数理解析研究所講究録
第 534 巻 1984 年 161-172

2-マトロイドの基本分割に関する諸問題

早大　理工　小野沢　晃(Akira Onozawa)
井上　正之(Masayuki Inoue)

1. まえがき

Kajitani-Ueno[1]によって導入された2-マトロイドの基本分割の理論には、多項式時間のアルゴリズムの得られていないいくつかの問題が知られている。本報告では、まずこれらの問題のうち、基本分割の存在判定問題と基本分割の存在する2-マトロイドの重みつきパリティ問題を解く多項式時間のアルゴリズムは存在しないことを示す。つづいて、基本分割の存在する2-マトロイドのパリティ問題を解くアルゴリズムを構成するのに役立つと考えられる"B-交互系列"と呼ばれる概念を示す。また、以上のような理論の応用として、"最大最小パリティ問題"等にも触れる。

2. 準　備

非空かつ有限な集合E上のマトロイド$\mathcal{M}$を、独立集合族$\mathcal{I}$、基族$\mathcal{B}$を用いて、$\mathcal{M} \triangleq (E, \mathcal{I})$ または $\mathcal{M} \triangleq (E, \mathcal{B})$ と書くこ

とにする。$\mathcal{M}$の階数関数を$r: 2^E \to \mathbb{Z}_+$で表わし、$\mathcal{M}$の$S (\subseteq E)$への簡約・縮約をそれぞれ$\mathcal{M} \cdot S$, $\mathcal{M} \times S$と書く。

マトロイド$\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$の台集合$E$が、

$$E = \{e_1, \bar{e}_1\} \cup \{e_2, \bar{e}_2\} \cup \cdots \cup \{e_n, \bar{e}_n\}, \quad |E| = 2n \tag{1}$$

と分割されているとき、$\mathcal{M}$を"2－マトロイド"と呼ぶ。e_i [$\bar{e}_i$]は、$\bar{e}_i$[e_i]の"メイト"と呼ばれる。条件『$e \in S \Leftrightarrow \bar{e} \in S$』を満たす集合$S (\subseteq E)$を"パリティ集合"と呼び、独立であるパリティ集合を"独立パリティ集合"と呼ぶ。『要素数最大の独立パリティ集合("最大独立パリティ集合")を求めよ』という問題が"マトロイドパリティ問題"である。[2]

3. 基本分割の存在判定問題

条件『$e \in D \Leftrightarrow \bar{e} \in D^*$』を満たす集合の対$(D, D^*)$ $(D, D^* \subseteq E)$を"メイトペア"と呼ぶ。[1] 2－マトロイド$\mathcal{M}$の独立パリティ集合を$\mathcal{P}$とし、(D, D^*)をメイトペアとすると、一般に、

$$\max_{\mathcal{P}} |\mathcal{P}| \leq \min_{(D, D^*)} \left(r(D) + r(\bar{D}^*) \right) \tag{2}$$

が成立する。[1] 式(2)の右辺の$r(D) + r(\bar{D}^*)$の最小値を実現する極小なメイトペアを(E_+, E_-)とする。式(2)において、

$$\max_{\mathcal{P}} |\mathcal{P}| = \min_{(D, D^*)} \left(r(D) + r(\bar{D}^*) \right) \tag{3}$$

となるとき、かつこのときにかぎり、$E_+ \cap E_- = \phi$となることが知られている。[1] また、式(3)が成立するならば、(E_+, E_-)は一意に定まることも知られている。[1]

〔定義1〕[1] 2ーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathcal{J})$において、式(3)が成立するならば、"2ーマトロイド$\mathfrak{M}$には基本分割が存在する"といい、台集合Eの三分割：

$$E=E_{+}\cup E_{0}\cup E_{-}\ ,\ E_{0}=E-E_{+}-E_{-} \tag{4}$$

を2ーマトロイド$\mathfrak{M}$の"基本分割"と呼ぶ。☒

2ーマトロイドの基本分割は、存在することがわかっていれば多項式時間で求めることができる。[1] 従って問題になるのは、基本分割の存在判定をするアルゴリズムである。

〔定理1〕 基本分割の存在判定を行なう、独立性判定オラクルを用いた多項式時間のアルゴリズムは存在しない。☒

（証明） 次式で定義される2つの2ーマトロイド：

$$\mathfrak{M}_1 \triangleq (E,\mathcal{B}_1)\ ,\ \mathcal{B}_1 \triangleq \binom{E}{2\ell}-\binom{E}{2\ell}_P \tag{5}$$

$$\mathfrak{M}_2 \triangleq (E,\mathcal{B}_2)\ ,\ \mathcal{B}_2 \triangleq \mathcal{B}_1\cup\{P_1\}\ ,\ {}^{\exists}P_1\in\binom{E}{2\ell}_P \tag{6}$$

$$\binom{E}{2\ell}\triangleq\{S\in 2^E \mid |S|=2\ell\}\ ,\ |E|\geqq 2\ell>0 \tag{7}$$

$$\binom{E}{2\ell}_P\triangleq\{T\in\binom{E}{2\ell} \mid T\text{はパリティ集合}\} \tag{8}$$

を考える。$\mathfrak{M}_1$には基本分割は存在せず、$\mathfrak{M}_2$には存在する。また、${}^{\forall}S\in 2^E-\{P_1\}$で、$\mathfrak{M}_1$・$\mathfrak{M}_2$双方の独立性判定オラクルの出力は一致する。従って、文献(3)・(4)・(5)等でよく知られている論法で、定理を得る。■

4. 基本分割とパリティ問題

4.1 重みつきパリティ問題

2－マトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathcal{I})$の要素$e\in E$に実数の重み$w(e)$がついているとする。部分集合$S\in 2^E$の重みを$w(S)\triangleq\sum_{e\in S}w(e)$で定義するとき、『重み最大の独立パリティ集合を求めよ』という問題が"マトロイドの重みつきパリティ問題"である。

〔定理2〕 基本分割の存在する2－マトロイドの重みつきパリティ問題を解く、独立性判定オラクルを用いた多項式時間のアルゴリズムは存在しない。☒

（証明） 定理1の証明中で用いた2－マトロイド$\mathfrak{M}_2$から

$$\mathfrak{M}_3\triangleq(E,\mathcal{B}_3),\ \mathcal{B}_3\triangleq\mathcal{B}_2\cup\{P_2\},\ P_2\in\binom{E}{2\ell}_P,\ P_2\neq P_1 \tag{9}$$

で新しい2－マトロイド$\mathfrak{M}_3$を定義する。台集合Eに次のように重み$w(e)$ $(e\in E)$をつける：

$$w(e_0)=w(\bar{e}_0)=a\ ,\quad {}^{\exists}\{e_0,\bar{e}_0\}\in P_1 \tag{10}$$

$$w(f_0)=w(\bar{f}_0)=b\ ,\quad {}^{\exists}\{f_0,\bar{f}_0\}\in P_2-P_1 \tag{11}$$

$$w(g)=w(\bar{g})=c\ ,\quad {}^{\forall}\{g,\bar{g}\}\in E-\{e_0,\bar{e}_0,f_0,\bar{f}_0\} \tag{12}$$

$$0<c<a<b<2c\ 。 \tag{13}$$

容易にわかるように、$\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$双方に基本分割が存在し、かつ${}^{\forall}S\in 2^E-\{P_2\}$で$\mathfrak{M}_2$,$\mathfrak{M}_3$双方の独立性判定オラクルの出力は一致する。$\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$の最大重みの独立パリティ集合はそれぞれP_1, P_2であり、$w(P_1)<w(P_2)$であることに注意すると、文献(3)・(4)・(5)でよく知られた論法により定理を得る。■

4.2 パリティ問題

基本分割の存在する2−マトロイドのパリティ問題について考える。

式(3)の成立するとき、その右辺の最小値を実現するメイトペアの集合を$\mathcal{D}$とする。$(\bar{D}_1, \bar{D}_1^*) \in \mathcal{D}$, $(\bar{D}_2, \bar{D}_2^*) \in \mathcal{D}$に対して、

$$(\bar{D}_1, \bar{D}_1^*) \leqq (\bar{D}_2, \bar{D}_2^*) \iff \bar{D}_1 \subseteq \bar{D}_2 \text{ かつ } \bar{D}_1^* \subseteq \bar{D}_2^* \tag{14}$$

$$(\bar{D}_1, \bar{D}_1^*) \vee (\bar{D}_2, \bar{D}_2^*) \triangleq (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2, \bar{D}_1^* \cup \bar{D}_2^*) \tag{15}$$

$$(\bar{D}_1, \bar{D}_1^*) \wedge (\bar{D}_2, \bar{D}_2^*) \triangleq (\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2, \bar{D}_1^* \cap \bar{D}_2^*) \tag{16}$$

とすると、上記の半順序≦，演算∨，∧のもとで$\mathcal{D}$は分配束をなす。分配束$\mathcal{D}$の極大元$(E_+ \cup E_0, E_0 \cup E_-)$と極小元$(E_+, E_-)$を結ぶ組成列から得られる素商を次式で定義する：

$$\Delta \triangleq \{(C_i, C_i^*) \mid (C_i, C_i^*) = (X_i - X_{i-1}, X_i^* - X_{i-1}^*),$$
$$(X_i, X_i^*) \geqq\!| \, (X_{i-1}, X_{i-1}^*), \ i = 1, 2, \cdots k\} \text{。} \tag{17}$$

但し、$(X_0, X_0^*) = (E_+, E_-)$, $(X_k, X_k^*) = (E_+ \cup E_0, E_0 \cup E_-)$とし、式$x \geqq\!| \, y$は$x \geqq y$かつ$x \geqq z \geqq y$なる$z$が存在するならば$z = x$ or yであることを意味するとする。Δは、よく知られているように、組成列のとり方にはよらない。また、分配束$\mathcal{D}$の結既約元は多項式時間で求まる(6)ので、Δも多項式時間内に求まる。文献(7)に倣って、対：

$$(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_i^*) \triangleq (\mathfrak{M} \cdot X_i \times C_i, \ \mathfrak{M} \times X_i^* \cdot C_i^*), \ (C_i, C_i^*) \in \Delta \tag{18}$$

を“強既約マイナー対(strongly irreducible minors pair)

”、$\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_i^*$の各々を“強既約マイナー”と呼ぶ。[6] 強既約マイナー対間には、もちろん半順序を定義することができる。付録に例を示す。$\mathcal{M}_+ \triangleq \mathcal{M}\cdot E_+$, $\mathcal{M}_0 \triangleq \mathcal{M}\cdot(E_+\cup E_0)\times E_0$, $\mathcal{M}_- \triangleq \mathcal{M}\times E_-$ である。$\mathcal{M}_0$を特に“中心マイナー(central minor)”と呼ぶ。

強既約マイナー対$(\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_i^*)$の台集合の対$(C_i, C_i^*)$(これはメイトペアになる)は、$C_i \cap C_i^* = \phi$であるか、$C_i, C_i^*$がともにパリティ集合であるかのいずれかである。$C_i, C_i^*$がともにパリティ集合であるとき、強既約マイナー$\mathcal{M}_i(=\mathcal{M}_i^*)$を“極小中心マイナー(minimal central minor)”と呼ぶ。[6] 極小中心マイナーには基になるような独立パリティ集合(“パリティ基(parity base)”と呼ぶ)が存在している。[6]

〔定理3〕 2-マトロイド$\mathcal{M}$に基本分割が存在しているとき、$\mathcal{M}$の極小中心マイナー$\mathcal{M}_i$のパリティ基が多項式時間で求まるならば、$\mathcal{M}$の最大独立パリティ集合も多項式時間内に求まる。☒

文献(6)の内容から、定理3の証明は明らかである。
写像$\alpha : 2^E \to 2^E$を

$$\alpha(S) \triangleq \{e \in S^* \mid (S, S^*) : \text{メイトペア}\} \quad (S \in 2^E) \tag{19}$$

で定義する。極小中心マイナー$\mathcal{M}_i \triangleq (C_i, \mathcal{B}_i)$の基$B_0 \in \mathcal{B}_i$で、$\alpha(B_0)$も$\mathcal{M}_i$の基になるようなものを、$\mathcal{M}_i$の“共通基”と呼び、その族を$\mathcal{B}_i^c (\subseteq \mathcal{B}_i)$と書く。$\mathcal{M}_i$のパリティ基は共通基である。

$\mathfrak{M}_i$の共通基を一つ求めることは、マトロイドの共通独立集合問題[2]に帰着できる。[6]

〔定義2〕　極小中心マイナー$\mathfrak{M}_i$の共通基B_0に関して、部分集合$S \triangleq \{e_1, f_1, e_2, f_2, \cdots, e_\ell, f_\ell\}$（$e_i \notin B_0$, $f_i \in B_0$, $i=1,2,\cdots \ell$）は、$S_j \triangleq \{e_1, f_1, e_2, f_2, \cdots, e_j, f_j\}$（$j \leqq \ell$）, $S'_j \triangleq \{f_1, e_2, f_2, e_3, \cdots, f_{j-1}, e_j\}$（$j \leqq \ell$）とするとき、

① 任意のj（$\leqq \ell$）に対して、

a)　$B_0 \oplus S_j$は$\mathfrak{M}_i$の基である。

b)　$\alpha(B_0) \oplus \alpha(S'_j)$は$\mathfrak{M}_i$の基である。

② $B_0 \oplus S$は$\mathfrak{M}_i$の共通基である。

を満たすならば、極小中心マイナー$\mathfrak{M}_i$の共通基B_0に関する"B－交互系列"と呼ばれる。⊠

但し、$X \oplus Y \triangleq (X-Y) \cup (Y-X)$である。

〔定理4〕　極小中心マイナー$\mathfrak{M}_i$のパリティ基をP_0、P_0と異なる$\mathfrak{M}_i$の共通基をB_0とすると、$S \subseteqq P_0 \oplus B_0$なる共通基$B_0$に関するB－交互系列Sが存在する。⊠

定理4は、共通基B_0を、B－交互系列を高々$\mathfrak{M}_i$の階数回求めて変形していくことによって、$\mathfrak{M}_i$のパリティ基P_0を構成できることを示している。しかし、定理4にいうようにB－交互系列を効率的に求めるアルゴリズムは、現在のところ知られていない。一方文献(6)には、極小中心マイナーの存在しな

い2－マトロイドの最大独立パリティ集合は、共通独立集合問題を高々$|E|$回解けば求まることが示されている。

5. 最大最小パリティ問題

2－マトロイド$\mathcal{M}=(E,\mathcal{J})$のすべての要素$e\in E$に実数の重み$w(e)$がついているとする。正の整数$k$（$0<2k\leqq\max_{\mathcal{P}}|\mathcal{P}|$, $\mathcal{P}$：$\mathcal{M}$の独立パリティ集合）が与えられているとき、『$|\mathcal{P}|=2k$なる独立パリティ集合$\mathcal{P}$の中で、$e\in\mathcal{P}$である要素eの重み$w(e)$の最小値が、最大になるものを求めよ』という問題を“最大最小パリティ問題”と呼ぶ。これは、グラフの最大最小マッチング問題や2つのマトロイドの最大最小共通独立集合問題(2)の自然な拡張になっている。

基本分割の存在する2－マトロイドのパリティ問題を解く多項式時間のアルゴリズムが与えられれば、条件『任意のパリティ集合$A(\subseteqq E)$への簡約$\mathcal{M}\cdot A$に基本分割が存在する』を満たす2－マトロイド$\mathcal{M}$の最大最小パリティ問題を解く多項式時間のアルゴリズムが容易に作れる。また上の条件の下で、以下の定理が証明できる。

〔定理5〕　$P(S)(S\subseteqq E)$でS中の要素数最大のパリティ集合を、$M(S)(S\subseteqq E)$でS中のメイトペアの全体を表わす。

$$\mathbb{P}_k\triangleq\{P\mid P=\alpha(\breve{P}),\ |P|=2k,\ P\in\mathcal{J}\}$$

$$\mathbb{S}_k\triangleq\{S\mid r(D)+r(P(S)-D^*)=2(k-1),\ {}^{\exists}(D,D^*)\in M(S)\}$$

とすると、次式が成立する：

$$\max_{P \in \mathbb{P}_k} \min_{e \in P} \omega(e) = \min_{S \in \mathbb{S}_k} \max_{e \in E-S} \omega(e)\ 。\boxtimes$$

6. グラフのマッチング問題

グラフのマッチング問題が分割マトロイドのパリティ問題に帰着されることはよく知られている。[2] グラフ G から得られる分割マトロイドを $\mathfrak{M}(G)$ とする。2ーマトロイド $\mathfrak{M}(G)$ には基本分割 $E = E_+ \cup E_0 \cup E_-$ が存在していると仮定する。$\mathfrak{M}(G)$ の中心マイナーを $\mathfrak{M}(G)_0$、式(3)の右辺の最小値を実現するメイトペアの全体を $\mathfrak{D}(G)$、$\mathfrak{D}(G)_0 \triangleq \{(X, X^*) \mid X = D - E_+, X^* = D^* - E_-, (D, D^*) \in \mathfrak{D}(G)\}$、パリティ集合 $S\ (\subseteq E)$ に対応する G の枝集合を $A(S)$ とすると、以下の定理を得る。

〔定理6〕 $(X, X^*) \in \mathfrak{D}(G)_0$ に対して、$\mathfrak{M}(G)_0 \cdot X$, $\mathfrak{M}(G)_0 \times X^*$ にループ（階数が0である1元集合）が存在しなければ、$G \cdot A(X \cup X^*)$ には完全マッチングが存在する。$\boxtimes$

7. むすび

以上、2ーマトロイドの基本分割に関するいくつかの問題・性質について述べた。基本分割の存在する2ーマトロイドのパリティ問題を解く効率のよいアルゴリズムを構成することは、今後の課題である。また、6節の議論は、一般のグラフのDM分解と関係させることができる可能性がある。

謝辞： 日頃、筆者等が御指導・御鞭撻頂く本学堀内和夫教授・大石進一助教授に深く感謝します。また、平生有益な御討論を頂く東京工業大学梶谷洋司助教授・上野修一助手、並びに新潟大学冨澤信明教授に感謝します。

文献

(1) Kajitani, Y. and Ueno, S.: "Principal partition in 2-parity problems", Proc. of 1982 Int. Symp. on Circuits and Systems, pp.150~153 (1982)

(2) Lawler, E.L.: "Combinatorial Optimization: Networks and Matroids", Holt, Rinehart and Winston (1976)

(3) Lovász, L.: "The matroid matching problem", Algebraic Methods in Graph Theory, Proc. Conf. Szeged, pp.495~517 (1978)

(4) Hausmann, D. and Korte, B.: "Algorithmic versus axiomatic definitions of matroids", Mathematical Programming Study, 14, pp.98~111 (1981)

(5) Jensen, P.M. and Korte, B.: "Complexity of matroid property algorithms", SIAM J. COMPUT., Vol.11, No.1, pp.184~190 (1982)

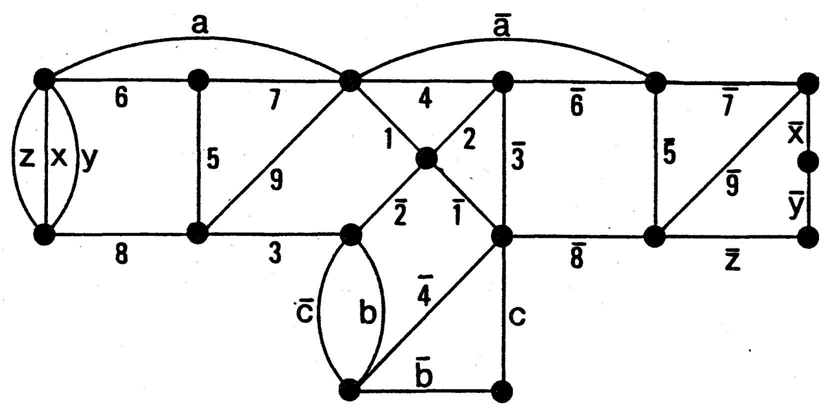
(6) 小野沢, 井上, 大石, 堀内: "パリティ構造を持つマトロイドの強既約マイナー対への基本分割について", 電子通信学会論文誌(A) 投稿中

(7) 冨澤: "強既約マトロイドとマトロイドの強既約マイナー

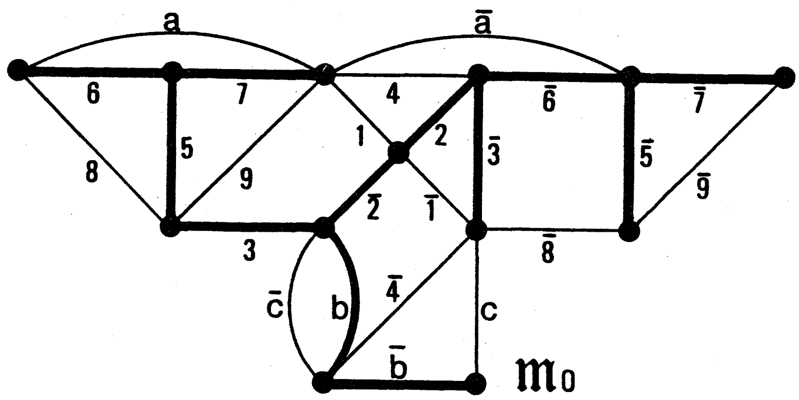
への基本分割について", 電子通信学会論文誌(A), Vol.J59-A, No.2, pp.83〜91 (1976)

付　録

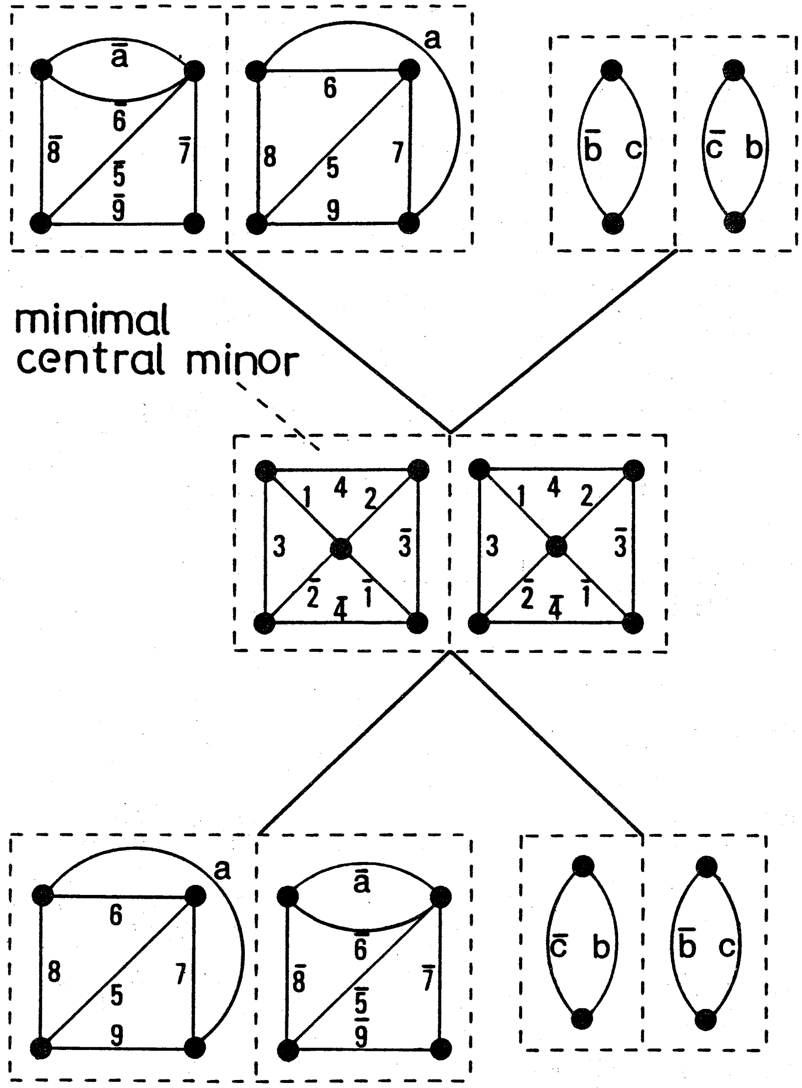
2-マトロイドの基本分割と強既約マイナー対の例



(a) matroid $\mathfrak{M}$



(b) central minor and its parity base



(c) strongly irreducible minors pairs
and a partial order among them