっていることによる。

$\mathfrak{P}\subseteq 2^S$だから$\mathfrak{P}$が標準形ならば$(\mathfrak{P}, \subseteq)$はBoole束$(2^S, \subseteq)$の中に埋め込むことができる。Boole束は互に射影の関係にあるHasse図の辺が平行であるように平面に描画できる。したがって次の定理を得る。

<u>定理4.</u>「Acycloid $\mathfrak{A}=(S, \mathfrak{P})$の極束$(\mathfrak{P}, \rightarrow)$はC(x) $(x\in S)$の射線の集合が(そしてそれだけが)互に平行であるようにHasse図を平面に描くことができる。」

一般に組成列の長さがnのJD束$(L, \leqq)$において$(L, \leqq)$の

素商の族（すなわちHasse図の辺の全体）から，$S=\{1,2,\cdots,n\}$への写像γが存在して，最小元0から$a\in L$への1つの組成列を

$$(0\equiv)a_0<a_1<a_2<\cdots<a_k(\equiv a) \tag{23}$$

として

$$\left.\begin{aligned}&\gamma(L)=\{\gamma(a)\mid \quad a\in L\}:\\&\gamma(a)=\{\gamma[a_{i-1},a_i]\mid i=1,\cdots,k\}\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

と定義するとき，JD束$(L,\leqq)$と集合の包含関係による半順序集合$(\gamma(L),\subseteqq)$が同型のとき，$(L,\leqq)$を"強意のJD束"と呼び，$\gamma(L)$をその"集合による表現"と呼ぶ。例えば分配束は強意のJD束であり，その単調分割の"イデアルによる表現"は集合による表現に他ならない。

$Z\in\mathfrak{P}$を南極とする極束$(\mathfrak{P},\rightarrow)$においては

$$\gamma(\mathfrak{P})=\ \mathfrak{P}\triangle Z \tag{25}$$

がその集合による表現となる。ここで写像γは極束$(\mathfrak{P},\rightarrow)$のHasse図における$x\in S$に対応したJordanカット$C(x)$の逆像に他ならない。

最小元0と最大元Iをもつ束$(L,\leqq)=(L;\vee,\wedge)$において各元$a$に対して元$a^\perp$が定まり，次の3条件が満たされているとき，$L$は"直可補束(orthocomplemented lattice)"と呼ばれ，$a^\perp$はaの"直補元(orthocomplement)"と呼ばれる。

$$a^{\perp} \vee a = I, \quad a^{\perp} \wedge a = 0, \tag{26}$$

$$a \leqq b \Rightarrow b^{\perp} \leqq a^{\perp}, \tag{27}$$

$$(a^{\perp})^{\perp} = a. \tag{28}$$

極束$(\mathfrak{P}, \to)$においては極Xの反極X^*はXの直補元$X^{\perp}$となっているから極束は直可補束である。こうして極束の束論的特徴づけが得られる。

定理５．「Acycloid $\mathfrak{A} = (S, \mathfrak{P})$の任意の極$Z \in \mathfrak{P}$を南極にもつ極束$(\mathfrak{P}, \to)$は強意のＪＤ的直可補束である。逆に強意のＪＤ的直可補束がその任意の元を最小元，その直補元を最大元にもつような強意のＪＤ的直可補束となっていればそれはAcycloidの極束である。」

例えば図１の束は強意のＪＤ的直可補束ではあるがaを最小元$a^{\perp}$を最大元とする強意のＪＤ的直可補束とはなり得ない。

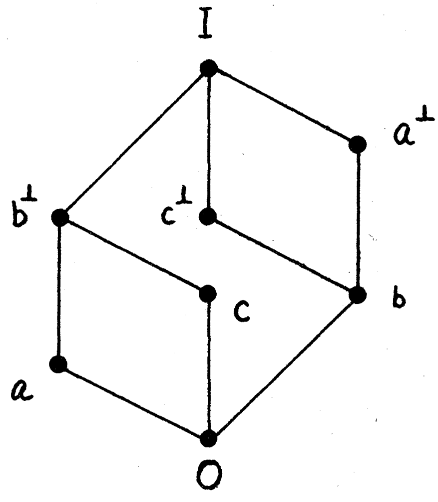

図１．極束でない強意のＪＤ的直可補束の例．

図２にNon－Pappusマトロイド（これは有向マトロイドである）から作られる〝マトロイド的Acycloid〟の極束の例をあげる。この極束から極XとX*を除けばPappusマトロイドから作られる〝行列的Acycloid〟の極束となる。

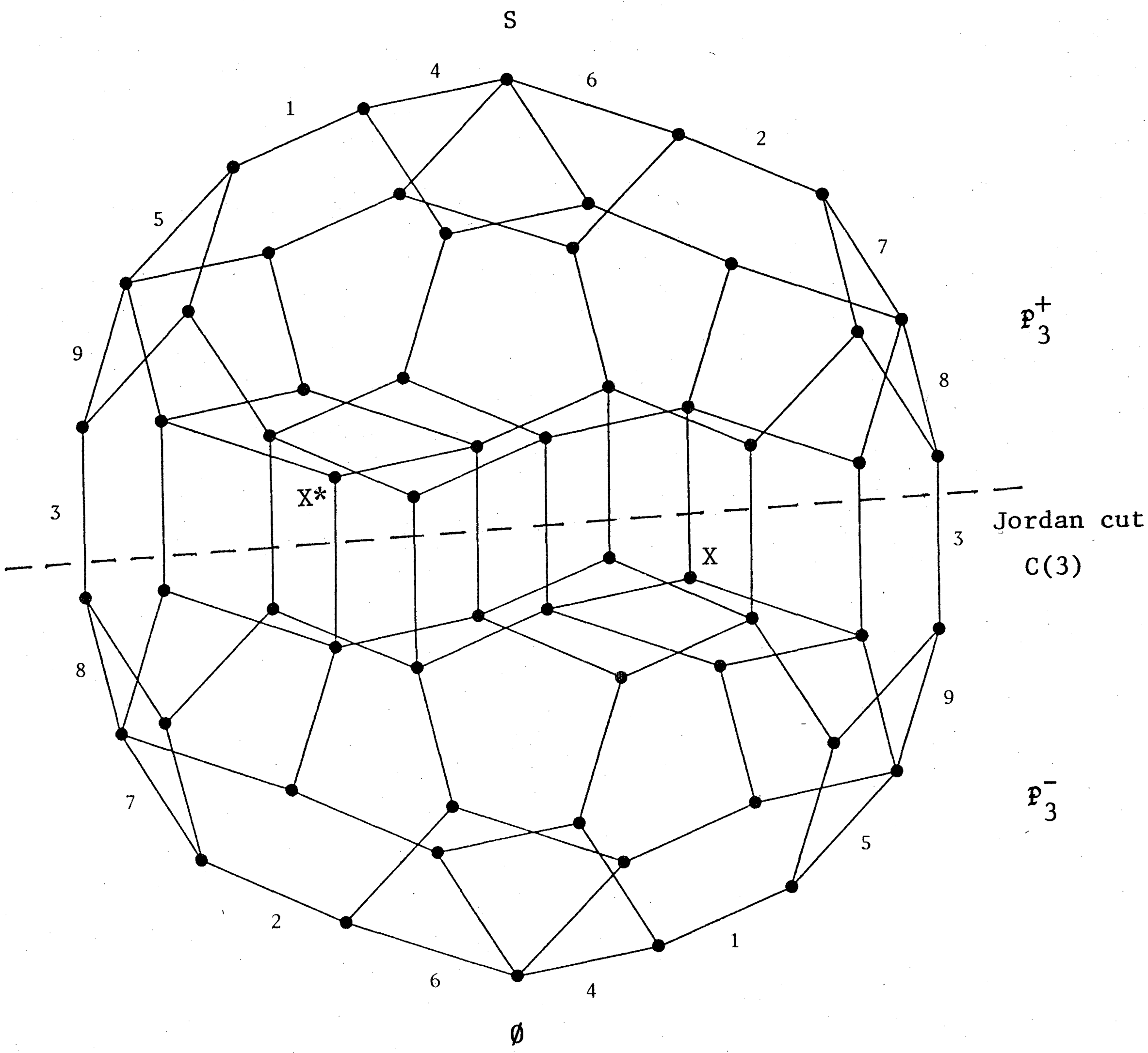

図２．Non-Pappus Acycloidの極束．

4. 象限，Acycloid束，閉アサイクロン，サイクル

有限集合Sの元に$-$, 0, 又は$+$の符号を与えた"付向集合(signed set)"に関するいろいろな定義を以下に用意する。

$\xi \in 3^S \equiv \{-,0,+\}^S$ を"象限(orthant)"と呼び，特に$\{0\}^S$を0で表わし"原点(origin)"と呼ぶ。$\xi \in 3^S$ に対してそれぞれ$-$，$+$，0および$-$又は$+$の符号を持つSの部分集合を$\mathrm{car}^-\xi$, $\mathrm{car}^+\xi$, $\mathrm{car}^0\xi$ および$\mathrm{car}\,\xi$で表わし，

$$\|\xi\| = |\mathrm{car}\,\xi| = |\mathrm{car}^-\xi| + |\mathrm{car}^-\xi| \tag{29}$$

をξの"次数(degree)"と呼ぶ。このとき$\xi \in 3^S$ と互に素なSの部分集合の対($\mathrm{car}^-\xi$, $\mathrm{car}^+\xi$)とを同一視することにする，すなわち

$$\xi \equiv (\mathrm{car}^-\xi,\ \mathrm{car}^+\xi) \in 3^S \tag{30}$$

と約束し，特に単位ベクトルの一般化として

$$\{-\}^x \equiv (\{x\}, \phi),\ \{+\}^x \equiv (\phi, \{x\}) \tag{31}$$

と約束する。また3^S 上の半順序関係$\Subset$を

$$\xi \Subset \eta \Leftrightarrow \eta \Supset \xi \Leftrightarrow \mathrm{car}^-\xi \subseteq \mathrm{car}^-\xi,\ \mathrm{car}^+\xi \subseteq \mathrm{car}^+\eta \tag{32}$$

により導入する。$\xi \Subset \eta$のときξはηの"部分象限(suborthant)"と呼び，半順序関係$\Subset$を3^S 上の"調和順序(harmonic order)"と呼ぶ。ここで無限遠点全体を表わす仮想的な象限として"ι(iota)"を導入する。すなわち任意の$\xi \in 3^S$ に対して

$$0 \Subset \xi \Subset \iota \tag{33}$$

である。$\hat{3}^S \equiv 3^S \cup \{\iota\}$ は調和順序 $\Subset$ に関して実は束を作る。この束を "象限束(orthant lattice)" と呼び，その結びを $\Cup$, 交わりを $\Cap$ で表わす。このとき

$$\xi \Cap \eta = (\mathrm{car}^- \xi \cap \mathrm{car}^- \eta,\ \mathrm{car}^+ \xi \cap \mathrm{car}^+ \eta) \tag{34}$$

なる関係があり，象限束は集合の直積の一種の交わり束とみなすことが出来る。この象限束を $(\hat{3}^S; \Cup, \Cap)$ で表わす。これは Boole 束 2^S の区間 $[X, Y]$ $(X \subseteq Y)$ 全体(に ϕ を添加したもの) が区間の包含関係 $\leq$:

$$[X, Y] \leq [X', Y'] \Leftrightarrow X' \subseteq X,\ Y \subseteq Y' \tag{35}$$

に関して作る束と対応

$$(X, \bar{Y}) \longleftrightarrow [X, Y] \tag{36}$$

において双対同型である。ここで無限遠点 ι は ϕ に,原点 0 は全区間 $[\phi, S]$ に対応する。象限束とベクトル束としての3値束 $(\{-1, 0, 1\}^S; \vee, \wedge)$ とは同型でないことに注意する。

$\xi = (\mathrm{car}^- \xi, \mathrm{car}^+ \xi) \in 3^S$ に対して，その符号の反転を

$$-\xi = (\mathrm{car}^+ \xi, \mathrm{car}^- \xi) \tag{37}$$

と定義する。ここで特に

$$-\iota = \iota \tag{38}$$

と約束する。$\xi, \eta \in 3^S$ は

$$\xi \Cap (-\eta) = 0 \tag{39}$$

のとき"調和(harmony)"しているといい

$$\xi \Cap (-\eta) \neq 0 \tag{40}$$

のとき"非調和(dissonant)"であるという。

$$\mathrm{car}\,\xi \cap \mathrm{car}\,\eta = \phi \text{ 又は「} \xi \Cap \eta \neq 0,\ \xi \Cap (-\eta) \neq 0 \text{」} \tag{41}$$

のときξとηは"直交(orthogoual)"しているという。また集合の対称差$\triangle$の概念を3^{S}上へ拡大して$\xi, \eta \in 3^{S}$に対して

$$\xi \triangle \eta = (\mathrm{car}^{+}\xi \cap \mathrm{car}^{-}\eta) \cup (\mathrm{car}^{-}\xi \cap \mathrm{car}^{+}\eta) \tag{42}$$

と定義する。

Acycloid $\mathfrak{A} = (\mathcal{S}, \mathfrak{P})$は各極$X \in \mathfrak{P}$に対して$(\overline{X}, X)$を対応させれば

$$H = \{(\overline{X}, X) \mid X \in \mathfrak{P}\} \ (\subseteqq \{-,+\}^{S}) \tag{43}$$

として$\mathfrak{A} = (\mathcal{S}, H)$によっても表現される。このときの公理系は$\mathcal{S}_0$をループの族$\widetilde{\mathcal{S}}$を並列な同値類として次のようになる。

(H0') $H \neq \phi$,

(H1') $\xi \in H \Rightarrow \xi^{*} \equiv (\mathrm{car}^{+}\xi \triangle \mathcal{S}_0, \mathrm{car}^{-}\xi \triangle \mathcal{S}_0) \in H$,

(H2') $\xi, \eta \in H,\ \xi \neq \eta \Rightarrow {}^{\exists}Z \in \widetilde{\mathcal{S}} : Z \subseteqq \xi \triangle \eta$,
$\xi \triangle Z \equiv (Z \triangle \mathrm{car}^{-}\xi, Z \triangle \mathrm{car}^{+}\xi) \in H$.

$\eta \in H$を"極(pole)"と呼ぶ。極$\eta \in H$の部分象限$\xi \in 3^{S}$でループ$x \in \mathcal{S}_0$の符号が0となっているもの，すなわち

$$\xi \Subset \eta\ (\in H),\quad \mathrm{car}\,\xi \cap \mathcal{S}_0 = \phi \tag{44}$$

となっている象限を"アサイクロン(acyclon)"と呼び，そう

でないものを"サイクロン(cyclon)"と呼ぶ。サイクロンの中で調和順序$\Subset$に関し極小なものを"サイクル(cycle)"と呼ぶ。ループ$x \in S_0$に関しては$\{-\}^x \equiv (\{x\}, \phi)$も$\{+\}^x \equiv (\phi, \{x\})$もともにサイクルである。

Acycloid $\mathfrak{A} = (S, H)$の極大なアサイクロンの族Θ_n(これはループの全てを簡約した$\mathfrak{A}/S_0$の極族に対応する)のいくつかの象限束$(\hat{3}^S; \Cup, \Cap)$における交わりを"閉アサイクロン(closed acyclon)"と呼び，その全体をΘと記す。ιは空な交わりとみなし$\hat{\Theta} = \Theta \cup \{\iota\}$と約束すれば$\hat{\Theta}$は交わり束となる。ここで$\iota$は閉アサイクロンとは考えない。この束の結びを$\vee$，交わりを$\wedge (\equiv \Cap)$で表わし$(\hat{\Theta}; \vee, \wedge)$を"アサイクロン束"と呼ぶ。これは極族Hの交わり全体$\tilde{H}$のなす最小元が(S_0^-, S_0^+)であるところの"Acycloid束"$(\tilde{H}; \sqcup, \sqcap)$と同型である。ループを含まないAcycloidではアサイクロン束とAcycloid束とは一致する。閉アサイクロン$\theta (\in \Theta)$はアサイクリックなトーナメントから作られるAcycloidにおける"半順序"の抽象概念であり，極大閉アサイクロンは"全順序"の抽象概念である。

Acycloid $\mathfrak{A} = (S, H)$は当然のことながらアサイクロン束$(\hat{\Theta}; \vee, \wedge)$と$(S_0^-, S_0^+)$又はAcycloid束$(\tilde{H}; \sqcup, \sqcap)$を与えれば定義される。

定理6.「アサイクロン束$(\hat{\Theta}; \vee, \wedge)$は原子的かつ双対原子的である。」

定理7.「アサイクロン束はJD束である。」

次元（0からの組式列の長さ）がiである閉アサイクロンの全体をΘ_iで表わす。極大閉アサイクロンはΘ_nであり，$\Theta_{n+1}=\{\iota\}$と約束する。Acycloid $\mathfrak{A}$が単純なときにはアサイクロン束$(\hat{\Theta}: \vee, \wedge)$において次数$\|\theta\|$が固有な次元関数を与える。

定理8.「Acycloid $\mathfrak{A}=(S,H)$においてζ，ζ^*をそれぞれ南極，北極として指定した極束$(H; \uparrow_\zeta, \downarrow_\zeta)$からAcycloid束$(H; \sqcup, \sqcap)$への写像$\varphi$，$\varphi^*$を

$$\varphi(\xi)=\xi \sqcap \zeta,\ \varphi^*(\xi)=\xi \sqcap \zeta^* \tag{45}$$

によって定義すれば，

$$\left.\begin{aligned}\varphi^*(\xi \uparrow_\zeta \eta) &= \varphi^*(\xi) \sqcup \varphi^*(\eta),\\ \varphi\ (\xi \downarrow_\zeta \eta) &= \varphi(\xi) \sqcup \varphi(\eta)\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

なる関係がある。」

線形不等式の理論における最も基本的な定理の一つと考えられているGordanの定理は通常次の二者択一の定理として述べられる。

Gordanの定理.「与えられた$m \times n$行列Aに対し$A\xi=0$，$\xi \geqq 0$が解を持つか，$\omega A>0$が解をもつかそのいずれか一方かつ一方のみが成立する。」

このGordanの定理はAcycloidにおいてはサイクルの定義より自明に次の形で述べられる。

定理9.「Acycloid $\mathfrak{A}=(S,H)$において与えられた任意の象限$\eta\in 3^S$に対して，$\eta\in H$であるか，$\xi\Subset\eta$となるサイクルξがあるか，そのいずれか一方，かつ一方のみが成立する。」

Gordanの定理は定理9において$\eta=\{+\}^S$にとった場合である。この定理はHが何も極の公理をみたさなくても成立する。したがってこの定理が意味をもつのはサイクルの定義が極とは独立に定義されたときである。

問題2.「Acycloid $\mathfrak{A}$をサイクルによって特徴づけよ，すなわち，サイクル公理系を確立せよ。」

半順序の線形拡大にならって$\theta\in\Theta$を含むような極大閉アサイクロン$\eta\in\Theta_n$（ループを含まないときには$\Theta_n=H$）をθの全拡大と呼び，θの全拡大の全体を"軌道(orbit)"と呼び，S^θで表わす。アサイクロイド束$(\hat{\Theta};\vee,\wedge)$において

$$\left.\begin{aligned}&\delta(\theta)=(\delta^-(\theta),\ \delta^+(\theta))\ (\theta\in\Theta):\\&\delta^\pm(\theta)=\{\mathrm{car}^\pm\theta-\mathrm{car}^\pm\theta' \mid \theta' K\theta\}\end{aligned}\right\}\quad(47)$$

（ここで$\theta' K\theta$はθ'がθの直前であることを表わす。）これは半順序のHasse図の辺の抽象概念である。$\delta(\theta)=\theta$となる$\theta\in\Theta$を"2部閉アサイクロン"と呼ぶ。これは有向2部グラフの抽象概念である。

一方 $\theta \in \Theta$ が $\theta' \Cap \theta \neq 0$ なる全ての $\theta' \in \Theta$ に対して

$$\delta(\theta') \Cap \theta \neq 0 \tag{48}$$

となるとき θ を "強閉アサイクロン (strongly closed acyclon)" という。これは弱順序 ω の補関係 $\bar{\omega}$ に対応した半順序の抽象概念であり，線形目的関数に対応した概念である。このように我々は有限集合E上の半順序($\subseteq E \times E$)に関連した諸概念の抽象化をAcycloid上で行うことができる。アサイクロン束の例として3元集合上の"半順序集合束(poset lattice)"の例をあげる。

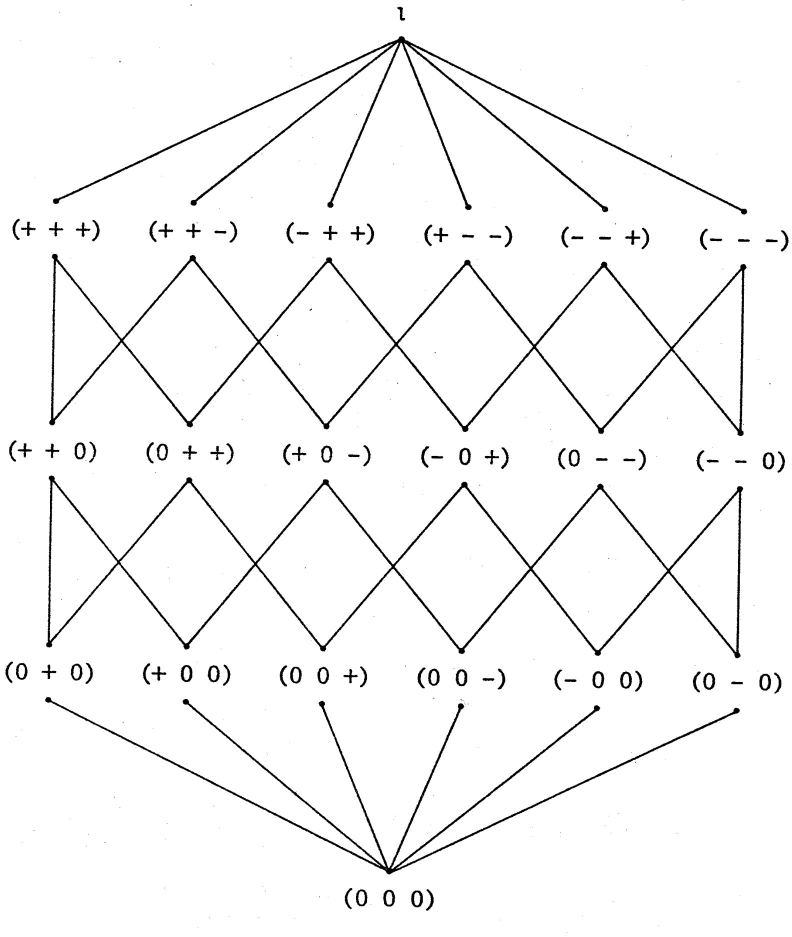

図3．アサイクロン束の例(半順序集合束).

5. Holotopeとコサイクル

Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$は単純で標準形で与えられているものとする。そのようにしても本質的な議論には影響がない。Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$を抽象凸多面体とみなしたとき，これを"Holotope"と呼ぶ。Holotopeと単純Acycloidは同一概念であり，HolotopeはAcycloidの極束のHasse図を定理4のように与えれば完全に決まる。

Holotopeの"面(face)"はAcycloidの標準形の極束$(\mathfrak{P};\uparrow,\downarrow)$における束としての区間でそれが再びAcycloid（ループを含むがそれは本質的ではない）の極束となっているものと定義する。特に"0次元面"は極束の点であり，"1次元面"は極束のHasse図の辺であって，"2次元面"はコードを持たない平行2k辺形である。

Holotopeの面の全体$\mathfrak{F}$はその極束の区間（に含まれる極の集合）の包含関係において最小元がϕ(−1次元面)，最大元が$\mathfrak{P}$であるような"半順序集合"$(\mathfrak{F},\leqq)$を作る。これを"面半順序集合(face poset)"と呼ぶ。一般にHolotopeの面の"次元"を面半順序集合$(\mathfrak{F},\leqq)$におけるHasse図において0次元面よりその面までの最短路の長さによって定義する。Holotopeそのものの次元をAcycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$の"次元"といい，dim $\mathfrak{A}$と記す。特殊なAcycloid$(S,2^S)$の次元は$n=|S|$である。

定理10. 「Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$ の次元は極束における各点の次数以下である；

$$\dim \mathfrak{A} \leqq \| \delta(\eta) \| \ (\eta=(\overline{X},X),\ X\in \mathfrak{P}) \qquad (49)$$」

有向マトロイドから作られるマトロイド的Acycloidにおいては面半順序集合($\mathcal{F}$,≦)はJD束となることが知られているが，一般には束とならない。しかし次の予想がある。

予想2. 「Holotopeの面半順序集合($\mathcal{F}$,≦)はJD的であり，Holotopeの次元は極束における各点の次数の最小値に等しい。

$$\dim \mathfrak{A} = \min\{\| \delta(\eta) \| \mid \eta=(\overline{X},X),\ X\in \mathfrak{P}\} \qquad (50)$$」

面半順序集合($\mathcal{F}$,≦)がJD的であればマトロイドと類似して"基(base)"の概念をAcycloidに導入できることになる。

予想3. 「Holotopeの面半順序集合($\mathcal{F}$,≦)はアサイクロン束の強閉アサイクロン全体がその包含関係に関して作る半順序集合と双対同型である。」

Holotopeの面で0次元面$[Z,Z]$を含むようなもの$[X,Y]$の全体が作る半順序集合($\mathcal{F}_Z$,≦)は極Zのまわりの抽象凸多面錐に対応した概念である。特に($\mathcal{F}_\phi$,≦)，($\mathcal{F}_S$,≦)はそれぞれ線形不等式系における"負領域"，"正領域"を表わしている。

極束($\mathfrak{P}$;↑,↓)の極$X\in\mathfrak{P}$と極$Y\in\mathfrak{P}$の間の区間を$[X,Y]$ ($X\subseteqq Y$)で表わすことにする。区間$[X,Y]$から$(X,\overline{Y})\in 3^S$への一対一の写像を考えると，Holotopeの0次元面$[X,X]$は

象限$(X,\bar{X})\in 3^S$に対応し，Holotopeそれ自身$[\phi,S]$は原点0に対応する。極束$(\mathfrak{F};\uparrow,\downarrow)$の面となる区間$[X,Y]$で極大のものを"ファセット(facet)"と呼ぶ。ファセットに対応した$\xi=(X,\bar{Y})\in 3^S$を"コサイクル(cocycle)"と呼び，$Y-X=\mathrm{car}^0\xi$を"超平面(hyperplane)"と呼ぶ。(Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{F})$がループを含む場合にはループの全体を$S_0$として$(Y-X)\cup S_0$を超平面と呼ぶ。)有向マトロイドの場合には$\mathrm{car}\,\xi$は"コサーキット(cocircuit)"であり，$\mathrm{car}^0\xi$は"超平面"となっている。したがってこの場合Holotopeのファセットは全部でコサーキットの数の2倍だけある。

定理11. 「有向マトロイド$\mathfrak{M}$から作られるAcycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{F})$の面束において面になっている区間$[X,Y]$に対応した象限$\xi=(X,\bar{Y})$の符号を無視して，$\mathrm{car}^0\xi$の全体が包含関係に関して作る束が$\mathfrak{M}$のマトロイド束である。」

有向マトロイド，したがって実行列やグラフにおけるコサイクルの元の符号はその台集合を与えれば決まり，その符号は極束$(\mathfrak{F};\uparrow,\downarrow)$の区間に対応して決まっていたのである!! この事実は幾何学的に非常に重要な意味を持っている。グラフではコサイクル，すなわちカットセットがどのような構造をしているかが実際に図の上で見ることができるけれども実行列においてどのような構造をしているかは見れなかった。

定理12.「Holotopeの下面$[X, Y]$と上面$[\overline{Y}, \overline{X}]$は同型であって，全ての極$Z \in [X, Y]$に対して区間$[X, Y]$における$Z$の反極$Z^-$から全区間$[\phi, S]$における$Z$の反極$Z^*$へ至る組成列に含まれる射線は負方向に通るのが$X$，正方向に通るのが$\overline{Y}$であって，コサイクル$(X, \overline{Y})$は下面と上面をつなぐ組成列における射線の向きとみなせる。」

問題3.「Acycloidをコサイクルによって特徴づけよ，すなわちAcycloidのコサイクル公理系を確立せよ。」

Acycloidはグラフの場合と同様にマトロイドのような自己双対な概念ではない。したがってサイクルとコサイクルは同じ公理系をみたすものではない。例えばThomsenグラフ$K_{3,3}$のアサイクリックな向きづけの全体はグラフ的Acycloidであるのに対し強連結な向きづけの全体はグラフ的Acycloidではなく行列的Acycloidであることに注意しよう。

5元集合$S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$上のFukudaのAcycloid $\mathfrak{A}=(S, H)$を図4に示す。極族Hの射線3に関する単位射影は

$$\left.\begin{aligned} H \div \{3\} = \{&(++++), (-+++), (+++-), (+-++), \\ &(----), (+---), (---+), (-+--)\} \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

となる。ここで$(-+++)$から$(-+--)$への単位反向による鎖は存在しないから，これはAcycloidとはならない。したがってFukudaのAcycloidは有向マトロイドでは表現できない。(11)

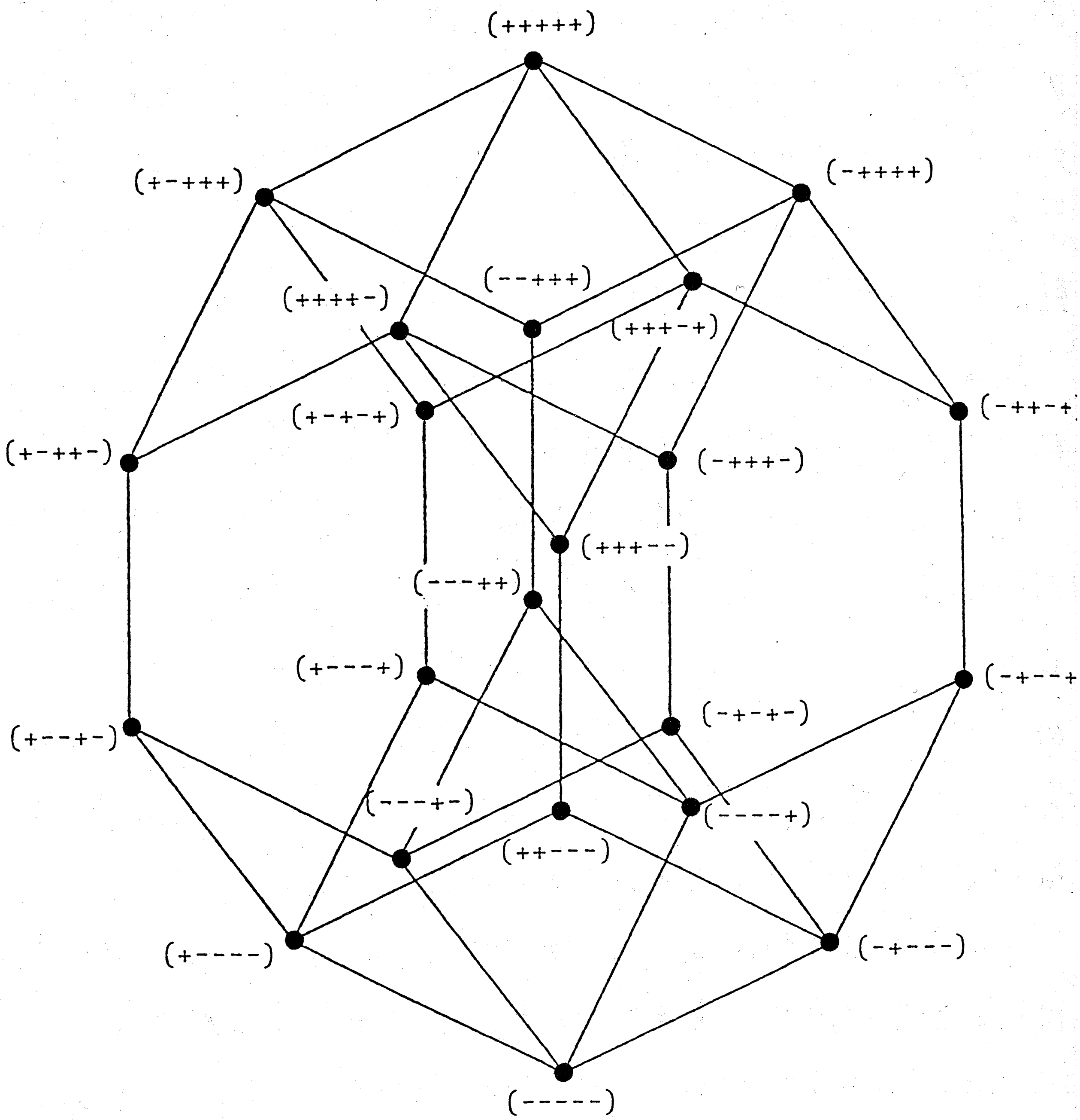

図4. FukudaのAcycloidの極束.

FukudaのAcycloidではいろいろ奇妙な現象が起る。$\mathcal{A}$のサイクルは全部で次の8個である。

$$\left.\begin{array}{l}(++-+0),(++-0+),(+0-++),(0+-++),\\(--+-0),(--+0-),(-0+--),(0-+--).\end{array}\right\}\quad(52)$$

ここで射線3は全てのサイクルに含まれていることに注目しよう。このようなことはマトロイドでは(セルフ)ループに対してしか起り得ない。

$\mathcal{A}$の面半順序集合$(\mathcal{F},\leqq)$のHasse図を図5に，3つの極に関する面半順序集合$(\mathcal{F}_X,\leqq)$のHasse図を図6～8に示してある。ここでは面の区間$[X,Y]$を$(X,\bar{Y})\in 3^S$で示してある。これらは全てJD的半順序集合であるが，$(\mathcal{F}_{\{4,5\}},\leqq)$は束になっていない，したがって$(\mathcal{F},\leqq)$も束とはなっていないことが分かる。なおFukudaのAcycloidは明らかに3次元であるが射線3を簡約したもの$\mathcal{A}/\{3\}$は4元のBoole束と同型であり4次元であることにも注目されたい。

有向マトロイドにおいてはサイクルξとコサイクルηは常に直交しているけれども，FukudaのAcycloidにおいては例えばサイクル$(++-+0)$とコサイクル$(000-+)$はお互に直交していない。その他コサイクル$(000-+)$の台集合$\{4,5\}$はサイクル$(00+++)$の台集合$\{3,4,5\}$の真部分集合となっている。

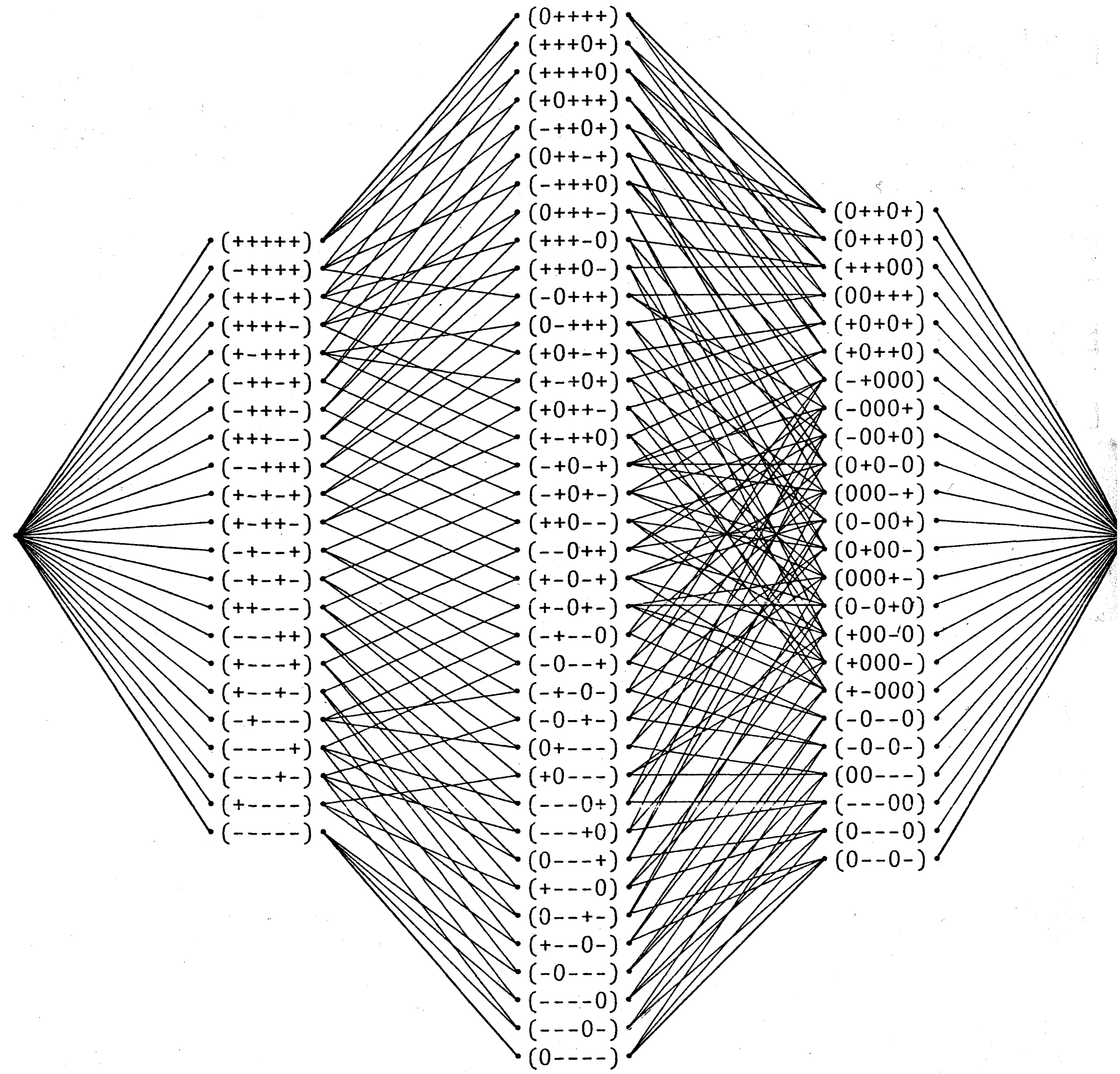

図5. FukudaのAcycloidの面半順序.
(ιが最小元, 0が最大元である)

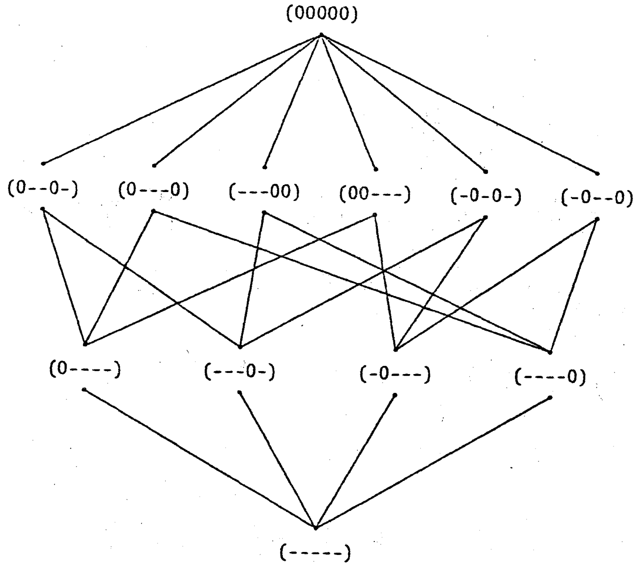
(00000)
(0--0-)
(0---0)
(---00)
(00---)
(-0-0-)
(-0--0)
(0----)
(---0-)
(-0---)
(----0)
(-----)

図6.

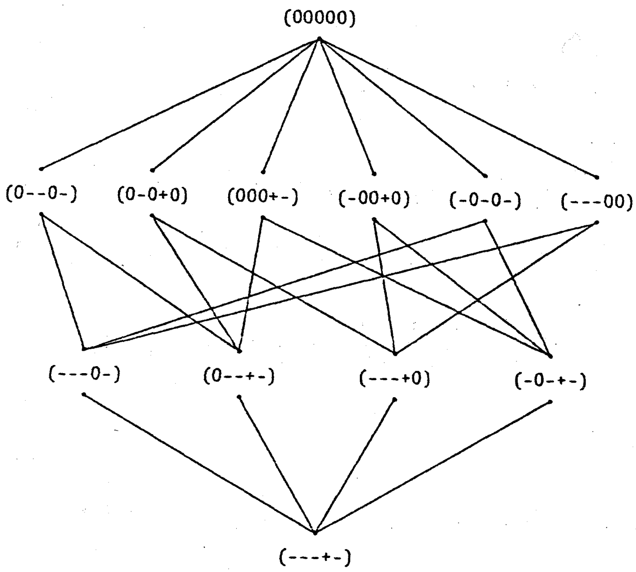
(00000)
(0--0-)
(0-0+0)
(000+-)
(-00+0)
(-0-0-)
(---00)
(---0-)
(0--+-)
(---+0)
(-0-+-)
(---+-)

図7.

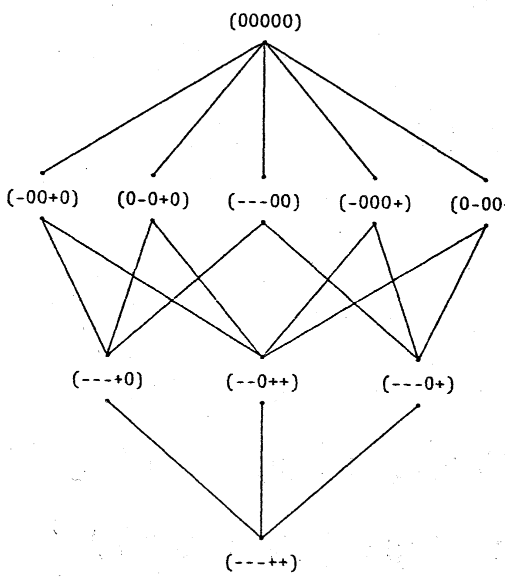
(00000)
(-00+0)
(0-0+0)
(---00)
(-000+)
(0-00+)
(---+0)
(--0++)
(---0+)
(---++)

図8.

6. Holometry の定義

$\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$を単純Acycloidとし，その閉アサイクロン族をΘとする。$\theta\in\Theta$ の全拡大の全体をS^{θ}と書き，θ の"軌道(orbit)"と呼ぶ。ι の軌道は$S^{\iota}=\phi$ と約束する。このとき

$$\{S^{\theta}\mid\theta\in\hat{\Theta}\}\quad(\hat{\Theta}=\Theta\cup\{\iota\})\tag{53}$$

は交わり束をなし，Acycloid束$\hat{\Theta}$と双対同型である。$\theta,\theta'\in\Theta$は

$$\theta\vee\theta'\notin\Theta\;(\Leftrightarrow S^{\theta}\cap S^{\theta'}=\phi)\tag{54}$$

のとき互に"双対素(coprime)"と呼ばれる。このとき，それぞれθ, θ'の全拡大τ,τ'でτとτ'が互に他の単位反向になっているとき，θとθ'は"隣接する(adjacent)"するという。例えば

$$\tau=(X,\overline{X}),x\notin X,\ \tau'=(X\cup\{x\},\overline{X}-\{x\})\tag{55}$$

とするとき

$$\theta\underset{x}{\rightarrow}\theta'\;(\Leftrightarrow\theta'\underset{x}{\leftarrow}\theta)\tag{56}$$

と書き，θはθ'に"x隣接する"といい，射線xをθとθ'の"隣接方向"と呼ぶ。

定理13.（隣接方向一意性定理）「Acycloid $\mathfrak{A}$の2つの閉アサイクロンθ, $\theta'\in\Theta$が双対素のとき，θとθ'が隣接するならば，その隣接方向xは唯1通りに限り，このとき

$$x\in\delta^{\pm}(\theta),\ x\in\delta^{\mp}(\theta')\ (\text{複号同順})\tag{57}$$

となる。」

Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\Theta)$ の閉アサイクロンの族 $\Pi\subseteq\Theta$ が次の公理(a),(b)を満たすとき $\mathcal{H}=(S,\Theta,\Pi)$ をAcycloid $\mathfrak{A}$ 上の"Holometry"と呼ぶ。[6]

Holometryの公理系：

(a) $\pi,\pi'\in\Pi,\ \pi\neq\pi'\Rightarrow\pi\vee\pi'\notin\Theta$,

(b) $S^{\wedge\Pi}=\bigcup_{\pi\in\Pi}S^{\pi}$.

$\pi\in\Pi$ をHolometry $\mathcal{H}$ の"基(base)"と呼び，Π を"基族(base family)"と呼ぶ。ここで基 $\pi\in\Pi$ はその枠 $\delta(\pi)$ で表現されているものとしてよい。公理(a),(b)が成立しているとき Π は $\wedge\Pi$ の"直交分割"であるという。Holometryの公理(a)より基の軌道同志は共通部分を持たないから基を点($\in V$)と考え，基同志の間に"隣接するか，しないか"によって2項関係 $W(\subseteq V\times V)$ を導入できる。しかもこのグラフの枝には隣接方向が一意に決められる。すなわち写像

$$\psi:W\to S \tag{58}$$

が存在する。こうして決められるグラフ $G=(V,W;\psi)$ をHolometry $\mathcal{H}$ の"Holograph"と呼ぶ。

Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\Theta)$ は単純であるから $\pi\in\Theta$ の符号を反転させたものを $\pi^*\in\Theta$ とするとき

$$\Pi^*=\{\pi^*\mid\pi\in\Pi\} \tag{59}$$

とおけば，$\Pi^* \subseteq \Theta$ であって

$$\mathscr{H}^* = (S, \Theta, \Pi^*) \tag{60}$$

は明らかに公理(a),(b) を満たし，$\mathfrak{A}$上のHolometryである。これを$\mathscr{H}$の"双対Holometry"という。これはマトロイドの双対の自然な一般化である。

定理14.「Holometry $\mathscr{H}=(S,\Theta,\Pi)$において，$\wedge\Pi \in \Theta$ の任意の全拡大 $\tau \in \Theta_n\,(=H)$ に対して基 $\pi \in \Pi$ が一意に存在して

$$\pi \Subset \tau$$

となる。逆に $\tau \in \Theta_n$ に対して $\pi \Subset \tau$ なる $\pi \in \Pi$ が存在するならば，

$$\wedge\Pi \Subset \tau$$

でなければならない。」

この定理14はHolometryの公理(a),(b) と同値である。閉アサイクロン $\wedge\Pi\,(\in\Theta)$ の枠 $\delta(\wedge\Pi)$ をHolometry $\mathscr{H}=(S,\Theta,\Pi)$ の"無限方向"といい，$\wedge\Pi=0$ のとき$\mathscr{H}$を"有界"なHolometry，$\wedge\Pi\neq 0$ のとき$\mathscr{H}$を"非有界"なHolometryという。定義より(S,Θ,H)もHolometryであるが，これを特に"Holotope"という。これは$\mathfrak{A}$上のHolometryの生みの親であって$\mathfrak{A}$上の有界なHolometry $\mathscr{H}=(S,\Theta,\Pi)$ は $\pi\in\Pi$ の軌道 S^{π} に対応したHolotopeの基を1つに"縮約(shrink)"することによって生成される。また $\theta\in\Theta$ に対して (S,Θ,S^{θ})

は非有界なHolometryであるが，これを“Holohedron”と呼ぶ。これは$\mathfrak{A}$上の非有界なHolometryの生みの親である。

定理15.「Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\Theta)$上の２つのHolometry $\mathcal{H}=(S,\Theta,\Pi)$と$\mathcal{H}'=(S,\Theta,\Pi')$に対して

$$(\wedge\Pi)\vee(\wedge\Pi')\in\Theta \tag{63}$$

のとき

$$\Pi\nabla\Pi'=\{\pi\vee\pi'\mid\pi\in\Pi,\pi'\in\Pi',\pi\vee\pi'\in\Theta\} \tag{64}$$

と定義すれば

$$\mathcal{H}\nabla\mathcal{H}'=(S,\Theta,\Pi\nabla\Pi') \tag{65}$$

もやはり$\mathfrak{A}$上のHolometryとなる。」

$\mathcal{H}\nabla\mathcal{H}'$を$\mathcal{H}$と$\mathcal{H}'$の“和(sum)”と呼ぶ。ここで$\mathcal{H}=\mathcal{H}'$のとき

$$\mathcal{H}\nabla\mathcal{H}'=\mathcal{H} \tag{66}$$

となることに注意する。

定理16.「Holometry $\mathcal{H}=(S,\Theta,\Pi)$において$(\wedge\Pi)\wedge\omega=0$なる強閉アサイクロン$\omega$が与えられたとき$\pi\wedge\omega=0$なる基$\pi\in\Pi$をgreedyに求めることができる。」

このように“グラフ的Holometry”[(2)]において成立する大部分の定理は一般のHolometryにも一般化できる。特に全ての基が２部閉アサイクロンになっているようなHolometryはマトロイドの抽象概念であって自己双対な基の交換公理に対応した“相互反向公理”が成立するようなシステムとなる。

7. ネットワーク・フロー，線形計画，Greedy System

ネットワーク・フローの理論における最小費用流問題はグラフ上だけでなく実行列の上にも“凸多面体計画”として一般化できることは著者により示された(12)。これは実行列まではベクトルの“重ね合わせの原理”が適用できることが本質的である。最大流問題のLPとしての双対問題である最小カット問題はマトロイドというよりはAcycloid的概念であって，その証拠にはバイナリ・マトロイドにおいては要素数（又は長さ）最小のコサイクルを求めることが現在のところできない。しかし凸多面体に類似した構造をもつAcycloidでは次のような“最小カット問題”を解くことができる可能性がある。

問題4．「Acycloid $\mathfrak{A}=(S,\mathfrak{P})$ の射線 $x\in S$ に対して実区間 $[c_x^-, c_x^+]$ ($c_x^-\leqq 0\leqq c_x^+$) が与えられたとき，指定された $g\in S$ を正の向きに含むコサイクル $\xi=(X,\overline{Y})$ で

$$\min_{\xi}\left\{\sum_{x\in X}c_x^- + \sum_{y\in\overline{Y}}c_y^+ \;\middle|\; g\in\overline{Y}\right\} \tag{67}$$

を実現するものを求めよ。」

この問題を $N=(\mathfrak{A};c^{\pm},g)$ と書くことにする。全ての $g\in S$ に関する式(67)の最小値はHolotopeの“厚さ(thickness)”と考えられる。

次に線形計画問題（LP）のAcycloid上への抽象化について

考える。Acyclid $\mathfrak{A}=(S,H)$と相異る射線$f,g\in S$が指定されたシステムを$P=(\mathfrak{A};f,g)$と書く。ここでfはLPの目的関数に，gは定数1に対応する概念である。負領域を可能領域とすれば$\{-\}^{S-\{f\}}$がLPの可能領域に対応した概念である．極束$(H;\to)$の南極を0，北極をIで表わす。gに関する南半束$H_g^-(\ni 0)$，北半束$H_g^+(\ni \mathrm{I})$はaffine空間を表わしている。さて可能領域が存在するとして，$\mathfrak{A}/\{f\}$におけるファセット$[0,\xi']$に対応した$\mathfrak{A}$の極のうち，それが1つなら問題ないが,2つある場合にはJordanカット$C(f)$の下の方，すなわちH_f^-に属するものをξとする。これは一意に決まり，可能領域の端点に対応する。このような端点ξの全体をFとする。このとき明らかに

$$F\subseqq H_g^- \tag{68}$$

となっている。

gに関する南半束H_g^-の極大な点の全体を$\check{H}_g^-$で表わし，そのうちξよりも上にある極大点の全体を$\check{H}_g^-(\xi)$と書くことにする。このとき

$$\xi\in\check{H}_g^- \Rightarrow \check{H}_g^-(\xi)=\{\xi\} \tag{69}$$

であって，このようなξはaffine空間の無限遠点を表わす。端点$\in F$が

$$\check{H}_g^-(\xi)\subseqq H_f^- \tag{70}$$

を満たしているとき，端点ξは“最適(optimal)”であるといい，このときさらに

$$\xi \in \check{H}_g^-(\xi) \tag{71}$$

ならば“非有界(unbounded)”という。(通常は非有界なときは最適とはいわない。)したがってAcycloid$\mathfrak{A}$へのLPの一般化は式(70)を満たす可能領域$\{-\}^{S-\{f\}}$の端点$\xi \in F$を見い出すことである。このような問題を“Acycloid計画”，又は“Holotope計画”と呼び，$P=(\mathfrak{A};f,g)$で表わす。

問題5．「Holotope計画$P=(\mathfrak{A};f,g)$を解くための算法を与えよ。」

最後にハイパーマトロイドの理論において重要な役割を果たすところの“劣模関数”の抽象化について述べよう。

台集合E上のハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathcal{S})$の階数関数$\rho: 2^E \to R$は定義域がEの部分集合である,いわゆる“集合関数”であるが，これは基本的には台集合Eの2分割$(U|\bar{U})$，すなわち点集合E上のトーナメントのカットセット，したがって超平面に対応したものである。一般に行列的Acycloid上のHolometryでユークリッド凸多面体$\mathcal{S}$で表現できるもの，すなわち“Greedy System”を決定するためには集合関数にかわって“ファセット関数(facet function)”を決めなくてはならない。

いま $m \times n$ 実行列 $A: E \times S \to R$ が与えられたとして，A の列ベクトルを射線集合に持つAcycloid $\mathcal{O}\!\mathcal{l} = (S, \mathcal{R})$ を考える。簡単のため

$$\mathrm{rank}\, A = |E| \ (= m) \tag{72}$$

とすれば，

$$\dim \mathcal{O}\!\mathcal{l} = \mathrm{rank}\, A$$

である。$\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ のHolotopeのファセット〔X, Y〕に対応した超平面 Y−X に含まれる全ての射線ベクトルと直交するベクトル $d \in R^E$ でコサイクル $\xi = (X, \bar{Y})$ の X に属する射線ベクトルとの内積が非負，$\bar{Y}$ に属する射線ベクトルとの内積が非正となるものが式(72)より正の定数倍を除いて一意に決まる。これはY−X の射線を全て縮約したときの1点となってしまうファセット〔X, Y〕のまわりの尖凸多面錐と反対の方向に d をとることを意味する。このときファセット〔X, Y〕を下面と考えたときの上面〔$\bar{Y}, \bar{X}$〕には $-d \in R^E$ が対応する。こうして $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ のHolotopeの全てのファセットに一意に対応した列ベクトルの全体（を表わす行列）をDとすれば，行列 A の列ベクトルが作るマトロイドの"初等的コサイクル"の行ベクトルの全体（を表わす行列）を Q として

$$D = \{ d \in R^E \mid d^t A = -\xi,\ \xi \in Q \} \tag{73}$$

と書ける。このとき凸多面体

$$\mathcal{L} = \{x \in R^E \mid d^t x \leqq \rho[d]\ (d \in D)\} \tag{74}$$

の全ての稜がAの列ベクトルだけに限られるならば $\mathcal{G} = (E, \mathcal{L})$ を "Greedy System" と呼ぶ(5)。ここで $\mathcal{L}$ の支持面関数 $\rho[d]$ を(一般化された)"階数関数(rank function)"と呼び,

$$\rho^{\#}[d] = -\rho[-d] \tag{75}$$

を(一般化された)"不足度関数(deficiency function)"と呼ぶ。このようなGreedy Systemでは $\mathcal{L}$ の任意の端点からAの列ベクトルの方向にだけ端点をたどって，すなわち稜だけを端点から端点へたどって，しかも同一方向の稜は高々1個だけ通って線形目的関数 $c^t x$ を最適にすることができる．すなわち

$$\max\{c^t x \mid x \in \mathcal{L}\} \tag{76}$$

をgreedyに求めることができるのである。

Aがもし E を点集合に持つトーナメントの点枝接続行列(ただしベクトルの向きと合わせて始点が－で終点が＋とする)，すなわち S がトーナメントの枝集合のときには $\mathrm{rank}\,A = m-1$ でHolotopeの次元は $m-1$ である。このとき下面 $[X, Y]$ と直交するベクトルは $\partial^+\xi$ (すなわちXの終点と $\overline{Y}$ の始点の集合)を U, $\partial^-\xi$ (すなわちXの始点と $\overline{Y}$ の終点の集合)を $\overline{U}$ とするとき χ^E だけ加減する自由度も含めて

$$\alpha\chi^U + \beta\chi^{\overline{U}} \tag{77}$$

と書ける。そこで“カット$(U|\overline{U})=(\partial^+\xi|\partial^-\xi)$”(これは“象限”とは異なることに注意する)とベクトル

$$d=\chi^{U}-\chi^{\overline{U}} \tag{78}$$

とを対応させれば

$$\rho(U)=\rho[d] \tag{79}$$

とおくことによってハイパーマトロイドの階数関数が得られる。この$\rho(U)$がGreedy Systemを決定する，すなわち式(74)の$\mathcal{L}$が基多面体となるための必要十分条件はρが劣模不等式:

$$\rho(U)+\rho(V)\geqq\rho(U\cup X)+\rho(U\cap V) \tag{80}$$

を満たすことである。

問題6.「Greedy System $\mathcal{G}=(E,\mathcal{L})$の階数関数$\rho[d]$ $(d\in D)$が満たすべき不等式を決定せよ。」

式(73)のDは行列Aの1つの基底Bに対応する部分をA_B，全ての初等的コサイクルからなる行列Qの列が基Bに対応する部分をQ_Bと書くとき，より具体的に求められて

$$-D^t=Q_B\cdot A_B^{-1} \tag{81}$$

と書ける。これがGreedy Systemの(一般化された)“ヘドロン”$\mathcal{L}$の面と直交する法線方向(外向きを正にとってある)に対応しているのである。なおハイパーマトロイドと同様に

$$\max\{d^tx\mid x\in\mathcal{L}\}=\rho[d], \tag{82}$$

$$\min\{d^tx\mid x\in\mathcal{L}\}=\rho^{\#}[d] \tag{83}$$

なる関係が成立していることを注意しておく。

8. あとがき

グラフ，行列，マトロイド，ハイパーマトロイドといった線形独立・従属の概念の抽象化の系列はついにHolometryという概念を生んだが，Holometryではベクトルのかわりに半順序が重要な役割を果たす。一方特別なグラフとみなされていた半順序の性質を究明することにより，アサイクリック・グラフの推移的閉包である半順序，尖凸多面錐（線形不等式系における矛盾・無矛盾），有向マトロイドの球面系における非環反向といった非環・循環の概念の抽象概念が存在することが明らかとなり，そのようなシステムが持つ共通の性質を“反向公理”として確立し，その抽象概念を“Acycloid”と命名した。いわゆる“象限”は直交座標系に対応した概念であるが，これに対して多面座標系に対応した概念として“多面象限”あるいは球面座標系における“球面象限”なるものが考えられる。Acycloidはこのような象限の概念の抽象化ともみなせる。はじめ半順序に関連して生れたHolometryも自然とAcycloid上へと一般化される。Acycloidは有向マトロイドの球面系（とその双極概念）の抽象化であると同時にヘドロンの理論の抽象化であり，有向マトロイド上の有向マトロ

イド計画やヘドロン上のgreedy算法はそれぞれ線形計画の第二段階や第一段階の抽象化にもなっていることはきわめて興味深い事実である．一見異るように見えたそれら2つの理論を統一的に眺めることによってそれらは互に影響し合って新たな展開が大いに期待できる．

例えばAcycloidやその上のHolometry の理論は線形計画にも新たな知見を与える。すなわち

定理17. 「尖凸多面体の任意の端点から線形目的関数を最適にする端点へ同一方向の稜は2度通ることなく行くことができる」

この事実は退化している尖凸多面体において，退化した稜を考えても話は全く同様であるから単体法の各段階においてそれまでに通って来た稜の方向が張る尖凸多面錐と（端点以外に尖凸多面体が）共通部分を持たないような端点に常に移るように改良することにより，平行な稜を2度とは通らない算法を得ることができる。

また劣模関数 $P : E \to R$ の上限／下限モジュラー関数を $\check{P}/\hat{P}$ とするとき

$$\max_{X \subseteq E} \{ |X| \mid P(X) = \check{P}(X) / \hat{P}(X) \} \tag{84}$$

を求める問題をハイパーマトロイド $\mathfrak{M} = (E, P)$ の"マッチング／双対マッチング問題"と呼ぶ。Lovász による2−ポリ

マトロイド上の"マトロイド・マッチング"の問題は我々のマッチング問題のきわめて特別な場合である。これらの問題は劣模関数と密接不可分な関係がある問題に見える。しかし実際にはそうではなく次の問題がマッチングの問題とその双対の一般化である。

問題7.「グラフ的Holometry $\mathcal{H}=(E,\Pi)\equiv(S,\Theta,\Pi)$（Sは E上のトーナメントの枝集合，ΘはE上の半順序の全体）において，（基である）半順序のソース／シンクで大きさが最大のものを持つ基($\in\Pi$)を求めよ。」

こうしてgreedy算法がHolometry上に一般化されたように，劣模関数やベクトルが重要な役割を果たしているかに見える問題でもそのような概念は不必要であるものがかなりあることが分かり，Holometryを通して何が本質であるかがより良く見えるようになるのである。最後に新概念にふさわしい"Acycloid"，"Acyclon"，"Holometry"という新語を御教授いただいた東京大学の伊理正夫教授に心から感謝します。ここでHolometryという単語は本来理論体系の名称であるが射影幾何にならって対象そのものにも用いたことをおことわりしておく。

文献

(1) 冨澤信明：ヘドロン空間の理論と応用，数理解析研究所講究録471（グラフ理論とその応用），183~229(1982-10).

(2) 冨澤信明：超空間論(XXI)－Holometryについて，信学技報CAS 83-142 (1983-11).

(3) 冨澤信明：超空間論(XVI)－ヘドロンの構造について，信学技報CAS 82-174(1983-03).

(4) 冨澤信明：超空間論(XVII)－擬順序集合上のハイパーマトロイド，信学技報CAS 83-6 (1983-05).

(5) 冨澤信明：超空間論(XXIII)－Greedy Systemについて，信学技報 CAS 83-201 (1984-02).

(6) 冨澤信明：超空間論(XXIV)－Acycloid上のHolometry，信学技報CAS 83-220 (1984-03).

(7) 冨澤信明：超空間論(XX)－擬順序集合束の構造と半順序集合の基本分割について，信学技報CAS 83-141 (1983-11)

(8) 冨澤信明：超空間論(XXII)－超幾何について，信学技報CAS 83-160 (1983-12).

(9) 冨澤信明：Holometryの理論(I)－Acycloidについて，信学技報，CAS 84-14 (1984-05).

(10) C.L. Lucchesi & D.H. Younger: A Minimax Theorem for

Directed Graphs, J. London Math. Soc. (2), 17, 369－374 (1978).

(11) 福田公明：私信 (1984-02).

(12) 冨澤信明：ネットワーク・フローから凸多面体計画へ, 信学技報 CAS 83-126 (1983-09).