数理解析研究所講究録
第534巻 1984年 234-246

選択ネットワークにおける最小費用流問題の解法と集積回路の配置配線設計への応用

中森 眞理雄　　水谷 晃　　掛川 誠　　清水 敬子
（東京農工大学工学部数理情報工学科）

１． はじめに

設計は工学の主要な目標のひとつである。

しかし、入力された要求仕様に対して、あたかも方程式を解くように、図面やプログラムを出力する設計システムや設計手法は存在しない。それは、設計という行為が思考錯誤や直感的なひらめきを本質的な要素として含んでいるためであり、これが設計と解析の異なる点である。

現実の設計においては、設計対象のモデルを作り、パラメータの値を適当に定めてそのモデルを解析し、必要に応じてパラメータの値を修正する、という手順が繰り返されることが多い（モデルの構造自体をパラメータとすることもあるが、それはモデルのレベルが一段高くなったにすぎない。数学における関数の最大・最小化問題と変分問題との関係も、これと似た話である）。

オペレーションズ・リサーチ（以下ＯＲと略す）においても同様のことが言える。ＯＲは「政策決定の科学的方法」と定義されているが、神様のお告げのように政策を天下りに与えてくれるわけではない。モデルを作り、適当なパラメータ値のもとにそのモデルを解析し、パラメータ値を修正する、という手順が繰り返される点では、ＯＲも設計と本質的に異なる物ではない。

ここで大切なことは、ＯＲの主要な課題が「モデルを作ること」にあるのであって「モデルを解析すること」にあるのではないということである。ＯＲにおいては「モデルが作られれば問題は９０％解けた」といわれるが、これはよいモデルを作ることの重要性を強調したものと言えよう。このことは設計においてもなりたつことである。

「モデルを作ること」と「モデルを解析すること」では価値基準においても違いが見られる。前者の価値基準が「よさ」であるのに対し、後者の価値基準は「正確さ」である。

モデルの「よさ」の定義はむずかしいが、ここでは一応

（１）　対象の構造を反映していること、

（２）　数量的に記述されていること、

（３）　実用的な解法が存在すること（あるいは、存在する見込みがあること）、

としておく。

時には、モデルが人間の判断を含むことがある。この場合は、モデルを解析する過程で人間が介入する必要が生ずる。グラフィック・ディスプレイを通じて対話的に設計するのはこの典型的な例である。しばしば「Computer Aided Design か、 Design Automation か」の論争があるが要するにモデルがどの程度人間を含んでいるのかの問題であり、極論するならば、モデルの完成度の問題であろう。

設計において用いられるモデルとＯＲにおいて用いられるモデルには、本質的に同じ構造を持つものが多い。したがって、モデルを解析する手法においても、設計とＯＲでは共通点があるはずである。もちろん、両者の間には、伝統的な研究姿勢の違いもある。ＯＲが初期に数学の一部門として発達したこともあり、ＯＲの研究者は厳密解法を好む傾向がある。一方、設計の研究者は能率のよい近似解法を好む傾向があるが、近似解が厳密解に匹敵する「よさ」をもっているという保証はない。

本稿では、自動設計とＯＲの間の溝を埋めることを目的として、ＯＲの手法の自動設計への応用を試みる立場から、集積回路の配置・配線設計において筆者らが作ったモデルを紹介し、類似のＯＲ問題の解法を拡張した算法を述べる。

２． ジョブ・ショップ・スケジューリング問題と配線問題

ＯＲの代表的な問題にジョブ・ショップ・スケジューリング問題（ＪＳＰと略す）がある。ＪＳＰは集積回路の配線問題とよく似た構造をもっている。

2.1　ＪＳＰとは

ＪＳＰとは、品物 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_q$ を機械 $M_1, M_2, \cdots, M_m$ で加工するとき、所要時間（最初の加工が始まってから最後の加工が終るまでの経過時間）を最小にする問題である。与えられているのは各品物を加工する機械の順序と各加工に要する時間で、求めるものは各機械が加工する品物の順序である。

図１はＪＳＰの制約条件を選択グラフを用いて記述した例である。ここで 点１，…，11 は加工を表し、点 so と si は全作業の開始と終了を表す。実線はｃ弧とよばれ同一の品物における２つの連続する加工を結ぶ。破線はｄ弧とよばれ同一の機械による２つの加工を結ぶ。ｄ弧の向きは問題が与えられた時点では未定であり、各ｄ弧の向きを定めるのがＪＳＰである。

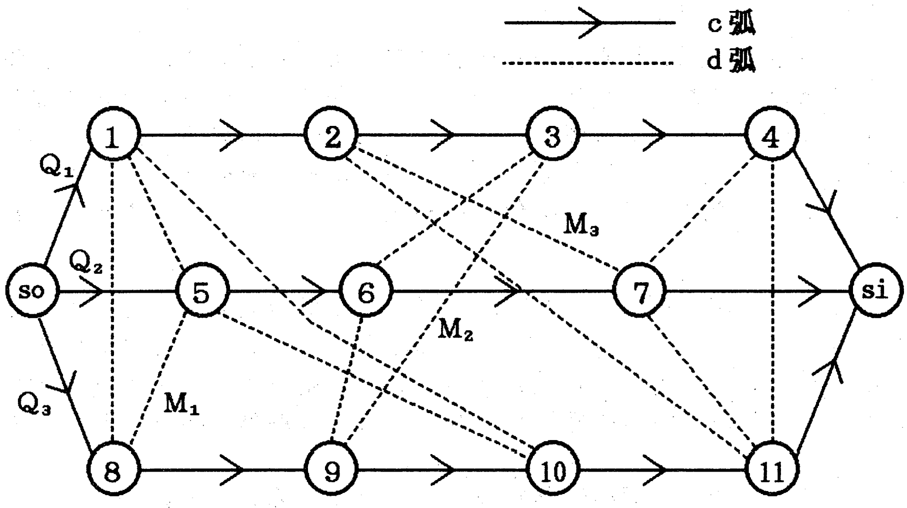


図１．ＪＳＰの選択グラフ

2.2　ＪＳＰの解法

仮に各ｄ弧の向きをそれぞれ定めれば、有向閉路が生じないかぎり、各加工の開始時刻を定めることができる。これは周知の日程計画問題であり、クリティカル・パスの長さが所要時間となる(ただし、各ｃ弧、各ｄ弧の始点の加工時間をその弧の長さとする)。ｄ弧の向きのあらゆる組合せの中でクリティカル・パスの長さが最小となるものがＪＳＰの解である。すなわち、ＪＳＰは選択グラフにおける日程計画問題というモデルで表される。

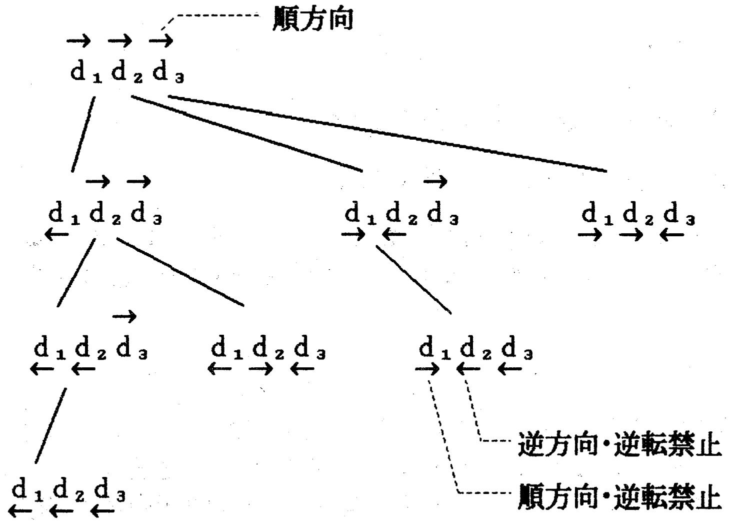


図２．組合せの列挙

ＪＳＰの解法としては、しらみつぶし的な方法しか知られていない。すなわち、前述のように、ｄ弧の向きのあらゆる組合せを列挙し、それぞれについて日程計画問題を解き、クリティカル・パスの長さが最短となるものを求めるという方法である（もちろん、後で述べるように、本当にあらゆる組合せを作りだすわけではない)。組合せを列挙する方法は図２のとおりである。まず何らかの方法で組合せをひとつ作り、これを初期解とする。ｄ弧をひとつ選び、その向きを逆転し子を作る。一般にはひとつの親から複数の子が作られる。この操作を子につ

いても行う。同じ組合せが２回以上作られるのを防ぐため、祖先において逆転されたｄ孤は子孫において再逆転せず、兄において逆転されたｄ孤は弟とその子孫において逆転前の向きとし逆転しない。逆転を禁止されたｄ孤は固定されているといい、それ以外の孤は自由であるという（文献［１］）。

上記の列挙方法をそのまま実行するとすべての組合せが作りだされてしまうため膨大な計算時間が必要となり実用的でない。既存の多くの解法では良い解が存在しない方向の探索を避けるために種々のテストを施している。それらは線形計画法的見地から次のように分類される（文献［２］，［３］）。

（Ａ）　０テスト　　自由なｄ弧を無視したグラフにおけるクリティカル・パスの長さＬはこれから導かれる子孫のいずれのクリティカル・パスの長さよりも短い（または等しい）。Ｌがそのときまでに得られている最短のクリティカル・パスの長さ以上であるならば、これから子孫を作る必要はない。日程計画問題は一種の線形計画問題であるから、このテストは「一部の制約条件を無視して目的関数を最適化してみることによるテスト」と解釈される。

（Ｂ）　Δテスト－１　　上記の列挙方法は有向閉路を含む組合せも作りだしてしまう。これを防ぐには、クリティカル・パスに含まれないｄ弧は逆転しないことにすればよい。

また、クリティカル・パスに含まれないｄ弧を逆転しても、得られる子のクリティカル・パスの長さが短くなることはない。本項の逆転規則はこのような無駄な探索を避ける役割も果している。

ひとつの組合せにおいて、各加工の開始時刻を求める問題を主問題とすれば、クリティカル・パスを求める問題は双対問題である。すなわち、本項の逆転規則は「双対問題によるテスト」と解釈することができる。

（Ｃ）　Δテスト－２　　加工 i から加工 j へのｄ弧を逆転して得られる子のクリティカル・パスの長さｖは次式で与えられる。

$$v = \max (x, y, z)$$

ただし、

$$x = \max \{f_k + d_{kj} \mid k \} + d_{ji} + \max \{ d_{il} + g_l \mid l \}$$

$$y = \max \{ f_k + g_k \mid k \in X \cap Y \}$$

$$z = \max \{ f_k + d_{kl} + g_l \mid k \in X \cap Y^c , l \in X^c \cap Y \}$$

f_p ：親のグラフにおいて点 so から点 p への最長距離、

g_q ：親のグラフにおいて点 q から点 si への最長距離、

X ：親のグラフにおいて点 so からの最長路がｄ弧 $i \to j$ を通らない点の集合、

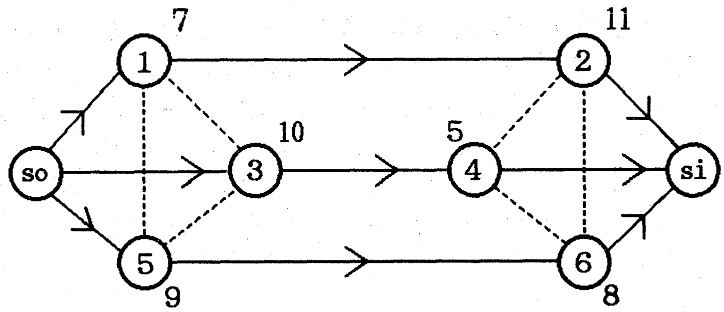
Y ：親のグラフにおいて点 si への最長路がｄ弧 $i \to j$ を通らない点の集合、

X^c, Y^c ：X, Y の補集合、

d_{pq} ：d弧 $p \to q$ の長さ

もしｖが既に得られている最短のクリティカル・パスの長さ以上であり、この子において自由なｄ弧がないならば、この子においてクリティカル・パスを求める必要はない。このテストは、「子の日程計画問題に親の解を代入し、子の双対問題の目的関数の最適値を求める方法」と解釈される。

図３の選択グラフで記述されるＪＳＰを解いた例を図４に示す（ただし、機械の代数ｍが１または２のときは、能率のよい別の解法が知られているので、図３，図４は解法の説明としては必ずしも適切ではない)。



各点の傍の数値は加工時間

図３．ＪＳＰの問題例（解法は図４）

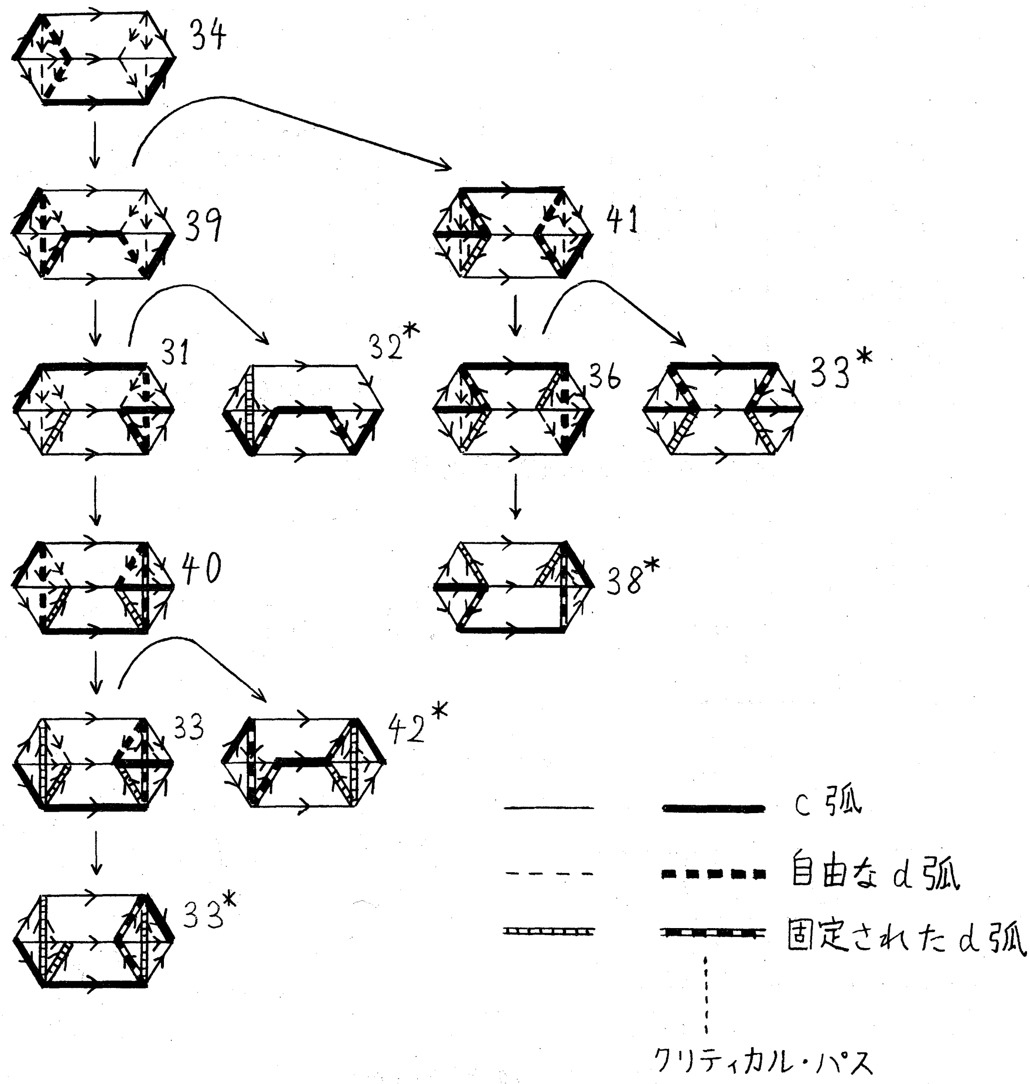


図４　ＪＳＰの解法

２.３　配線問題

集積回路の配線問題（配線経路決定問題）は特殊なＪＳＰと考えることができる。ただし、 配線は幹線支線方式によるとする。 すなわち、ｘ軸方向のセル列に並べられたセル(NAND, NOR, フリップ・フロップなどの基本的な論理回路)の端子間の信号線をｘ軸方向、ｙ軸方向の格子に沿って配線することとする。ｘ軸方向とｙ軸方向の信号線は別の層に作られるので、両者が単に交わるだけでは結線は生じない。両者の結線はスルーホールを設けることにより行れる。ｘ軸方向の信号線を幹線、ｙ軸方向の信号線を支線とよぶ。また、ｘ軸方向の格子をトラックとよぶ。トラック数が最小となるように配線経路を決定するのが配線問題である。

今、セルの位置とセル端子の位置が定められているとして、各幹線にトラックを割り当てる問題を考える。このとき、幹線をＪＳＰにおける加工と考えることにする。幹線同士が重なることはできないことからｄ弧が生ずる。支線同士が重なることはできないことからｃ弧が生ずる。一方のセル列をＪＳＰにおける全作業の開始点 so 、他方のセル列を全作業の終了点 si と見なすことにすれば、配線幅はクリティカル・パスの長さとなる（図５）。すなわち、配線問題も選択グラフにおける日程計画問題というモデルで表される。

ＪＳＰと配線経路決定問題との違いは、後者においてはすべての弧の長さが同じであること、後者においてはｃ弧だけで有向閉路が生ずることがあり、幹線を分割することによりそのような有向閉路をとり除くという前処理が必要であること（図６）、有向閉路が存在しない場合でも配線幅を縮小するために幹線(加工)を分割することが許される、の３つである（文献［４］,［５］）。

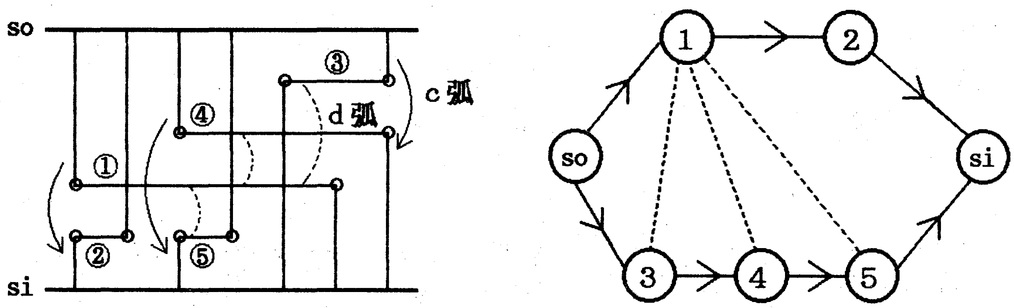


図５．配線経路決定問題と選択グラフ

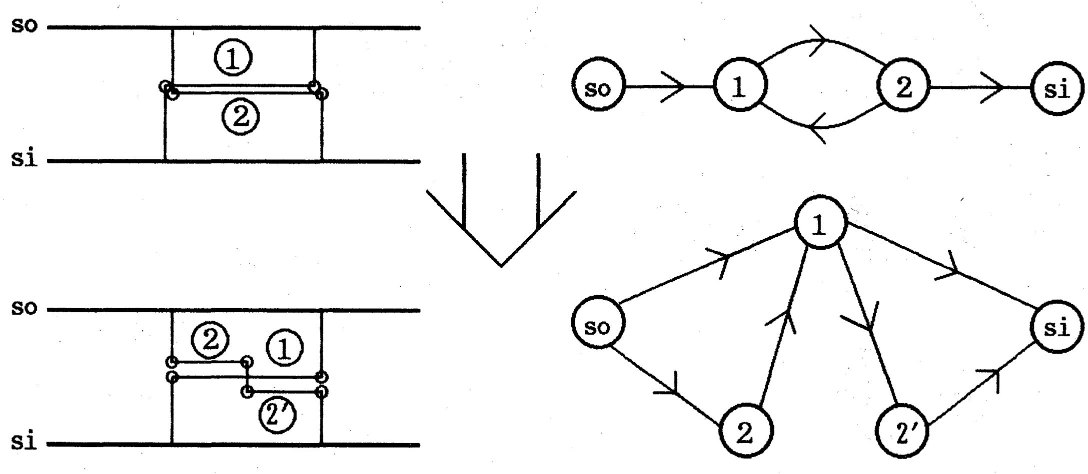


図６．　有向閉路の除去

３．力学モデルを用いた配置手法

３．１　配置問題の力学的モデル

図７のような両側端子セルを図８のようにセル列に配置し、配線領域を用いて配線することにする。

配置の良さを評価するために、セルの勢力範囲を定義する。仮にすべてのセルの配置が定められているとして、セルｉから出て行く信号線の行先のセルを含む最小の長方形をセルｉの勢力範囲とよびＲ(ｉ)と記すことにする。各セルについて勢力範囲が定義される。ただし、ボンディング・パッドもセルとして扱うのでボンディング・パッドにも勢力範囲が定義される。セルｉの勢力範囲Ｒ(ｉ)の大きさは

$$f(r_y(i)) + g(r_x(i)) \qquad (1)$$

と定義する。ただし、$r_x(i), r_y(i)$はＲ(ｉ)のｘ軸,ｙ軸方向の長さであり、ｆ,ｇは図９のような下に凸の関数とする。以下では、セルの勢力範囲の大きさの和

$$\Sigma_i f(r_y(i)) + \Sigma_i g(r_x(i)) \qquad (2)$$

を最小とすることを目標とする。ただし、式(2)において、Σはすべてのセル（ボンディング・パッドも含む）についての和を表す。

以上の定義による勢力範囲の大きさは図10のような機構の双対エネルギーとして求めることができる。ただし、この機構において、ばねは負荷が０のとき長さが０で、特性（応力と歪みの関係）は図11のようになっているとする。

このような機構を各セルの勢力範囲に対応して作り、 それらを図12のように重ねる。図12において、同一のセルに対応する黒丸同士は ｚ軸方向に互いに連結され連動してｘ-ｙ平面内を動く。図12の機構における総双対エネルギーがセルの配置の良さである。

３．２　配置問題の算法

いくつかのセル（たとえばボンディング・パッド）の配置が定められているときに、上記の力学モデルをあてはめて、配置が未定のセルの力学的に安定な配置を求めることができる。力学において次の３つの問題

（Ｐ１）釣合いの条件をみたし総エネルギーが最小の応力分布を求めること。
（Ｐ２）歪みの整合性の条件をみたし総双対エネルギーが最小の歪み分布をもとめること。
（Ｐ３）応力の釣合いの条件、歪みの整合性の条件、ばねの特性の条件をすべてみたす応力と歪みの分布を求めること。

が同等であることから、力学的に安定な配置において式(２)の値が最小となる。複数のセルが同じ場所に来たりセル列以外の場所にセルが来たりするなどの“許されない配置”も許すことにするならば、力学的に安定な配置を求める計算は容易である。特に、ばねの特性が図13のように階段状となっているときは、ネットワーク・フロー理論で周知の最小費用流問題の算法を利用することができる。

一方、配置が未定のセルについてあらゆる“許される配置”を列挙し、それぞれについて総双対エネルギーを計算して最小値を求めることにすれば、最良の“許される配置”を得ることができる。しかし、これは膨大な計算時間を要する。

そこで、この両者を組み合わせた算法を用いることにする。すなわち、列挙の過程で、“許されない配置”の計算結果に基づく種々のテストを施し、良い配置が得られる見込のない方向への列挙は避けることにして、計算の高速化をはかる。

式(２)はｘ成分とｙ成分の和に分解されるので、総双対エネルギーが最小の“許される配置”を求めるには、まずｙ方向の総双対エネルギーが最小となるようにセルをセル列に割り当て（ただし、各セル列においてセルのｘ方向の長さの和がそのセル列のｘ方向の長さ以内となるように割り当てる）、次にその割り当てのもとで、ｘ方向の総双対エネルギ

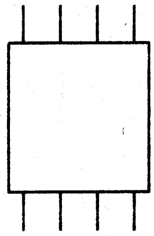


図７．両端子セル

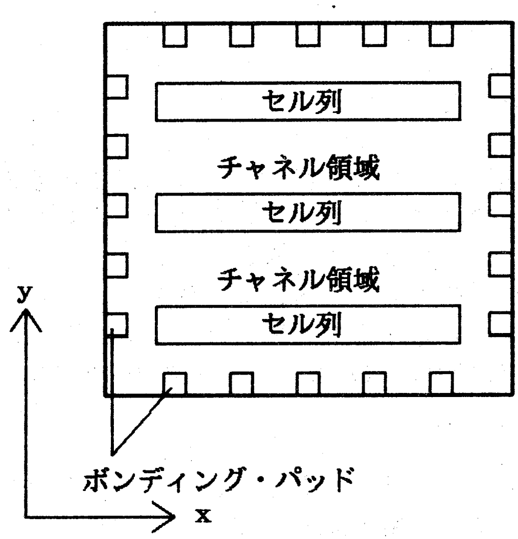


図８．配置配線のモデル

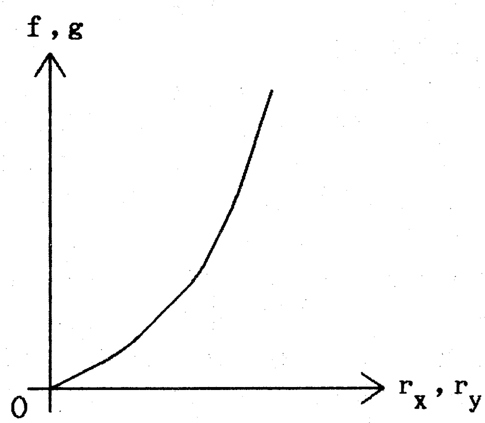


図９．関数ｆ，ｇ

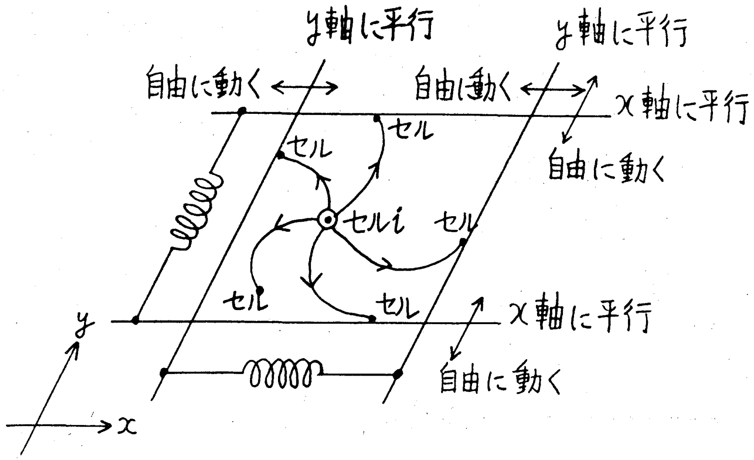


図11．勢力範囲の計算機構

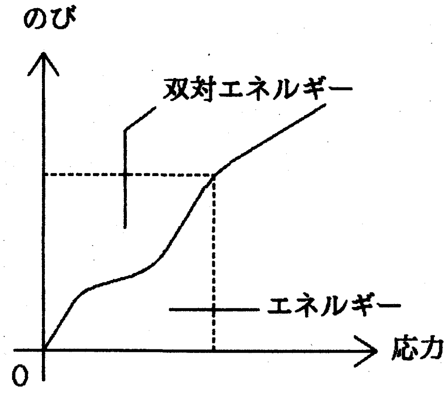


図10．ばねの特性

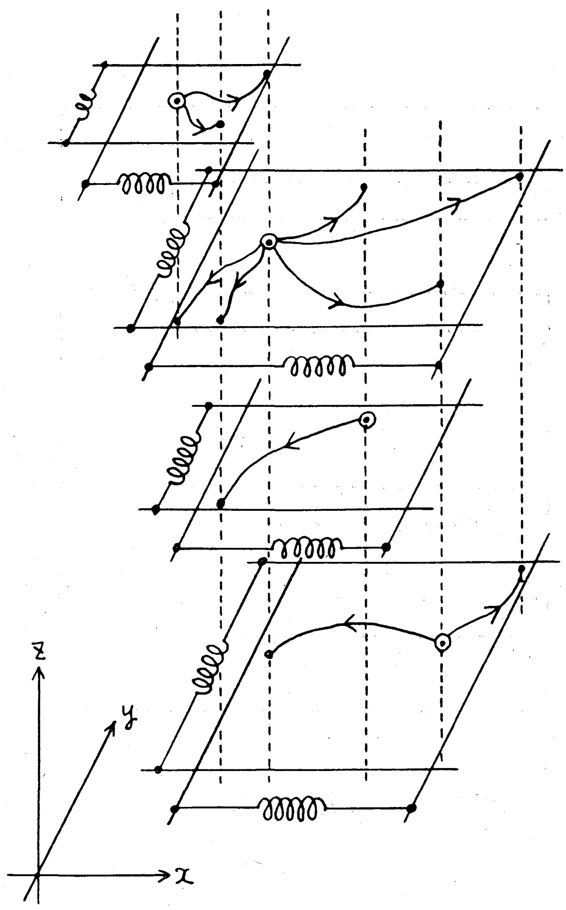


図12．勢力範囲の大きさの和の計算機構

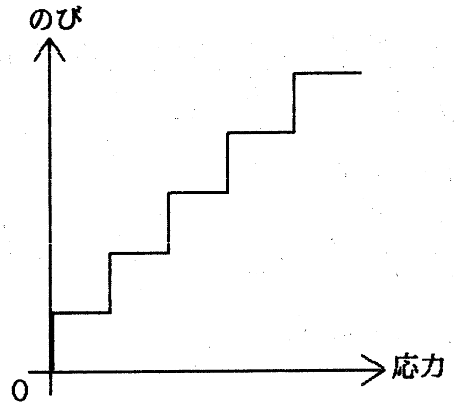


図12. 本モデルにおける
ばねの特性

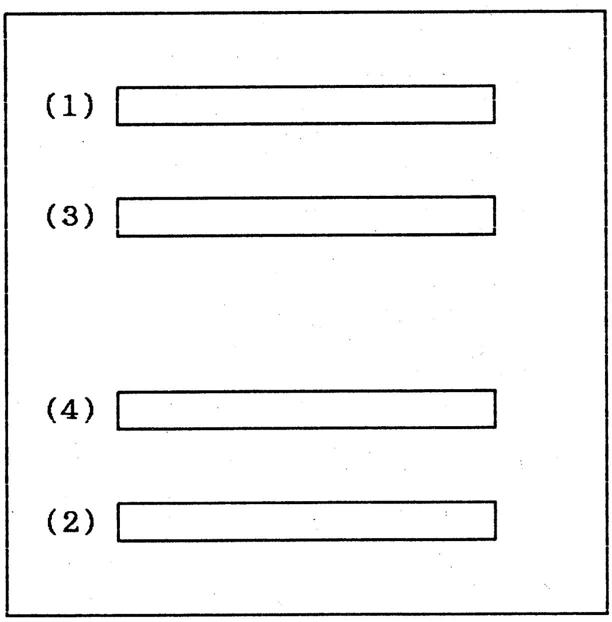


図14. 列への割当て順序

ーが最小となるように各セル列内においてセルを並べればよい。

以上をまとめた配置問題の解法は次のとおりである。

あらかじめ、セル列に外側から順に番号をつけておく(たとえば図14)。また、セル列(ｉ)に対してセル列(ｉ＋１),…,(ｐ) を含む最小の長方形を<u>自由領域</u>(ｉ) とよぶ。

まず、あらゆるセルの組合せ（ただしｘ方向の長さの和がセル列（１）の長さ以内のものだけ）を列挙し、それらをセル列（１）に割り当てたとき（その他のセルの配置は、自由領域（１）内なら“許されない配置”でもよいとする）の力学的安定状態と総双対エネルギーを計算し（ただし、計算はｙ方向だけについて行う）、総双対エネルギーが最小の組合せをセル列（１）のセルとする。

次に、残ったセルからあらゆる組合せ（ただし、ｘ方向の長さの和がセル列（２）の長さ以内のものだけ）を列挙し、それらをセル列（２）に割り当てたとき（その他のセルの配置は、自由領域（２）内なら“許されない配置”でもよいとする）の力学的安定状態と総双対エネルギーを計算し（ただし、計算はｙ方向だけについて行う）、総双対エネルギーが最小の組合せをセル列（２）のセルとする。

この操作を繰り返す。

それぞれのセル列において、セルのあらゆる組合せを作り出す手順は次のとおりである。対象となる各セルについて「外・自由」「内・固定」「外・固定」の３通りの状態を考え、すべてのセルが「外・自由」の状態から次の手続きを実行する。

```
procedure search(f);
  begin
    if 内・固定のセルのｘ方向の幅の和＜セル列のｘ方向の長さ
      then
        begin
          (ア);
          while 外・自由なセルが存在する
            begin
              そのようなセルｉを選ぶ；
              f[i]:=内・固定；
              search(f);
              f[i]:=外・固定;
            end;
        end;
  end;
```

ここでｆは「外・自由」、「内・固定」、「外・固定」を表す変数である（call by value)。

セルのセル列への割当がすべて決定したら、各セル列内のセルの順序を定める。

上記と同様の方法で、まず、セル列（１）のセルについて、ｘ軸方向のあらゆる順序を列挙し、総双対エネルギーが最小となる順序を求める。このとき、セル列（２），… のセルの位置はその列内ならｘ方向にはどこでもよい（“許されない配置”でもよい）とし、総双対エネルギーの計算はｘ方向についてだけ行なう。

次に、セル列（２）のセルについてｘ軸方向のあらゆる順序を列挙し、総双対エネルギーが最小となる順序をもとめる。このときセル列（３），… のセルの位置はその列内ならｘ方向にはどこでもよい（“許されない配置”でもよい）とし、総双対エネルギーの計算はｘ方向についてだけ行う。

この操作を繰り返す。

それぞれのセル列において、セルのあらゆる順序を作り出す手続きは次のとおりである。

```
procedure permute(p, f);
  begin
    i:=1;  (イ);
    while i≦m do
      begin
        if f[i]=自由
          then
            begin
              f[i]=固定； j:=i+1
              while j≦m do
                begin
                  if f[j]=自由
                    then
                      begin
                        p[i] と p[j] の内容を交換；
                        permute(p,i+1) ；
                        p[i] と p[j] の内容を交換；
                      end;
                  j:=j+1;
                end;
            end;
        i:=i+1
      end;
  end;
```

ここで、pはこのセル列におけるセルのならびを表し、fは「自由」、「固定」を表す。また、mはこのセル列におけるセルの個数を表す。始めに、セルの適当な並びをp内に作っておき、f[1],..., f[m] はすべて自由としておく。

手続き search, permute において、自由なセルの位置を“許されない配置”も許すことにして力学的安定状態を求めると、それに対応する総双対エネルギーの値は自由なセルのあらゆる“許される配置”に対する総双対エネルギーの値の下界となる。このことを探索方向のテストに利用することができる。すなわち、手続き search, permute において(ア)、(イ)の部分で上記の“許されない配置”を許して力学的安定情態を求めてそれに対応する総双対エネルギーの値を求める。この値がすでに得られている最良の（つまり、総双対エネルギーが最小の）“許される配置”の総双対エネルギーの値以上ならば、その search,permute をそれ以上続ける必要はない。

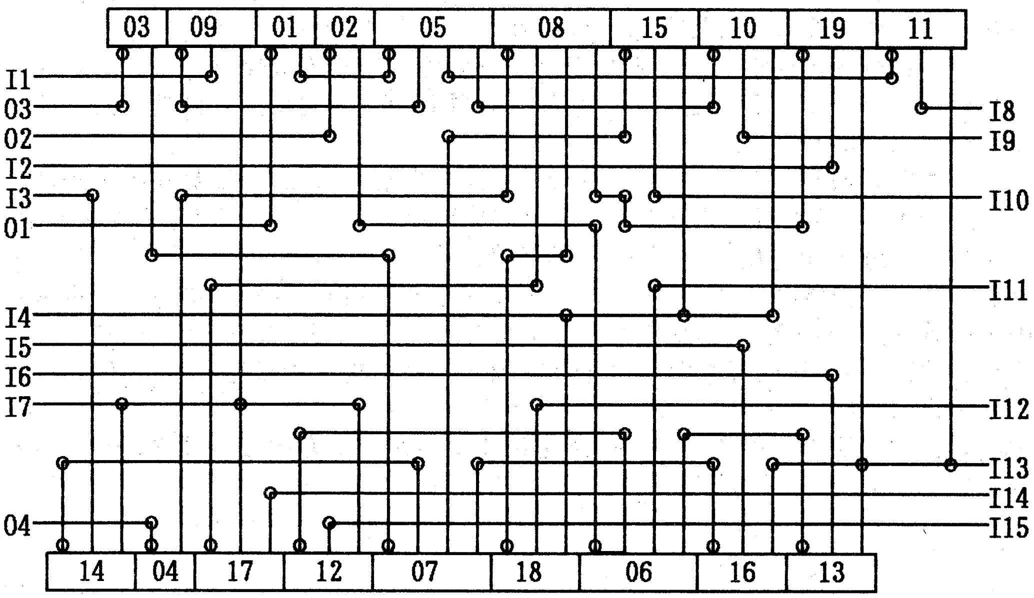
図15（a）は某企業の配置配線システムによる設計例、同（b）は同じ回路を筆者の手法によってx軸方向（横方向）についてだけ配置し直したものである。

４． おわりに

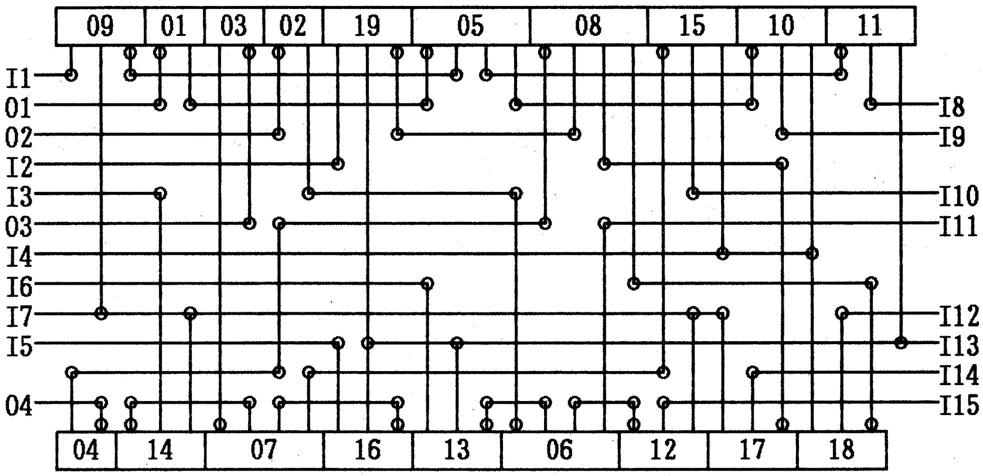
ORにおいて広く使われている手法をＬＳＩの設計に応用する試みについて述べた。本稿で述べた手法は厳密解法であり計算時間が長いのが欠点であるが、階層的な設計や分割設計が行われる場合は有望な手法と言えよう。

謝辞

本研究に関し数々の助言を賜った日立製作所中央研究所小澤時典氏、寺井秀一氏、東京農工大学垂井康夫教授、髙橋延匡教授、九州大学駒宮安男教授、東京大学管野卓雄教授、本研究に協力してくれた東京農工大学学生牛山一也君、佐原信幸君に感謝申し上げる。



（a）他方式



（b）本方式（セルの列への割当は（a）と同じとし、上の
列を最適化し次に下の列を最適化したもの）

図15．配置配線例

参考文献

［１］E.Balas, " Machine sequencing via disjunctive graph : an implicit enumeration algorithm " , J. Operations Research Society of America, Vol.17, pp.941-957 (1969).

［２］中森，"組合せ的構造を有する数理計画諸問題の解法への統一的接近法"，情報処理学会第２４回全国大会講演論文集，４Ｃ－１０ (1982).

［３］中森，"組合せ的構造を有する数理計画問題の諸解法の分類－ジョブ・ショップ・スケジューリング問題の場合"，情報処理学会第２６回全国大会講演論文集，１Ｌ－２ (1983).

［４］牛山，佐原，清水，中森，"スケジュール問題を応用したLSI配線設計アルゴリズムの予備的考察(1)－選択グラフの作成と有向閉路の除去－"，情報処理学会第２８回全国大会講演論文集，６Ｐ－１ (1984).

［５］佐原，牛山，清水，中森，"スケジュール問題を応用したLSI配線設計アルゴリズムの予備的考察(2)－階段配線のグラフモデル－"，ibid，６Ｐ－２ (1984).

［６］中森，"LSIの配置配線設計への数理計画法による統一的接近法"，ibid，６Ｐ－３ (1984).

［７］水谷，掛川，清水，中森，"分枝限定法を用いたセル方式LSIの配置設計アルゴリズム"，ibid，６Ｐ－４ (1984).