数理解析研究所講究録
第534巻 1984年 197-205

辺の付加によるグラフの拡大構成問題

広島大学工学部 渡辺敏正 (Toshimasa Watanabe)
中村 昭 (Akira Nakamura)

1. まえがき

グラフに，ある性質をみたすために付加する最小重みの辺集合を求める問題は，一般に，拡大構成問題と呼ばれる[1]。

Gをグラフ，Cをグラフに関する一つの性質とする。但し，Cは辺を付加してゆけばいつかはみたされるような性質とする。Gの異なる点を両端点としGには含まれないような辺の有限集合Domain(w_G)が存在して，これを定義域とし各辺に非負整数の重みを割り当てる関数w_Gが与えられているとする。w_GをGの重み関数と呼ぶことにする。従来から考えられてきた拡大構成問題([1]～[3],[8]～[11],[13],[18]等)は，GにAの辺を付加したグラフG+Aが性質Cをみたし且つAの辺の重みの総和が最小となる辺集合A ⊂ Domain(w_G)を求める問題である。

従来からの定義を若干拡張すれば，点部分集合に対する拡

大構成問題を定義することもできる．簡単に言えば，従来からの拡大構成問題が$G+A$全体がCをみたすことを要求しているのに対し，点部分集合に対する拡大構成問題では，$G+A$のある指定された点部分集合に関してCが成り立てばよいということである．すなわち，グラフG，Gの点部分集合Nおよび重み関数w_Gが与えられたとき，Nを含みしかもCをみたすような部分グラフが$G+A$に存在し，且つ重みの総和が最小となる辺集合$A \subset \mathrm{Domain}(w_G)$を求める問題である．明らかに，$N$が$G$の点集合に等しい場合が従来からの拡大構成問題である。

定義において，性質Cをどのようなものとするか，グラフは無向グラフとするか有向グラフとするか，重みはすべて等しくなければならないか異なってもよいのか，$\mathrm{Domain}(w_G)$はどのようなものにするか等により，いずれの拡大構成問題も種々の形となる．本稿では，Cとしては，「k－連結」，「k－辺連結」および「強連結」のいずれかとする．「強連結」のときのみグラフは有向グラフとし，他の二つは無向グラフとする。

2．諸定義

特に必要なものに限って述べる。それ以外は文献（たとえば[5]～[7]，[15]～[17]，[19]など）を参照されたい。

グラフ Gを有限点集合 V_G と有限辺集合 E_G の組 (V_G, E_G) で表わす： $G=(V_G, E_G)$．ここで，辺は V_G の異なる２点を両端点とするものとし，特に断らない限り，多重辺を含んでもよいとする。

グラフ Gから何個かの点（辺）を除去して非連結または自明なグラフにするときの除去すべき最小点数（最小辺数）を Gの連結度（辺連結度）と言い，$\kappa_1(G)$（$\kappa_2(G)$）と表す．$\kappa_1(G) \geqq k$（$\kappa_2(G) \geqq k$）なるグラフを k－連結（k－辺連結）グラフと言う．

次に拡大構成問題の定義を与える．Cは「k－連結」，「k－辺連結」，「強連結」のいずれかとする。Gに対して，w_Gを，

$$w_G : \mathrm{Domain}(w_G) \longrightarrow Z^+ \text{（非負整数）}$$

なる関数とする。但し，$\mathrm{Domain}(w_G)$ は有限集合で，V_Gの異なる２点を両端点とする辺を元とし，$\mathrm{Domain}(w_G) \cap E_G = \phi$ とする。w_Gが（Cに関して）非制限的（nonrestrictive）であるとは，Cをみたすために付加することが必要となった辺は $\mathrm{Domain}(w_G)$ から常に選び出すことができることを言う。なお，w_Gを（Gの）重み関数と呼ぶ。$A \subset \mathrm{Domain}(w_G)$ に対して，

$$G+A=(V_G, E_G \cup A)$$

と表す。さらに

$$w_G(A) = \sum_{e \in A} w_G(e)$$

を A の重み，$w_G(e)$ を e の重みと言う．

(性質 C に関する) 点部分集合に対する拡大構成問題 $P_1(C)$

『グラフ G，$N \subset V_G$ および重み関数 w_G が与えられたとき，$N \subset V_H$ 且つ C をみたす部分グラフ $H=(V_H, E_H)$ が $G+A$ に存在し，しかも $w_G(A)$ が最小となる辺集合 $A \subset \mathrm{Domain}(w_G)$ を求めよ。』

P_1 において，$N = V_G$ である場合を，特に全体集合に対する拡大構成問題と呼び，$P_2(C)$ と表す．

$P_1(C)$，$P_2(C)$ の様な最適化問題の NP-完全性を証明するために，通常は決定問題として定式化して扱う。たとえば，$P_1(C)$ に対しては

$P_1(C)$ に対応する決定問題 $P_1'(C)$

入力：グラフ G，$N \subset V_G$，重み関数 w_G および非負整数 F.

質問：$N \subset V_H$ 且つ C をみたす部分グラフ H が $G+A$ に存在し，しかも $w_G(A) \leqq F$ なる辺集合 $A \subset \mathrm{Domain}(w_G)$ が存在するか？

とする。その他の拡大構成問題に対しても同様に定式化し，$P_1(C)$ に対する $P_1'(C)$ のように “ ’ ” を付けて決定問題であ

ることを示すことにする．Cが「k－連結」，「k－辺連結」，「強連結」である場合の$P_1(C)$等はそれぞれ$P_1(k\text{-}VC)$，$P_1(k\text{-}EC)$，$P_1(STC)$と表す．w_Gが非制限的である場合には，"NR"を付けて$NRP_1(C)$などと，またw_Gがすべて等しい重みを与える場合には"EQW-"を付けて$EQW\text{-}NRP_1(C)$とか$EQW\text{-}P_1(C)$などと表すことにする．

3．得られた結果

得られた結果を以下に列挙しておく．

定理1　各$k \geqq 2$に対して，$EQW\text{-}P_2'(C)$はNP－完全である．ここで，$C = k\text{-}VC$，$k\text{-}EC$，STCとする．

定理2　各$k \geqq 2$に対して，$NR\text{-}P_2'(k\text{-}EC)$はNP-完全である．

（注）[1]で$NRP_2'(2\text{-}VC)$および$NRP_2'(STC)$がNP－完全であること，[8]で$NRP_2'(k\text{-}VC)$ $(k \geqq 3)$がNP－完全であることが示されている．また，[1]では，$Domain(w_G) = E_{K_n} - E_G$なる場合に$P_2'(2\text{-}EC)$がNP－完全であることが示されている．ここで，$K_n$は$n$点から成る無向完全グラフである．

定理3　$EQW\text{-}NRP_1'(STC)$はNP－完全である．

（注）[1]で$EQW\text{-}NRP_2(STC)$には$O(|V_G|+|E_G|)$アルゴリズムの存在が示されている．

定理4　$EQW\text{-}NRP_1(3\text{-}VC)$には$O(|V_G|^3)$アルゴリ

ズムが存在する。

（注）[8][9]で EQW−NRP$_2$(3−VC) には $O(|V_G|^3)$ アルゴリズムの存在が示されている。

<u>定理5</u>　EQW−NRP$_1$(2−EC) には $O(|V_G|+|E_G|)$ アルゴリズムが存在する。

（注）[1]において Domain$(W_G)=E_{K_n}-E_G$ なる場合に EQW−P$_2$(2-EC) には $O(|V_G|+|E_G|)$ アルゴリズムが存在することが示されているが，これは EQW−NRP$_2$(2−EC) に対する結果と考える方が妥当であろう。

<u>定理6</u>　EQW−NRP$_1$(3−EC)，EQW−NRP$_2$(3−EC) のいずれに対しても $O(|V_G|(|V_G|+|E_G|))$ アルゴリズムが存在する。

<u>定理7</u>　EQW−NRP$_2$(k−EC) には $O(k^2|V_G|^2\alpha)$ アルゴリズムが存在する。但し，$\alpha=|V_G|^2+k|V_G|+|E_G|$ である。また，$k\geqq 2$ とする。

<u>4．あとがき</u>

拡大構成問題を，Domain(W_G)を与えるという形で統一的に扱った。また，従来からの定義を若干拡張して，点部分集合に対する拡大構成問題を定義導入して議論した。得られた結果を従来からの結果とともに次表にまとめておく。なお，表の結果を参照するときには，その拡大構成問題の定義に注

意されたい。なお，定理1は表には記載していない。表中のNPC，Pはそれぞれ NP-完全，多項式時間可解を示す。また

		重み	C	$k=2$	$k=3$	$k \geq 4$
無向グラフ	$N=V_G$	有	VC	NPC[1]	NPC[8]	
			EC	NPC[1]	定理2	
		無	VC	$\Theta(V+E)$[1]*	$\Theta(V^3)$[8,9]	
			EC	$\Theta(V+E)$[1]*	定理6	定理7 ($k \geq 2$)
	$N \subset V_G$	有	VC	NPC	NPC	
			EC	NPC	定理2	
		無	VC	$\Theta(V+E)$[12]	定理4	
			EC	定理5	定理6	
有向グラフ	$N=V_G$	有	STC	NPC[1]*		
		無		$\Theta(V+E)$[1]		
	$N \subset V_G$	有		NPC		
		無		定理3		

空グラフ	$N=V_G$	重みなし	k-EC**	P[11]
有向木			k-EC	P[10]
無向木			k-EC	P[18]
2進有向木			k-VC	$\Theta(kV)$[13]

(* [3] で $\Theta(V^2)$ 近似アルゴリズムが示されている。
** $\mathrm{Domain}(W_G) = E_{K_n}$ である。)

$V = |V_G|$，$E = |E_G|$ である。

文献

[1] K.Eswaran and R.Tarjan, Augmentation problems, SIAM J. Comput.,5,4(1976)653-665.

[2] A.Rosenthal and A.Goldner, Smallest augmentations to bi-connect a graph, SIAM J. Comput.,6,1(1977)55-66.

[3] G.Frederickson and J.Ja'ja', Approximation algorithms for several graph augmentation problems, SIAM J. Comput.,10,2 (1981)270-283.

[4] J.Hopcroft and R.Tarjan, Dividing a graph into triconnected components, SIAM J. Comput.,2,3(1973)135-158.

[5] S.Baase, Computer Algorithms: Introduction to Design and Analysis, Addison-Weslwy,MA.,1978.

[6] S.Even, Graph Algorithms, Pitman, London,1979.

[7] F.Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, MA.,1969.

[8] 渡辺，中村，辺の付加による3点ー連結度の増加問題，信学技報 AL81-26 (1981-07).

[9] T.Watanabe and A.Nakamura, On a smallest augmentation to triconnect a graph, Tech. Rep. C-18, Dep. of Appl. Math., Faculty of Engineering, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, Japan (1983).

[10] 梶谷，上野，有向木から拡大構成される最小k－枝連結有向グラフ，信学技報 CAS83-3 (1983-05).

[11] H.Frank and W.Chou, Connectivity considerations in the design of survivable networks, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-17(1970)486-490.

[12] 藤田，渡辺，翁長，グラフの2重連結化問題，昭和58年度電気四学会中国支連大 52221 (1983-10).

[13] 増澤，萩原，和田，都倉，k－頂点連結性に関する有向

2進木の拡大構成問題，信学論(D)，J67-D，1 (1984) 77-84.

[14] 高橋，ネットワークモデルの構成に関する基礎的研究，昭和58年度広島大学大学院工学研究科修士論文(1984).

[15] 渡辺，中村，辺の付加によるk-辺連結グラフ構成問題，信学技報 AL83-90(1984-03).

[16] M.Garey and D.Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, Freeman, London, 1978.

[17] A.Aho, J.Hopcroft and D.Johnson, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, MA., 1974.

[18] 上野，梶谷，和田，木から拡大構成される最小k-枝連結グラフ，信学技報 IN83-6 (1983-05).

[19] 渡辺，中村，高橋，グラフの点部分集合に対する拡大構成問題，信学技報 AL83-89 (1984-03).