数理解析研究所講究録
第534巻 1984年 298-309

二つのグラフの共通木グラフについて

福井大工　松本 忠　(Tadashi Matsumoto)
福井大工　北井幹雄　(Mikio Kitai)
東工大工　梶谷洋司　(Yoji Kajitani)

1　まえがき

一つのグラフの木グラフ，中心木，周辺木などについては良く研究されており，周辺木集合の持つ性質から一つのグラフの基本分割や木集合の最適類別パラメータの決定問題などが解明されている[1]。しかし，二つのグラフに対するこれらの問題は十分に研究されていないようである[2]。

本小文では，グラフ構造の表現法として連鎖的経路なる概念[3]を用い，同一枝集合を持つ二つのグラフの共通木グラフの性質を考察する。すなわち，まず二つのグラフの共通木の初等変換を一つのグラフの木の初等変換の自然な拡張形として与え，次に距離公理を満足する共通木の距離を定義し，更にはこのような共通木の初等変換の概念の下で与えられる共通木グラフの連結性，ハミルトン閉路の存否を考察する。

2 準備

以下では，同一枝集合Eを持つ二つのグラフをG_1，G_2とし，G_1，G_2には少なくとも一つの共通木が存在するものとする。まず，二つのグラフの共通木の初等変換を明らかにするための準備として，G_1，G_2の連鎖的経路グラフ，連鎖的基準経路，連鎖的閉路，全節点サイクルなどを定義する。

［定義1］[3] 同一枝集合を持つ二つのグラフG_1，G_2の任意の一つの共通木をt_iとし，t_iの下でのG_1の基本タイセット行列の主要部とG_2の基本カットセット行列の主要部をそれぞれ$\mathbb{B}(t_i)$，$\mathbb{Q}(t_i)$とする。このとき$\mathbb{B}(t_i) \triangleq [b_{jk}]$と$\mathbb{Q}(t_i) \triangleq [q_{jk}]$を節点・節点接続行列とみなして，以下の(i)，(ii)の操作で得られる有向グラフを，共通木t_iの下での連鎖的経路グラフと呼び，$\hat{G}(t_i)$と記すことにする。

(i) $\mathbb{B}(t_i) \triangleq [b_{jk}]$ ($\mathbb{Q}(t_i) \triangleq [q_{jk}]$)の各行，各列に対応する節点をそれぞれ$G_1$の補木枝節点，$G_1$の木枝節点（$G_2$の木枝節点，$G_2$の補木枝節点）と呼び，対応する枝をそれぞれ一重丸，二重丸（二重丸，一重丸）で囲んで表す。更に，$\mathbb{B}(t_i)$の要素b_{jk}（$\mathbb{Q}(t_i)$の要素q_{jk}）が非零のときそのときに限り$\mathbb{B}(t_i)$（$\mathbb{Q}(t_i)$）のk列に対応するG_1（G_2）の木枝（補木枝）節点から，$\mathbb{B}(t_i)$（$\mathbb{Q}(t_i)$）のj行に対応したG_1（G_2）の補木

枝（木枝）節点へ向う一本の有向枝を挿入する。この有向枝をB（Q）枝と呼び，実線（破線）で表す。

(ii) 同一枝に対応するG_1の木枝節点（G_1の補木枝節点）とG_2の木枝節点（G_2の補木枝節点）の間へG_2の木枝節点（G_1の補木枝節点）からG_1の木枝節点（G_2の補木枝節点）へ向う一本の有向枝を挿入し，これをC枝と呼び，一点鎖線で表す■

［定義2］(3) (i) $\hat{G}(t_i)$のG_1の木枝節点e_x（G_2の補木枝節点e_y）から，G_1の補木枝節点e_wあるいはG_2の木枝節点e_zへの，$\hat{G}(t_i)$上の枝の矢印に沿った一連の経路が存在するならば，その経路をG_1の木枝節点e_x（G_2の補木枝節点e_y）からG_1の補木枝節点e_wあるいはG_2の木枝節点e_zへの連鎖的基準経路と呼ぶ。但し，$\{e_x, e_z\} \subset t_i$，$\{e_y, e_w\} \subset \bar{t}_i$で，$G_1$（$G_2$）の同一節点を二度以上通らないものとする。なお，$G_1$の$e_x$（$G_2$の$e_y$）から$e_y \neq e_w$なる$G_1$の$e_w$，あるいは$e_x \neq e_z$なる$G_2$の$e_z$への連鎖的基準経路上のB枝とQ枝の総数に1を足したものを，および，G_1のe_x（G_2のe_y）から$e_x = e_z$なるG_2のe_z（$e_y = e_w$なるG_1のe_w）への連鎖的基準経路上のB枝とQ枝の総数を，それぞれ経路長と呼ぶ。(ii) (i)で与えられた連鎖的基準経路の中で経路長が最短のものを連鎖的基本経路と呼ぶ■

本小文では，二つのグラフの任意の二つの共通木の関係を議論するのであるから，$\hat{G}(t_i)$上で着目するのは，高々G_1の

木枝節点$\circledcirc{e_x}$からG2の木枝節点$\circledcirc{e_x}$（G2の補木枝節点$\circledcirc{e_y}$からG1の補木枝節点$\circledcirc{e_y}$）への連鎖的基準経路で十分である。すると，これらの経路は$\widehat{G}(t_i)$上の有向閉路に対応しているので，次の定義を与えて表現の簡略化を図ることにする。

［定義3］[4]（i）$\widehat{G}(t_i)$上の，G1の木枝節点$\circledcirc{e}$からG2の木枝節点$\circledcirc{e}$（G2の補木枝節点ⓔからG1の補木枝節点ⓔ）への連鎖的基準経路を，木枝節点$\circledcirc{e}$（補木枝節点ⓔ）を通る連鎖的閉路と呼び，その閉路長を閉路上のB枝とQ枝の総数とする。

（ii）$\widehat{G}(t_i)$上の，木枝節点$\circledcirc{e}$（補木枝節点ⓔ）を通る連鎖的閉路の一つを$L_{t_i}(e)$，$L_{t_i}(e)$上の節点集合に対応するG1，G2の枝部分集合を$E[L_{t_i}(e)]$としたとき，$L_{t_i}(e)$上の節点集合で決まる$\widehat{G}(t_i)$の点セクショングラフを$\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$と記す。但し，$E_1 \triangleq t_i \cap E[L_{t_i}(e)]$，$E_2 \triangleq \bar{t}_i \cap E[L_{t_i}(e)]$である。

（iii）$\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$上の互いに節点を共有しない有向閉路の集合の中で，$\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$上のすべての節点を含むものを，$\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$の全節点サイクルと呼ぶ■

［例1］　図1のG1とG2には表1に示したt_1～t_5の共通木が存在し，t_1に関する連鎖的経路グラフ$\widehat{G}(t_1)$を求めれば図2のごとくになる。図2でのG1の木枝節点$\circledcirc{e_4}$からG2の木枝節点$\circledcirc{e_4}$への連鎖的基準経路のすべてを求めると，次の(i)～(iii)となる。但し，表現の簡単化のためC枝を短縮してある。

(i) $e_4 \to e_2 \dashrightarrow e_1 \to e_5 \dashrightarrow e_4$

(ii) $e_4 \to e_2 \dashrightarrow e_6 \to e_7 \dashrightarrow e_1 \to e_5 \dashrightarrow e_4$

(iii) $e_4 \to e_3 \dashrightarrow e_6 \to e_7 \dashrightarrow e_1 \to e_5 \dashrightarrow e_4$

これら三経路は連鎖的閉路である特別な例であり，(i)～(iii)の閉路長はそれぞれ4，6，6であるから，(i)が木枝節点e_4を通る最短の連鎖的閉路である。更に(i)の閉路を$L_{t_1}(e_4)$と記すとき，$L_{t_1}(e_4)$上の節点集合$\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$で決まる$\hat{G}(t_1)$の点セクショングラフ$\hat{g}_{t_1}(e_1e_4, e_2e_5)$は図3となる。但し，$E_1 \triangleq t_1 \cap E[L_{t_1}(e_4)] = \{e_1, e_4\}$，$E_2 \triangleq \bar{t}_1 \cap E[L_{t_1}(e_4)] = \{e_2, e_5\}$である。$L_{t_1}(e_4)$は$\hat{g}_{t_1}(e_1e_4, e_2e_5)$上のすべての節点を通り，節点の共有はないから，$L_{t_1}(e_4)$は$\hat{g}_{t_1}(e_1e_4, e_2e_5)$の全節点サイクルでもある。なお，この例では全節点サイクルが1個しか存在しなかったが，一般には複数個存在し得る■

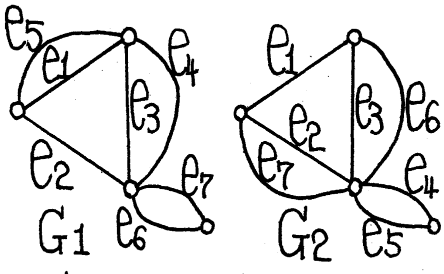

図1 二つのグラフG1とG2

t_i \ t_j	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
$t_1 = e_1e_4e_6$	0	1	1	2	3
$t_2 = e_1e_4e_7$	1	0	2	3	2
$t_3 = e_2e_4e_6$	1	2	0	1	3
$t_4 = e_2e_5e_6$	2	3	1	0	2
$t_5 = e_3e_5e_7$	3	2	3	2	0

表1 すべての共通木と$|t_i \cap \bar{t}_j|$

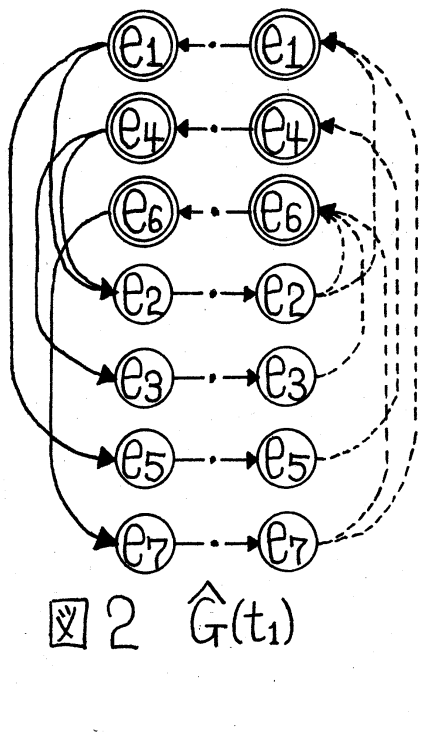

図2 $\hat{G}(t_1)$

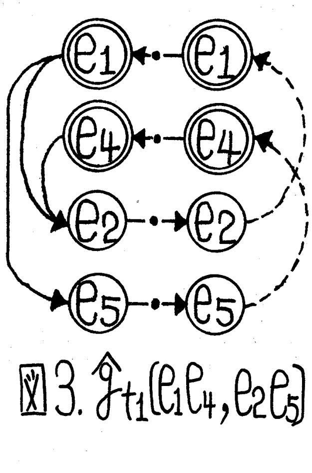

図3. $\hat{g}_{t_1}(e_1e_4, e_2e_5)$

3 共通木の初等変換と距離

まずは，二つのグラフ G_1，G_2 の任意の共通木を t_i とするとき，t_i により決まる連鎖的経路グラフ $\hat{G}(t_i)$ の有向閉路の性質を考えよう。 G_1（G_2）の枝集合を E としたとき，$E_a \subset E$ が，$E_b \subset E$ から $E_{bs} \subset E_b$ を取り除き，$E_{as} \subset E - E_b$ を加えて得られる関係にあるとき，つまり $E_a = (E_b - E_{bs}) \cup E_{as}$ のとき，$E_a = E_b(E_{as}/E_{bs})$ と書くことにする。

［補題1］ 共通木 t_i の下での連鎖的経路グラフを $\hat{G}(t_i)$ とし，$E_1 \subseteq t_i$，$E_2 \subseteq \bar{t_i}$，$|E_1| = |E_2| \neq 0$ なる枝集合 $E_1 \cup E_2$ に対応する $\hat{G}(t_i)$ の節点集合で決まる $\hat{G}(t_i)$ の点セクショングラフを $\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$ としたとき，$E_s \triangleq t_i(E_2/E_1)$ が，二つのグラフ G_1，G_2 の新たな共通木であるための必要十分条件は，$\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$ に奇数個の全節点サイクルが存在することである■

（証明省略）

［定義4］ G_1 と G_2 の任意の一つの共通木 t_i から $t_j = t_i(E_2/E_1)$ なる関係にある G_1 と G_2 の新たな共通木 t_j を得る操作を t_i から t_j への共通木の変換と呼ぶ。但し，$E_1 \subseteq t_i$，$E_2 \subseteq \bar{t_i}$，$|E_1| = |E_2| \neq 0$ であるとする■

次に，定義4の E_1，E_2 を具体的に決めるための種々の部分グラフを定義しよう。

［定義５］ (i) $\hat{G}(t_i)$ の点セクショングラフ $\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$ が奇数個の全節点サイクルを有しているとき，$\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$ をサイクルグラフと呼ぶ。 (ii) サイクルグラフの中で，全節点サイクルが１個しかなく，且つ，その全節点サイクルが１個の有向閉路のみから形成されているサイクルグラフを基本サイクルグラフと呼ぶ。 (iii) 基本サイクルグラフの中で，そのグラフ上に存在する有向閉路が１個のみであるものを最基本サイクルと呼ぶ■

［例２］ 例１の共通木 $t_1 = e_1e_4e_6$ に着目し，$\hat{G}(t_1)$ の木枝節点 e_4 を通る最短の連鎖的閉路 $L_{t_1}(e_4)$ より決まる点セクショングラフ $\hat{g}_{t_1}(e_1e_4, e_2e_5)$ 図３を考える。図３では奇数個（１個）の全節点サイクルがあるので，$\hat{g}_{t_1}(e_1e_4, e_2e_5)$ はサイクルグラフであり，更に全節点サイクルが $L_{t_1}(e_4)$ のみであるから少なくとも基本サイクルグラフである。しかし，$\hat{g}_{t_1}(e_1e_4, e_2e_5)$ は $L_{t_1}(e_4)$ と $e_1 \rightarrow e_2 \dashrightarrow e_1$ なる有向閉路を有するから，それは最基本サイクルグラフではない。次に，$L_{t_1}(e_1)$: $e_1 \longrightarrow e_2 \dashrightarrow e_1$ に着目すると，$E_1=\{e_1\}$，$E_2=\{e_2\}$ となり，$\hat{g}_{t_1}(e_1, e_2)$ は図４となる。それゆえ $\hat{g}_{t_1}(e_1, e_2)$ は最基本サイクルグラフである■

以上の準備の下で，共通木の初等変換を $\hat{G}(t_i)$ 上の有向閉路且つ最も基本的な共通木の変換と関連付けて定義しよう。

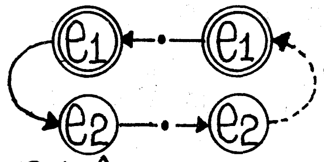

図４ $\hat{g}_{t_1}(e_1, e_2)$

［定義6］　$\hat{G}(t_i)$上の木枝節点ⓔ（補木枝節点ⓔ）を通る連鎖的閉路の一つを$L_{t_i}(e)$とし，$L_{t_i}(e)$上の節点集合で決まる$\hat{G}(t_i)$の点セクショングラフを$\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$としたとき，$\hat{g}_{t_i}(E_1, E_2)$が最基本サイクル（グラフ）であるとき，そのときに限り，共通木t_iから新たな共通木$t_j \triangleq t_i(E_2/E_1)$を得る際の共通木の変換を共通木の初等変換と呼ぶ。$E_1, E_2$の定義は定義3参照■

［定義7］　t_i，t_jを二つのグラフG_1，G_2の任意の二つの共通木とするとき，t_iからt_jを得るのに最低u回の共通木の初等変換を施すことが必要ならば，$D(t_i, t_j) = u$と記す■

以下では，任意の二つの共通木t_i，t_jに対して，値$D(t_i, t_j)$が零を含めた正整数で一意に与えられること，更には$D(t_i, t_j)$が距離公理を満足することを示したい。しかし，そのためには$\hat{G}(t_i)$のサイクルグラフ，基本サイクルグラフ，最基本サイクルグラフの諸性質を明らかにする必要があるが，本小文では紙数の制約よりそれらを省略する。まず，次の基本的性質が成立することが言える。

［定理1］　G_1とG_2の相異なる任意の二つの共通木をt_i，t_jとしたとき，次の(a)〜(d)を満足する共通木系列$\{t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, ---, t_{i+k}, t_j\}$が必ず存在する。

(a)　$0 \leq k \leq |t_i \cap \bar{t}_j| - 1$

(b)　$t_i, t_{i+1}, ---, t_{i+k}, t_j$は互いに異なる。

(c) $D(t_{i+l}, t_{i+l+1}) = 1$, $l = 0, 1, 2, \cdots, k$, $t_{i+k+1} \triangleq t_j$

(d) 系列 $\{t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+k}, t_j\}$ による t_i から t_j への共通木の変換で，変換に参加する枝集合は $(t_i \cap \bar{t}_j) \cup (\bar{t}_i \cap t_j)$ であり，且つ，同一枝が2回以上変換に参加することはない■

（証明省略）

定理1より，G_1，G_2 の任意の二つの共通木 t_i，t_j に対して決まる値 $D(t_i, t_j)$ は

$$0 \leq D(t_i, t_j) \leq |t_i \cap \bar{t}_j| \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

を満足することが分る。更に，次の性質が成立することが言える。

［補題2］　$D(t_i, t_j) = 1$ ならば $D(t_j, t_i) = 1$ である■

（証明省略）

［定理2］　$D(t_i, t_j)$ は距離公理 (i)～(iii) を満たす。

(i)　$D(t_i, t_j) \geq 0$，等号成立の必要十分条件は $t_i = t_j$ である。

(ii)　$D(t_i, t_j) = D(t_j, t_i)$

(iii)　$D(t_i, t_k) + D(t_k, t_j) \geq D(t_i, t_j)$

但し，t_i，t_j，t_k は G_1，G_2 の任意の三つの共通木である■

（証明）定義7，定理1，補題2および最基本サイクルグラフと共通木の初等変換の関係に関する性質を用いて示される■

［注I］　(i) 定義7の $D(t_i, t_j)$ は距離公理を満たし，$G_1 \equiv G_2$ のとき，$D(t_i, t_j) = |t_i \cap \bar{t}_j|$ となって従来の一つのグラフの木の距離に一致する。それゆえ，以下には $D(t_i, t_j)$ を二つ

のグラフ G_1，G_2の共通木 t_i，t_jの距離と呼ぶことにする。

(ii) 従来の一つのグラフでの木対 t_i，t_jに対しては

$$0 \leq D(t_i, t_j) = |t_i \cap \bar{t}_j| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

であり，且つ，t_iとt_jの距離に関与する枝集合は $(t_i \cap \bar{t}_j) \cup (\bar{t}_i \cap t_j)$ だけであったが，本小文の二つのグラフの共通木 t_i，t_jに対しては (1) 式であり，且つ，t_iとt_jの距離が一般には $(t_i \cap \bar{t}_j) \cup (\bar{t}_i \cap t_j)$ だけでは決まらないことに注意を要する。なお，このことは 注II で述べる別の共通木の初等変換の場合でも言えるものであることを付言しておく■

4 共通木グラフの性質

［定義8］ G_1，G_2の共通木をそれぞれ1個の節点で表し，任意の二つの節点に対応する二つの共通木の距離が 1のとき，そのときに限り，その二つの節点間へ無向枝を挿入して得られる無向グラフを G_1，G_2の共通木グラフと呼ぶ■

このとき，次の性質が成立することが言える。

［定理3］ 共通木グラフは連結グラフである■

（証明） ① G_1，G_2の相異なる任意の二つの共通木を t_i，t_jとしたとき，定理1によりそこで述べられた共通木系列 $\{t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+k}, t_j\}$ が必ず存在する。② これらの共通木 $t_i \sim t_j$ は共通木グラフではそれぞれ一つの節点に対応してい

る。③補題2より $D(t_{i+l}, t_{i+l+1})=1$ ならば $D(t_{i+l+1}, t_{i+l})=1$ である。よって，共通木グラフでは t_{i+l} と t_{i+l+1} に対応する節点間に1本の無向枝が挿入されている。④以上のことより，共通木グラフ上の任意の節点対 t_i と t_j の間には，少なくとも次のような経路が存在する。すなわち，t_i —— t_{i+1} —— …… —— t_{i+k} —— t_j ⑤従って，共通木グラフは必ず連結である■

［例3］ 例1の G_1，G_2 に対する共通木の距離，共通木グラフを求めるとそれぞれ表2，図5となる。但し，図5の各枝上には各節点対に対応した共通木対の間で変換された枝が示されている。注Iの(ii)の事実は次の如くである。$D(t_2, t_4)=2$ であるが，$D(t_2, t_4)$ を決める枝集合には $(t_2\cap\bar{t}_4)\cup(\bar{t}_2\cap t_4)$ に含まれない枝 e_3 が含まれている■

［注II］ 定義6での最基本サイクルグラフを基本サイクルグラフに置換して得られる共通木の初等変換の定義を定義6'と記す。すると，定義7以下の議論はほぼ同様に行えて，定理1～3がやはり成立する。但し，例3の共通木グラフは

t_i \ t_j	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
$t_1=e_1e_4e_6$	0	1	1	2	2
$t_2=e_1e_4e_7$	1	0	2	2	1
$t_3=e_2e_4e_6$	1	2	0	1	2
$t_4=e_2e_5e_6$	2	2	1	0	1
$t_5=e_3e_5e_7$	2	1	2	1	0

表2 共通木と $D(t_i, t_j)$

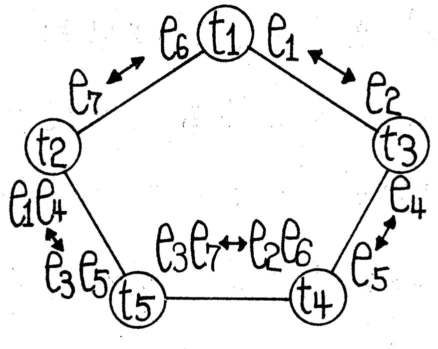

図5 共通木グラフ

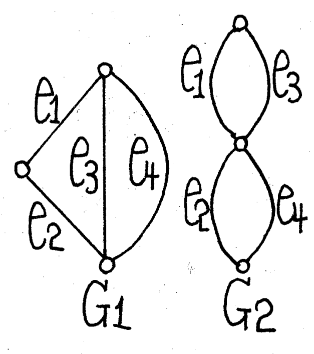

図6 二つのグラフ

この例においては完全グラフとなる■

［定理４］　定義６の下での共通木グラフにはハミルトン閉路は必ずしも存在しない■

［注Ⅲ］　図６のG_1，G_2の共通木は３個存在し，定義６の下での共通木グラフにはハミルトン閉路が存在しないことが言える。しかし，定義６′の下での共通木グラフにおけるハミルトン閉路の一般的な存否について今のところ分っていない■

5　むすび

二つのグラフの共通木の初等変換を，連鎖的経路の概念を用いたグラフ構造表現により，従来の一つのグラフの木の初等変換の自然な拡張形として二通り導入し，それらの下での共通木の距離，共通木グラフを与えた。そして，共通木グラフは常に連結であるが，ハミルトン閉路の存否については定理４しか分っていない。

謝辞　御討論いただいた東工大上野修一氏に感謝致します。
また，本研究は文部省科学研究費（58550229）の補助を受けたものである。

文　献

(1)　梶谷：回路のためのグラフ理論，第3，6章，昭晃堂（昭54）

(2)　小澤：信学論(A)，Vol.57-A，No.5，pp.383-390（昭45-05）

(3)　松本，金牧：信学論(A)，Vol.J60-A，No.12，pp.1106-1113（昭52-12）

(4)　前田，伊東：現代グラフ理論の基礎，第6章，オーム社（昭53）