数理解析研究所講究録
第534巻 1984年 185-190

グラフの被覆分解

日本医科大学　安藤　清
東京理科大学　江川　嘉美
電気通信大学　水野　弘文

序

Gを単純グラフとし，$\bar{G}$をその補グラフとする。我々は先に G，$\bar{G}$がともに自明でないカルテシアン積に分解できるならば，Gは $2K_2$，C_4，Q_3，$K_4 \times K_2$，$K_2 \times (K_2 + \bar{K}_2)$，$K_3 \times K_3$ のいずれかであることを報告した。

ここでは カルテシアン積の一つの拡張としてグラフの被覆分解を導入し，G，$\bar{G}$ともに自明でない被覆分解をもつグラフを決定することを試みる

1. 定義と例

ここでは単純グラフを考える。グラフGの点集合をV（G）、辺集合をE（G）であらわす。$|G| = |V(G)|$，$\|G\| = |E(G)|$とおく。$V' \subset V(G)$ および$E' \subset E(G)$で誘導されるGの部分グラフをそれぞれG〔V'〕，G〔E'〕であらわす。Gにおいて点xに隣接する点の集合をxの近傍と呼び，N（x；G）であらわわす。

G，Hを $V(G) \cap V(H) = \phi$ なる2つのグラフとする。V（G）からV（H）の上への写像pは Gの任意の辺xyについてp（x）＝p（y） または p（x）p（y）$\in$E（H）となるとき， GからHへの射影と呼ばれる。とくにGの任意の点xの近傍N（x；G）への制限 $p|N(x;G)$が1対1写像であるとき射影pは局所同相であるといわれる。

<u>定義　1</u>　グラフGからグラフHへの局所同相な射影pが存在するとき （G，p）をH上の被覆という。または単にGはH上の被覆であるという。またu$\in$V（H）について $|p^{-1}(u)| = n$であるときGはH上のn－被覆であるという。

GをH上のn－被覆とし 射影pに関するHの辺uvの逆像を｛x_1y_1，x_2y_2，．．．．．，x_ny_n｝とする。（ただし $p(x_i) = u$，$p(y_i) = v$　$1 < i < n$）。Gから2辺x_1y_1，x_2y_2 を 除き、新たに2辺x_1y_2，x_2y_1 を加える操作を“射影pに関する辺交換”と呼ぶ。このときGに射影pに関する辺交換を施して得られるグラフをG´とすると （G´，p）はまたH上のn－被覆である。またH上の任意のn－被覆（G，p）はnHにpに関する辺交換を繰返し施すことによって得られる。

定義　2　　グラフGに対し，E（G）の分割E′，E″とグラフH，Fがあって　さらに以下の条件（A），（B）を満たすG〔E′〕からHへの射影pとG〔E″〕からFへの射影qが存在するとき，Gは（H，F）－被覆分解可能であるという。

（A）　（G〔E′〕，p），（G〔E″〕，q）はそれぞれH，F上の被覆である。

（B）　任意の$u \in V(H)$，$v \in V(F)$に対し，$p \mid q^{-1}(v)$，$q \mid p^{-1}(u)$はともに1対1写像である。

G＝H×Fならば　Gは（H，F）－被覆分解可能である。定義より次の補題が得られる。

補題　1　　グラフGは（H，F）－被覆分解可能であるとし、被覆分解を与える射影をp，qとする。このとき以下が成り立つ。

（1）$|G| = |H|\,|F|$，

（2）$\|G\| = |H|\,\|F\| + |F|\,\|H\|$，

（3）H，Fがともに連結ならばGも連結である。，

（4）pまたはqに関する辺交換を施して得られるグラフはまた（H，F）－被覆分解可能である。

とくに任意のグラフは（K_1，G）－被覆分解可能であるが，これをGの自明な被覆分解と呼ぶ。

定義　3　　Gを（H，F）－被覆分解可能なグラフとする。$p : G〔E′〕\longrightarrow H$，$q : G〔E″〕\longrightarrow F$を分解を与える射影とする。このとき　任意の点$u \in V(H)$について　$p^{-1}(u) \cong F$　が成立するならば，この分解はFに関して単純であるといわれる。

Fに関して単純な（H，F）－被覆分解を略して　単純な（H，F）－被覆分解あるいは単に　単純な被覆分解と呼ぶ。単純な被覆分解では　G〔E″〕$\cong |H| F$　である。

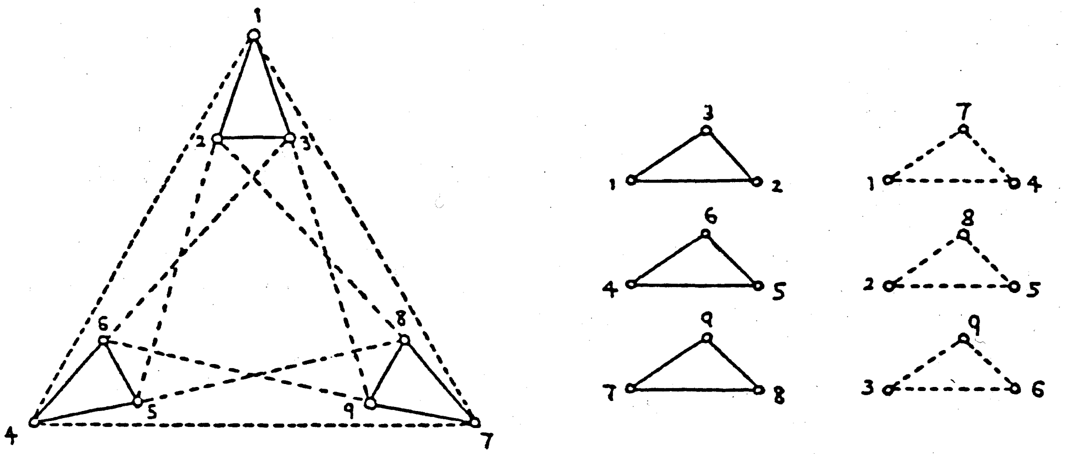
補題　2　（三角形補題）　　射影$p : G〔E′〕\longrightarrow H$，$q : G〔E″〕\longrightarrow F$がFに関して単純なGの被覆分解を与えるものとする。このときGの任意の三角形K_3について　E（K_3）$\subset$E′または　E（K_3）$\subset$E″が成り立つ。

注意〕単純でない被覆分解では上の補題の結論は必ずしも成立しない。

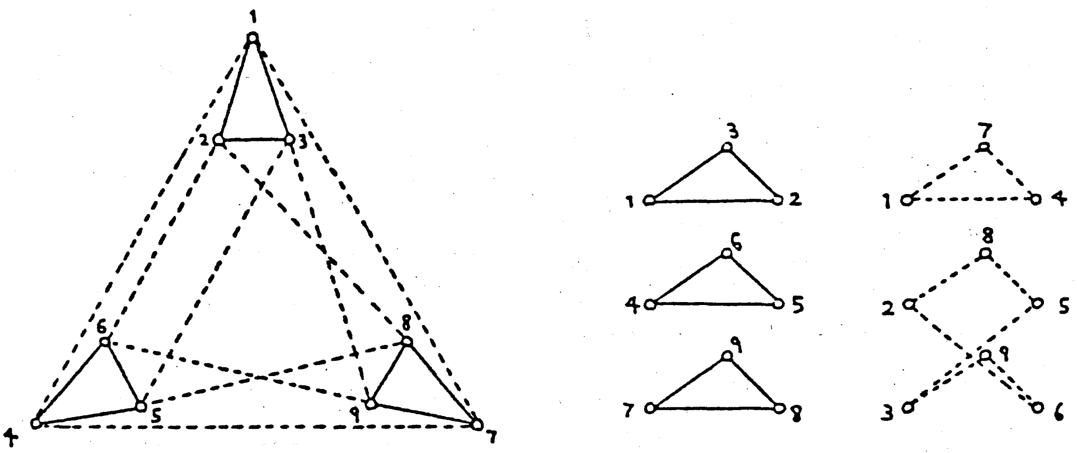
G，$\bar{G}$ともに自明でない被覆分解可能なグラフの全体を$\mathcal{G}$であらわす。また，　G，$\bar{G}$ともに自明でない単純被覆分解可能なグラフ全体を$\mathcal{G}′$であ

らわす。

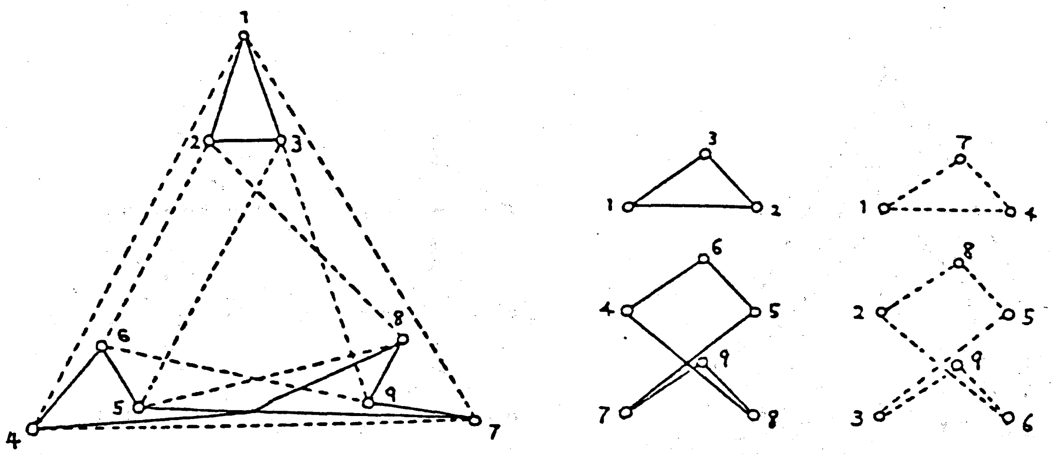
<u>例　1</u>（グラフの被覆分解）



図－1　カルテシアン積



図－2　単純な被覆分解



図－3　被覆分解

<u>例　2</u>

$\mathcal{G}'$ のグラフの重要な系列を以下　定義する。
Iを{1, 2, . . . n}の部分集合とするとき，Iに対してグラフ$D_n(I)$を

$$V(D_n(I)) = \{x_i,\ y_i \mid 1 < i < n\},$$
$$E(D_n(I)) = E(K_{2n}) - \{x_i\, y_i \mid i \in I\}$$

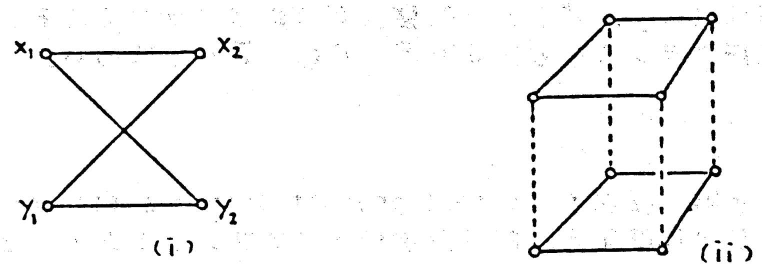
で　定義する。
また　$I \subset \{1, 2, . . . n\}$，$L \subset \{(i, j) \mid 1 < i, j < n\}$ に対してグラフ$C_n(I, L)$を

$$V(C_n(I, L)) = \{x_{\varepsilon,i},\ y_{\varepsilon,i} \mid \varepsilon = \pm 1,\ 1 < i < n\}$$

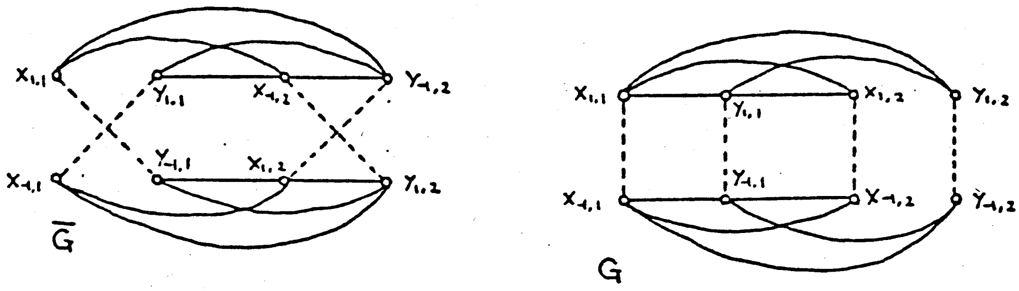
$$\begin{aligned} E(C_n(I, L)) = &\ \{x_{1,i}\, x_{-1,i},\ y_{1,i}\, y_{-1,i} \mid 1 < i < n\} \\ &\cup \{x_{\varepsilon,i}\, y_{\varepsilon,i} \mid \varepsilon = \pm 1,\ i \notin I,\ 1 < i < n\} \\ &\cup \{a_{\varepsilon,i}\, b_{\varepsilon,j} \mid \varepsilon = \pm 1,\ (i, j) \in L\} \\ &\cup \{a_{\varepsilon,i}\, b_{-\varepsilon,j} \mid \varepsilon = \pm 1,\ (i, j) \notin L\} \end{aligned}$$

（ただしa，bは　xおよびyを動くものとす。）

で定義する。
$G \cong D_n(I) \times K_2$，または　$G \cong C_n(I, L)$ なるグラフGの全体を$\mathcal{E}$であらわす。$\mathcal{E}$に含まれるグラフの位数は4の倍数である。



図－4　（i）D_n（I）；I＝｛1，2｝　　（ii）D_n（I）×K_2



図－5　C_n（I，L）の例；G＝K_2 ×（K_2 ＋$\overline{K_2}$）

2．$\mathcal{G}$および$\mathcal{G}'$の特徴付け

<u>定理　1</u>　　G，$\overline{G}$ともに自明でない被覆分解可能なグラフであるとする。このとき

（1）　｜G｜が偶数ならば，｜H｜＝｜G｜／2なるグラフHが存在して，G，$\overline{G}$の被覆分解の少なくとも一方は（K_2，H）－被覆分解である。

（2）　｜G｜が奇数ならば，G，$\overline{G}$の被覆分解はともに（K_3，K_3）－被覆分解である。

<u>定理　2</u>　　G，$\overline{G}$がともに自明でない単純な被覆分解可能なグラフであるための必要充分条件は　G，$\overline{G}$のいずれかが　（1）　単純な（K_2，K_n）－被覆分解可能なグラフ，（2）K_3 ×K_3，または（3）$\mathcal{E}$のグラフ　であることである。

注意〕 Gが単純な（K_2 ，K_n ）－被覆分解可能なグラフならば，その補グラフ$\overline{G}$は単純な（$\overline{K_2}$ ，K_n ）－被覆分解可能なグラフである。また，$K_3 \times K_3$ は自己補グラフであり，$G \in \mathcal{E}$ならば $\overline{G} \in \mathcal{E}$である。

文 献

〔1〕安藤 清、水野 弘文： Direct product decomposition of graphs，日本数学会１９８３年度年会，応用数学分科会アブストラクト ２５－２６（１９８３）

〔2〕K.Ando，H.Mizuno: Bidecomposable Six Graphs，to appear

〔3〕K.Ando，Y.Egawa，H.Mizuno:Covering Decomposition of Graphs，pre-print