

# グラフの枝間の距離(電氣的距離)とその応用について

山形大工 佐藤公男 (Kimio Sato)

山形大工 小野寺力男 (Rikio Onodera)

山形大工 青木ミヨ子 (Miyoko Aoki)

グラフの枝間の距離はグラフ理論的には、ある枝から他の枝までたどるのに必要とする点の最小個数、すなわちその線グラフの対応する二点間の距離として定義されるが<sup>[1]</sup>、本文で扱う距離は、グラフ全体の中で2つの枝が電氣的にどの程度の影響を及ぼし合うか、どの程度の関係を持っているかを表す量として使用しようとするものである。

グラフ  $G$  の枝集合を  $E(G) = \{x, \lambda, \mu, \dots\}$  とする。  $G$  の複雑さ(木の数)を  $T$ 、  $G$  の枝  $x$  を開放、枝  $x$  を短絡したグラフの複雑さを  $T(\bar{x})$  とかく。また、  $G$  の各枝に  $1[\Omega]$  の抵抗素子を組

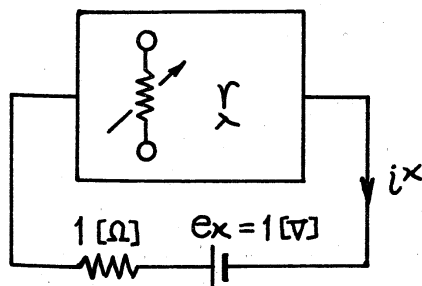


図1 正規回路

込んだいわゆる正規回路では  $1[V]$  の電圧源を挿入した枝  $x$  の電流は

$$i_x = \frac{T(\bar{x})}{T} \quad (1)$$

と表すことができる。<sup>[2]</sup>

図1の正規回路において、枝入の抵抗 $\lambda = 1[\Omega]$ が変化したときに電流 $i^x$ に与える影響の度合を $\lambda$ から入までの電氣的距離と考え、理論的に次のように定義する。すなわち、影響の受け易いもの程距離が小さいとみて、 $\lambda = 1$ における $i^x$ の傾き(絶対値)の逆数により、距離 $d(\bar{x}, \lambda)$ を

$$d(\bar{x}, \lambda) = \left| \frac{di^x}{d\lambda} \right|_{\lambda=1}^{-1} \quad (2)$$

と定義する。ところで、(1)式を $\lambda$ を含むものと含まないものとに分割して表示すれば、

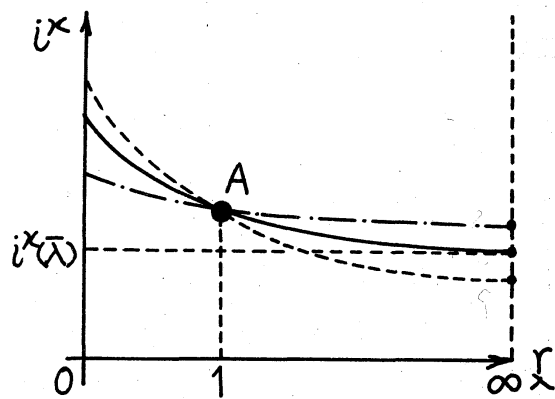
$$i^x = \frac{T(\bar{x})}{T} = \frac{T(\bar{x}, \lambda)\lambda + T(\bar{x}, \infty)}{T(\lambda)\lambda + T(\infty)} \quad (3)$$

となり、これを(2)式に代入することにより $d(\bar{x}, \lambda)$ は

$$d(\bar{x}, \lambda) = \left| \frac{T^2}{T \cdot T(\bar{x}, \lambda) - T(\bar{x})T(\lambda)} \right| \quad (4)$$

のように表すことができる。しかし、この理論的定義式では実用上複雑で不便であるから、 $d(\bar{x}, \lambda)$ を便宜上以下のように考えることにする。

図2に示すように、 $i^x$ は $\lambda$ の減少関数であり、どのような入



を選んでも必ず点A( $\lambda = 1, i^x = i^x(1)$ )を通る。図2  $\lambda$ による $i^x$ の変化

$T(\bar{x})/T$  )を通るから, 点Aにおける傾き  $|d\bar{x}/d\bar{r}|$  が大きい程  
入開放( $\bar{r}=\infty$ )時の $\bar{x}$ の電流  $\bar{i}(\bar{r})$  が小さいとみなすことがで  
きる。すなわち, (2)式における傾きの逆数の大きさを  $\bar{i}(\bar{r})$  に  
対応させることができ, 実用上の距離の計量として

$$d(\bar{x}\bar{\lambda}) \triangleq \bar{i}(\bar{\lambda}) = \frac{T(\bar{x}\bar{\lambda})}{T(\bar{\lambda})} \quad (5)$$

なる値を使い, これを開放距離または単に距離と呼ぶ。但し,  
 $d(\bar{x}\bar{x})=0$  は自明だから  $T(\bar{x}\bar{x})=0$  とする。(5)式からも明らか  
のように, 距離  $d(\bar{x}\bar{\lambda})$  は複雑さ  $T(\bar{\lambda})$ ,  $T(\bar{x}\bar{\lambda})$  の計算(G法)ある  
いは正規回路における入開放時の電流  $\bar{i}(\bar{r})$  または電圧源の両  
端からみた内部コンダクタンス  $\bar{g}(\bar{r})$  の測定・計算(E法)によ  
って求めることができる。[3]

$$\text{【定理1】} \quad 0 \leq d(\bar{x}\bar{\lambda}) \leq 1 \quad (6)$$

(証明) (5)式より  $d(\bar{x}\bar{\lambda})$  は 0, 1 間の値をとることは明らか。  
下界は  $d(\bar{x}\bar{x})=0$  また  $\bar{x} \neq \bar{\lambda}$  でも  $\bar{x}$  と  $\bar{\lambda}$  で  $G$  のカットセットを  
なすとき。上界は  $\bar{x}$  自身が自閉枝をなすとき。■

このように, どんなグラフ(正規回路)においても  $d(\bar{x}\bar{\lambda})$   
は必ず 0 と 1 の間に収まるので(5)式による距離の定義は以下  
の議論において極めて取り扱いやすい結果を与えている。

【定理2】 グラフ  $G$  の直列枝を  $\lambda_1$ , 並列枝を  $\lambda_2$  としたとき  
 $d(\bar{x}\lambda_1)$ ,  $d(\bar{x}\lambda_2)$  はそれぞれ等しい(図3)。■

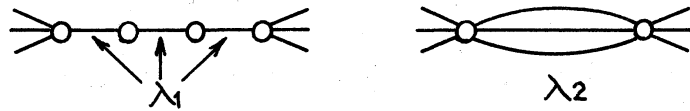


図3 直列枝, 並列枝

【定理3】 完全グラフ  $K_n$  ( $n \geq 4$ ) において, 枝  $x$  の隣接枝を  $\lambda_1$ , 非隣接枝を  $\lambda_2$  としたとき

$$d(\bar{x}\lambda_1) = \frac{(n-1)(n-3)}{n-2}, \quad d(\bar{x}\lambda_2) = \frac{n-2}{n} \quad (7)$$

となる(図4)。

(証明)  $K_n$  において, 任意の1枝および2枝を開放したグラフの複雑さは

$$T(\bar{\lambda}_1) = T(\bar{\lambda}_2) = (n-2)n^{n-3}$$

$$T(\bar{x}\lambda_1) = (n-1)(n-3)n^{n-4}, \quad T(\bar{x}\lambda_2) = (n-2)^2 n^{n-4}$$

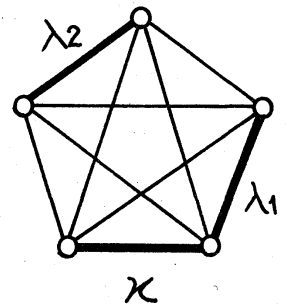
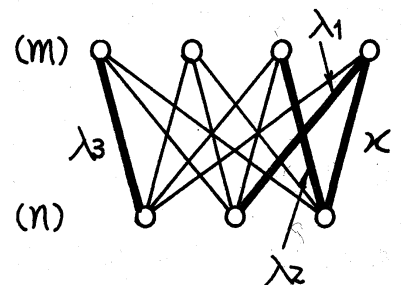
であり, これらを(5)式に代入すればよい。■

【定理4】 完全二部グラフ  $K_{m,n}$  ( $m \geq n \geq 2$ ) において, 枝  $x$  の  $m$  側点共有隣接枝を  $\lambda_1$ ,  $n$  側点共有隣接枝を  $\lambda_2$ , 非隣接枝を  $\lambda_3$  としたとき

$$d(\bar{x}\lambda_1) = \frac{(m-1)(n-2)}{m(n-1)}, \quad d(\bar{x}\lambda_2) = \frac{(n-1)(m-2)}{n(m-1)}$$

$$d(\bar{x}\lambda_3) = \frac{mn(m-2)(n-2) + m(m-2) + n(n-2)}{mn(m-1)(n-1)} \quad (8)$$

となる(図5)。

図4  $K_n$ 図5  $K_{m,n}$

(証明)  $K_{m,n}$ において, 任意の1枝および2枝を開放したグラフの複雑さは

$$T(\bar{\lambda}_1) = T(\bar{\lambda}_2) = T(\bar{\lambda}_3) = (m-1)(n-1)m^{n-2}n^{m-2}$$

$$T(\bar{x}\bar{\lambda}_1) = (m-1)^2(n-2)m^{n-3}n^{m-2}$$

$$T(\bar{x}\bar{\lambda}_2) = (n-1)^2(m-2)n^{m-3}m^{n-2}$$

$$T(\bar{x}\bar{\lambda}_3) = \{mn(m-2)(n-2) + m(m-2) + n(n-2)\}m^{n-3}n^{m-3}$$

と得られ, これらを(5)式に代入すればよい。■

これまで, 本文では「距離」という言葉をただ単に用いてきたが, 数学的には集合  $X$  の2つの要素  $x, y$  に対して定義された関数  $d(x, y)$  が次の3つの公理:

$$(i) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ で等号の必要十分条件は } x = y$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(iii) \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

を満足するとき,  $d(x, y)$  を  $x$  と  $y$  の距離といい,  $X$  と  $d$  の対  $(X, d)$  は距離空間といわれる。ところが, (5)式によって定義された距離  $d(\bar{x}\bar{\lambda})$  については, 一般のグラフに関する限り少なくとも公理(i), (ii)を満足しないことが多いので,  $d$  のもとで  $E(G)$  は距離空間を作るては限らない。但し, ある特定のグラフでは以下のように距離空間となる場合がある。

【定理5】 完全グラフ  $K_n (n \geq 4)$ , 完全二部グラフ  $K_{m,n} (m, n \geq 3)$  の枝集合  $E(K_n), E(K_{m,n})$  は  $d$  のもとで距離空間を作る。

(証明)  $K_n$ の場合: 公理(i)  $n \geq 4$  に対して成立。(ii) 明らか。

(iii) 定理3より  $d(\vec{x\lambda_1}) = (n-1)(n-3)/n(n-2)$ ,  $d(\vec{x\lambda_2}) = (n-2)/n$  であり  
 $d(\vec{x\lambda_1}) - d(\vec{x\lambda_2}) = -1/n(n-2)$  故  $d(\vec{x\lambda_1}) < d(\vec{x\lambda_2})$ 。(iii) が成立するか  
 どうかは  $d(\vec{x\lambda}) + d(\vec{x\mu})$  の最小なる場合と  $d(\vec{x\mu})$  の最大なる場  
 合 ( $K_n$  では,  $\kappa$  と  $\lambda$ ,  $\lambda$  と  $\mu$  が隣接,  $\kappa$  と  $\mu$  が非隣接の場合  
 ) について  $\lambda$  の大小を比較してみれば十分である。

$$\begin{aligned} & \{d(\vec{x\lambda}) + d(\vec{x\mu})\}_{\min} - \{d(\vec{x\mu})\}_{\max} \\ &= \frac{2(n-1)(n-3)}{n(n-2)} - \frac{n-2}{n} = \frac{n^2-4n+2}{n(n-2)} > 0 \quad (n \geq 4) \end{aligned}$$

従って, 全ての  $\kappa, \lambda, \mu$  について成立する。

$K_{m,n}$ の場合:  $m \geq n \geq 3$  としても一般性は失われず。公理(i)  
 $n \geq 3$  に対して成立。(ii) 明らか。(iii) 定理4より

$$\begin{aligned} d(\vec{x\lambda_1}) &= (m-1)(n-2)/m(n-1) \\ d(\vec{x\lambda_2}) &= (n-1)(m-2)/n(m-1) \\ d(\vec{x\lambda_3}) &= \{mn(m-2)(n-2) + m(m-2) + n(n-2)\}/mn(m-1)(n-1) \end{aligned}$$

であり, これらの大小関係は  $d(\vec{x\lambda_1}) \leq d(\vec{x\lambda_2}) \leq d(\vec{x\lambda_3})$  となる。

これより,  $d(\vec{x\lambda}) + d(\vec{x\mu})$  の最小値は  $\kappa$  と  $\lambda$  が  $m$  側隣接,  $\lambda$  と  
 $\mu$  が  $n$  側隣接 (または  $\lambda$  の逆) のときで,  $d(\vec{x\mu})$  の最大値は  
 $\kappa$  と  $\mu$  が非隣接のときであり,  $\lambda$  の結果

$$\{d(\vec{x\lambda}) + d(\vec{x\mu})\}_{\min} - \{d(\vec{x\mu})\}_{\max}$$

$$= \left\{ \frac{(m-1)(n-2)}{m(n-1)} + \frac{(n-1)(m-2)}{n(m-1)} \right\} - \frac{mn(m-2)(n-2) + m(m-2) + n(n-2)}{mn(m-1)(n-1)}$$

$$= \frac{(m-2)(n-2)}{(m-1)(n-1)} > 0 \quad (m \geq n \geq 3)$$

従って、全ての $\kappa, \lambda, \mu$ について成立する。■

又、他、距離空間を作る自明なグラフとして図6に示すような $m (\geq 3)$ 個の並列枝だけからなるグラフがあげられる。

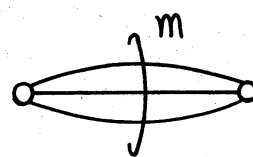


図6 並列枝

また、公理(i),(ii)だけに関しても、

全ての点の次数が3以上の枝対称なグラフについて成立する。

(iii)については現在検討中。

次の議論に進む前に、図7に示すグラフの枝1からの距離をG法(またはE法)によって求めておく。G法(5式)では

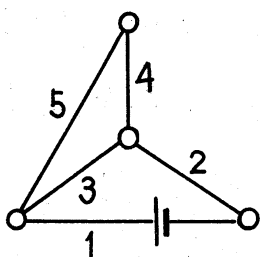


図7 例題

$$d(\vec{11}) = T(\vec{11})/T(\vec{1}) = 0/3 = 0$$

$$d(\vec{12}) = d(\vec{11}) = 0 \quad (\text{枝1と2は直列})$$

$$d(\vec{13}) = T(\vec{13})/T(\vec{3}) = 1/4 = 0.25$$

$$d(\vec{14}) = T(\vec{14})/T(\vec{4}) = 1/3 = 0.3$$

$$d(\vec{15}) = d(\vec{14}) = 0.3 \quad (\text{枝4と5は直列})$$

と得られる。また、E法を用いければ例えば $d(\vec{13}) = \dot{g}(\vec{3}) = 0.25$ ,  $d(\vec{14}) = \dot{g}(\vec{4}) = 0.3$ となりG法と同じ結果が得られる。

いま、グラフGの枝 $\kappa$ から等距離にある枝同士を線(また

は面)で結んだとき, その線(面)を等距離線(面)といい, このようにして得られる図形のことを等距離地図と呼ぶことにする。これは一般の地図の等高線という概念に対応させたものである。例えば, 図7のグラフでは, 枝1からの等距離地

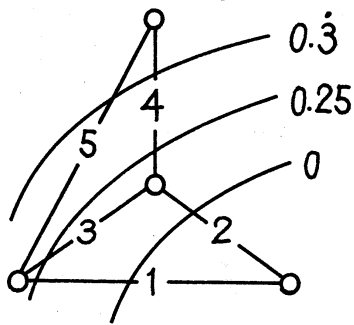


図8 等距離地図

図は図8のように描くことができる。

但し, 枝の距離は枝の番号が記入されている位置の次にくる等距離線の値をとるものと約束する。従って, 地図の作製上注意すべき点は枝番号と等距離

線の位置関係だけであって, 線の形は

特別問題とはならない。次に, 図9に示す格子グラフ  $L_{3 \times 4}$  では, G法による計算の結果, 枝1からの等距離地図は図10

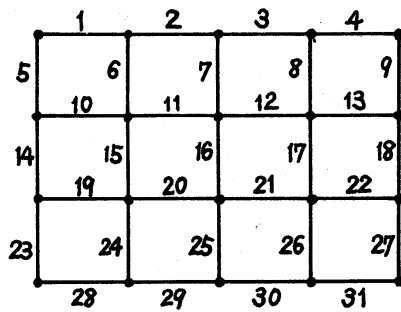
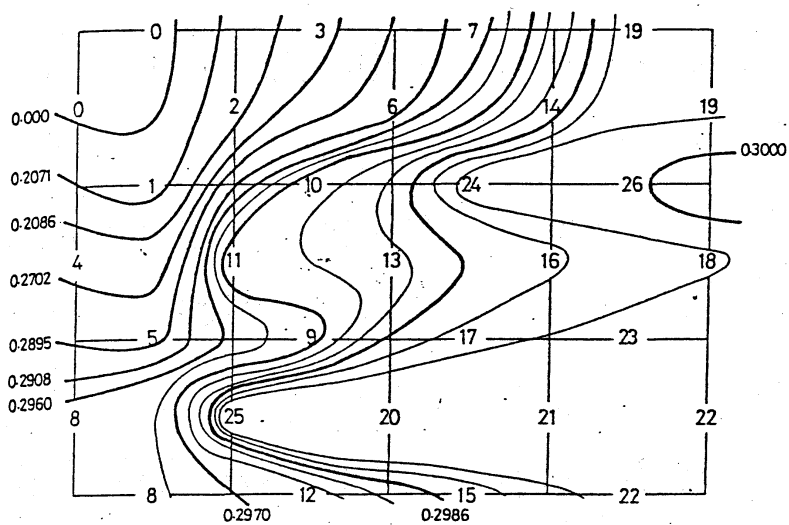


図9 格子グラフ  $L_{3 \times 4}$

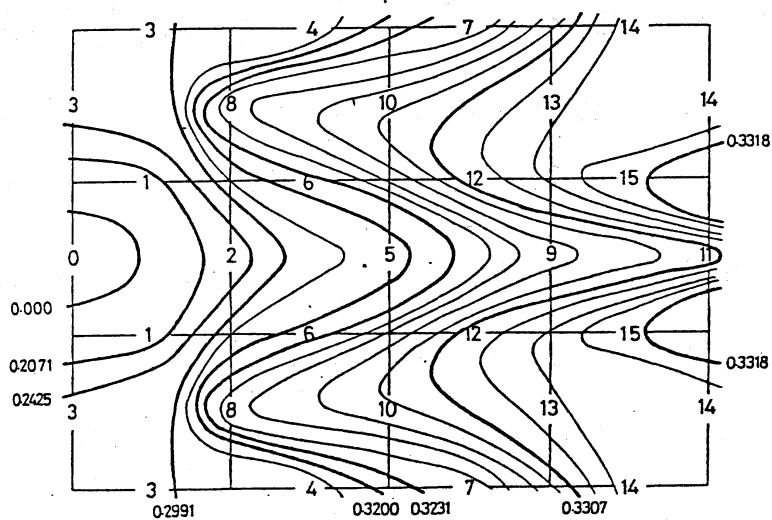
(a) のようになる。ここでは, 枝の番号を記入する代わりに, 付表に示すような枝1からの距離の異なるものだけを取り出し, 小さい順に番号付けした距離番号を各枝に記入した。この場合, 各枝までの

距離は4隅の直列枝の部分を除いては全て異なる値を示すが, 等距離線については煩雑さを防ぐために距離のほとんど等しい枝を1つのグループにまとめ, その中で最大となる枝

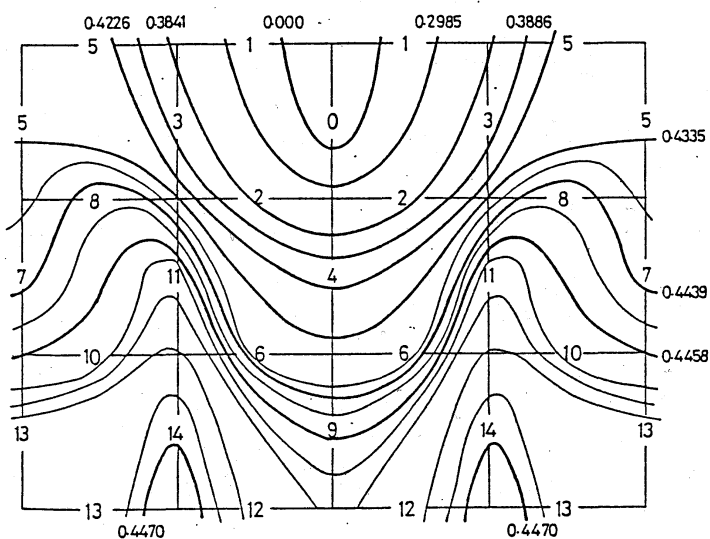




1	0.2071	14	0.2986
2	0.2086	15	0.2991
3	0.2700	16	0.2991
4	0.2702	17	0.2994
5	0.2895	18	0.2994
6	0.2908	19	0.2994
7	0.2960	20	0.2997
8	0.2965	21	0.2997
9	0.2970	22	0.2998
10	0.2973	23	0.2999
11	0.2975	24	0.2999
12	0.2975	25	0.2999
13	0.2978	26	0.3000

(a)  $d(\vec{1}\lambda)$ 

1	0.2071
2	0.2425
3	0.2991
4	0.3192
5	0.3200
6	0.3231
7	0.3287
8	0.3293
9	0.3295
10	0.3296
11	0.3307
12	0.3310
13	0.3311
14	0.3314
15	0.3318

(b)  $d(\vec{1}\lambda)$ 

1	0.2985
2	0.3841
3	0.3886
4	0.4226
5	0.4335
6	0.4434
7	0.4439
8	0.4448
9	0.4458
10	0.4461
11	0.4461
12	0.4466
13	0.4467
14	0.4470

(c)  $d(\vec{1}\lambda)$ 図10 格子グラフ  $L_{3 \times 4}$  の等距離地図

の距離を $\lambda$ の等距離線の値とし、特に距離の差が0.001以上のものを太線で表した。さらに、図10(b),(c)は $\lambda$ の枝7, 14からの等距離地図を(a)と同様にして描いたものであり、この場合はグラフの対称性を利用しているために距離の分類が少なくて済む。

枝 $\lambda$ からの距離をみる場合には単なる距離あるいは距離番号の各枝への割当てだけで十分であるが、このような等距離地図を作製することによって距離の変化の様子をイメージ的に捕えることができるようになり、通常の枝間の距離が小さいからといって電氣的な距離も小さくなるとは必ずしも言えない。図10(b)の距離番号25の枝等は $\lambda$ の典型的な例である。

次に応用を考えてみる。「抵抗回路のある枝が断線故障した。 $\lambda$ の箇所は何処か。」という問題が生じることがある。<sup>[4][5]</sup>  
<sup>[6]</sup> (もちろん、外見的に $\lambda$ の故障箇所を認めることができない場合である。) 本文による距離の定義はもとも枝入を開放したときの枝 $\lambda$ の電流値 $i(\lambda)$ であるから、 $\lambda$ の原理を断線箇所の探索といったものに応用できる。つまり、あらかじめ与えられたグラフの枝 $\lambda$ からの等距離地図(必要に応じて付表)を作製しておけば、もし何処かの枝に断線が生じた場合には枝 $\lambda$ の電流(またはコンダクタンス)は正常値よりも必ず減少するから、 $\lambda$ の値を読み取り地図上の等距離線をた

どって行くことによって、故障枝と同距離または近距離にある枝の集合を発見することができる。例えば、図9の $L_{3 \times 4}$ において $\alpha = 1$ としたときの正常値は $\beta (=T(1)/T) = 0.3000$ である。いま、故障により $\beta = 0.2908$ という値をとれば、図10(a)の値が0.2908の等距離線上をたどって行くと距離番号6の枝に行き当たるので、すなわち枝7が故障枝として発見できる。

この例題のような比較的簡単なグラフの場合だけでなく、グラフがある程度大きくなったとしても、時間さえかければ全ての枝までの距離を求めることは可能であり、その結果として完全な等距離地図を作製することができる。しかし、故障診断時に測定する電流(コンダクタンス)値には回路の抵抗値のバラツキ、測定器の精度等により識別の限界があるので、完全な地図の作製は時間と労力をかけた程の価値を持っていないということになる。要するに、この方法の特長は、故障枝を完全に発見できるに越したことはないが、それよりも通常全枝の診断を必要とするところを、故障枝を含むいくつかの枝にその範囲を限定させることにある。従って、全枝についての距離を求めることなしに、枝 $\alpha$ と入をどのように選択すれば診断範囲の少なくても済むできるだけ正確な地図を作製できるかが現実的な問題として生じてくる。そのためにも、特定のグラフの等距離線の分布をある程度把握しておく

ことも大事であろう。

効率の良い等距離地図の作製法については現在検討中であるが、本文で述べた開放距離の拡張や問題点として、ある枝や点が短絡，地絡したときに他に及ぼす影響について，あるいは回路の抵抗値が異なる場合について等が考えられる。

### 文 献

- [1] 秋山，西関訳："グラフとダイグラフの理論"，共立出版，pp. 196-209 (1981-5)
- [2] 佐藤，福田，最首，小野寺："電気回路の計算あるいは測定によるグラフの複雑さの決定法"，信学技報，CAS 80-151, pp. 57-62 (1981-3)
- [3] R. Onodera, K. Sato, Y. Fukuda and K. Saishu : "Electrical Measurements of Graph Complexity", MTQ, 31-4, pp. 109-115 (1981-6)
- [4] 篠田："回路診断における一つの最小化問題"，信学論(A), 53-A, 10, p. 569 (1970-10)
- [5] 篠田："内部節点を含む線形回路の素子値可解性"，信学技報，CAS 79-149, pp. 19-24 (1980-1)
- [6] 小澤："線形能動回路の故障診断(素子値の算定)"，信学技報，CAS 80-43, pp. 85-92 (1980-7)