数理解析研究所講究録
第535巻 1984年 1-22

拡大 Affine-Root 系の Θ-不変式と楕円特異点の moduli 空間.

京大 数研 斎藤恭司
SAITO, Kyoji

§0 はじめに

有理二重点と呼ばれる、複素2次元の特異点と、A_l, B_l, C_l D_l, E_l, F_4, G_2 型のルート系と密接に関係する事は、歴史的に繰り返し発見されてきた。(例えば[2],[16])

この様な古典的意味での、ルート系(ないし単純リー群)は、これきりしかないのだから、特異点とルート系の関係は、これ等の"例"でおしまいの"面白い"現像の様に思われてきた。ところが、楕円特異点や例外型特異点の最近の研究の導かれて、ルート系の概念を一般化する事により、逆に、その一般化されたルート系を用いて、もとの特異点の moduli を記述する事ができる様になってきた。

現在の所、これ等を例で、へんりんしか見えないが、ある種の一般化したルート系と mixed Hodge 構造との間に深い関係がある様に思える。本稿は単純楕円特異点のみにふれる。(詳細は [5][6][13][14][17])
(本稿の §3~§6 は [14],[15] の概説に充てる。)

§1. 一般化されたルート系の公理系

記号: ◦ F : 実有限次元ベクトル空間

◦ $I : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$, F 上の対称双線形形式

◦ 元 $\alpha \in F$ が non-isotropic $\Leftrightarrow$ $I(\alpha,\alpha) \neq 0$
この時

$$\alpha^{\vee} := \frac{2}{I(\alpha,\alpha)}\alpha$$ を α の dual と言う。

○ $\alpha \in F$ が non-isotropic の時，鏡映；$w_\alpha \in GL(F)$ を

$$w_\alpha(u) = u - I(u, \alpha^\vee)\alpha$$

により定義する。

定義　部分集合 $R \subset F$ が，I に属するルート系であるとは，以下の公理 1. — 5. を満す事である。

公理 1. R で生成される F の部分加群を $Q(R)$ と書く。すると $Q(R)$ は F の格子となる。i.e. $Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq F$.

公理 2. R の元はすべて non-isotropic である。

公理 3. R の任意の元 $\alpha, \beta \in R$ に対し，

$$I(\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}.$$

公理 4　R の任意の元 $\alpha \in R$ の鏡映 w_α に対し R は不変. i.e.

$$w_\alpha R = R.$$

公理 5. (既約性)　$R = R_1 \amalg R_2$ かつ $R_1 \perp R_2$ (i.e $I(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ for ${}^\forall \alpha_i \in R_i$) ならば，$R_1 = \emptyset$ 又は $R_2 = \emptyset$.

(注. R がルート系ならば，$R^\vee := \{\alpha^\vee : \alpha \in R\} \subset F$ も同じ I に属するルート系となる。)

これ等の公理系はかなりゆるいものであるが，これを基礎に，一般理論を構築できる。(cf [14])

例 1： I が positive definite ならば，自動的に R は有限集合となり，古典的な意味でのルート系 ([1]) となる。

例 2. I が semi-definite で，$\mathrm{rad}\, I := \{x \in F : I(x, y) = 0 \ {}^\forall y \in F\}$ の rank が 1 ならば，R は affine root 系となる。([8])

例3. symmetrizable Kac-Moody Lie環 の real root の集合は、上記の公理系を満す。

例4. rank $F=2$ で、I が indefinite (i.e signature が (

の時、I に属するルート系は全部で、72種類に分類される。([13])

§2. vanishing cycles of a singularity.

さて、上記の様に、ルート系の概念を非常にゆるい公理系にまとめたのは、以下に述べる(与えられた特異点に associate した) vanishing cycles の集合を、系統的に取りあつかいたい為である。

特異点と、一般化されたルート系とを結びつけるものは、古くから、Picard-Lefschetz 理論として、知られている。(Deligne 他の人達による mixed Hodge 理論の進展もあるが、ここでは超曲面孤立特異点に話しを限る。)

X_0 を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内 1ヶの多項式 $f(x)=f(x_0,\cdots,x_n)=0$ で定義された超曲面とし、点 $x_0\in X_0$ を X_0 の孤立特異点とする。この時 点 x_0 における vanishing homology 群を、

$$H:=H_n(X_\delta\cap B_\varepsilon,\ \mathbb{Z})$$

と定義する。但しここで $X_\delta:=\{x\in\mathbb{C}^{n+1}: f(x)=\delta\}$, $B_\varepsilon:=\{x\in\mathbb{C}^{n+1}: \|x-x_0\|\le\varepsilon\}$ とし、ε,δ を正実数で $0<\delta\ll\varepsilon\ll 1$ とする。H は、δ,ε によらない。Milnor により

Hは$\mathbb{Z}$-free 加群で その rank は $\mu := \mathrm{rank}_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},x_0}/\left(\frac{\partial f}{\partial x_0},\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right)$
で与えられる。

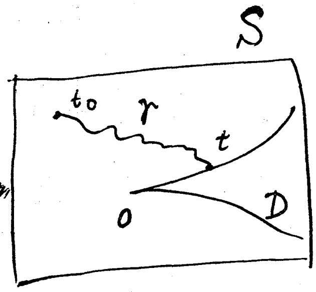
X_δ は複素n多様体だから(境界付)実2n多様体として、intersection form

$$I : H \times H \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が Poincaré duality $H_n(X) \to H_n(X, \partial X) \overset{P.D.}{\simeq} H^n(X)$ を用いて定まる。
以降nを偶数とし、従って I は symmetric bilinear form となる。

Hの部分集合 R (vanishing cycle の集合と呼ぶ事にする) を以下の通り定義すると、Rは $F := H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = H_n(X_0, \mathbb{R})$ の部分集合として、I に属する、一般化されたルート系となる。

<u>Rの定義</u>　$X \longrightarrow S$ を X_0 の universal deformation とし点 $t \in S$ の fiber を X_t とする。Sはμ次元多様体で基点 $0 \in S$ を持っている。$D \subset S$ を $X \to S$ の discriminant とすると、D の generic point t に対し、X_t は non-degenerate な二重点をただ一つ持ち、従って $H_n(X_t, \mathbb{Z})$ は rank $\mu-1$ の加群となる。そこで、$S-D$ の generic point t_0 を一つ fix し、



$S-D$ 中の real path で t_0 と t を結ぶものを γ とすると、γ にそって fiber X_{t_0} の X_t への retraction が定まり surjective map $H_n(X_{t_0}, \mathbb{Z}) \to H_n(X_t, \mathbb{Z})$ が定まる。この kernel $\simeq \mathbb{Z}$ の generator を道 γ にそった vanishing cycle と呼ぶ。t_0 を fix して、γ, t を動かして得られる vanishing cycle 達の(全体)集合 $\subset H_n(X_{t_0}, \mathbb{Z})$ を R と記す。この時 $^\forall \alpha \in R$ に対

$$I(\alpha,\alpha)=(-1)^{\frac{n}{2}}2$$

となる。Rが、ルート系の公理系を満す事も、最後の公理5を除いて、容易にたしかめられる。公理5は、discriminant Dが既約である事による。

この様して定まったルート系 $R\subset H_n(X_{t_0},\mathbb{Z})$ は同型を除いて $t_0\in S-D$ によらないので、Rを (X_0,x_0) に対応したルート系と呼ぶ事にする。

例1. $(X_0,x_0)=A_\ell, D_\ell$, 又は E_ℓ 型の有理二重点。

$\Rightarrow$ $I: H\times H\to\mathbb{Z}$ は negative definite

R: A_ℓ, D_ℓ, 又は E_ℓ 型の有限ルート系 (cf [2])

例2. $(X_0,x_0)=\tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6, \tilde{D}_5$ 又は $\tilde{A}_4$ 型の単純楕円特異点

= Chern class が $-1,-2,-3,-4,-5$ となる様な楕円曲線上の line bundle の零セクションを blowdown したもの。

$\Longrightarrow$ $I: H\times H\to\mathbb{Z}$ negative semi-definite かつ $\operatorname{rank}(\operatorname{rad} I)=2$,

$R:= E_8^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, D_5^{(1,1)}$ 又は $A_4^{(1,1)}$ 型の拡大アフィンルート系([9] [14] 後述)

例3. $(X_0,x_0)=14$ヶの unimodular 例外型特異点(Arnold, Dolgatschef)の一.

$\Longrightarrow$ $I: H\times H\longrightarrow\mathbb{Z}$ は indefinite, $\mu_+=2$, $\mu_0=0$, $\mu_-=\mu-2$.

R: 現在研究中。(lattice Hの研究は Brieskorn, Looijenga [3] がある。)

§3. 拡大 affine root 系.

前の§2の単純楕円特異点の例に導かれて、以下の定義をする。(以下の定義の marking は、period mapping の研究に由来するが、ここでは、立ち入らない。詳細は[12], [15])

定義

1. R が、拡大 affine root 系であるとは、その属する I が、positive semi definite かつ $\mathrm{rad}\, I := \{x \in F : I(x, y) = 0\ {}^{\forall} y \in F\}$ の rank が 2 の事。(以下 $\mathrm{rank}\, F = l+2$, $\mu_+ = l$, $\mu_0 = 2$, $\mu_- = 0$ とお

2. 拡大 affine root 系 R の marking G とは、$\mathrm{rad}\, I\ (\simeq \mathbb{R}^2)$ の実一次元線型部分空間で、$G \cap Q(R) \simeq \mathbb{Z}$ とするものの事。

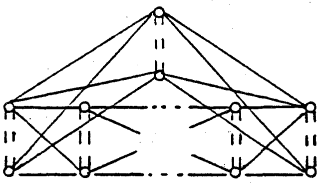
注1　(R, G) を拡大 affine root 系とその marking の pair とする。　R を $F/\mathrm{rad}\, I$, F/G へ projection した像集合を、それぞれ、$R/\mathrm{rad}\, I$, R/G と書く事にすると、それぞれ、ルート系となり、§1 での例1, 例2, により、それぞれ、有限ルート系、アフィン・ルート系となる。

以下、常に、R/G は reduced (i.e. $\exists\, \alpha \in F$ s.t. $\alpha, 2\alpha \in R$) と仮定する。

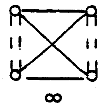
定理. marking 付、拡大 affine root 系 (R, G) は、以下の表により分類される。すなわち、(R, G) の各同型類に対し、型(type)及び、Dynkin 図型を定義し(説明後出)、その一覧表を与える。

Types and Dynkin diagrams for Extended Affine Root Systems

$A_{\ell}^{(1,1)}$

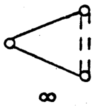


($\ell \geq 2$)

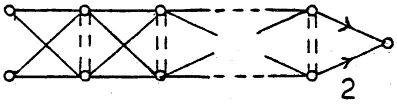


($\ell = 1$)

$A_{1}^{(1,1)*}$

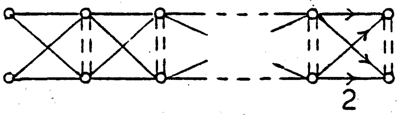


$B_{\ell}^{(1,1)}$



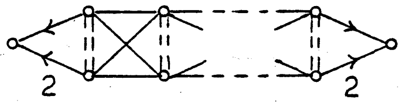
($\ell \geq 3$)

$B_{\ell}^{(1,2)}$



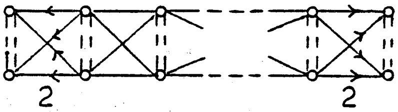
($\ell \geq 3$)

$B_{\ell}^{(2,1)}$



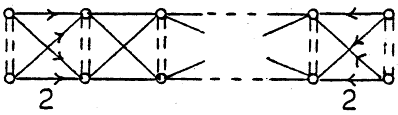
($\ell \geq 2$)

$B_{\ell}^{(2,2)}$



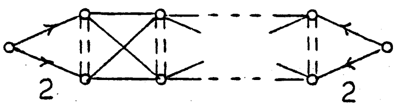
($\ell \geq 2$)

$C_{\ell}^{(1,1)}$



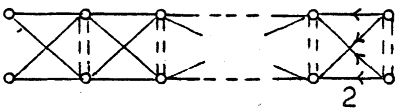
($\ell \geq 2$)

$C_{\ell}^{(1,2)}$

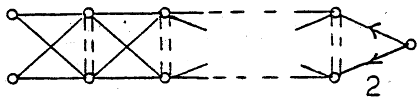


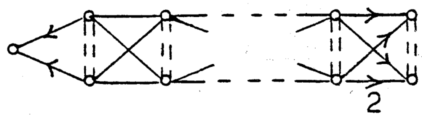
($\ell \geq 2$)

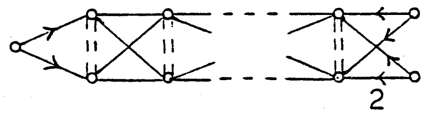
$C_{\ell}^{(2,1)}$

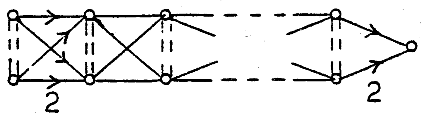
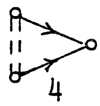


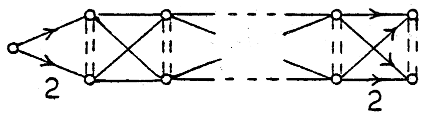
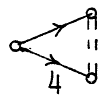
($\ell \geq 3$)

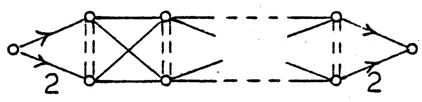
$C_\ell^{(2,2)}$  $(\ell \geq 3)$

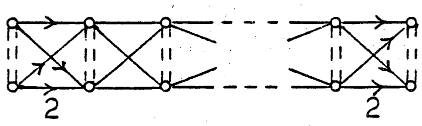
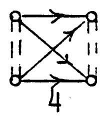
$B_\ell^{(2,2)*}$  $(\ell \geq 2)$

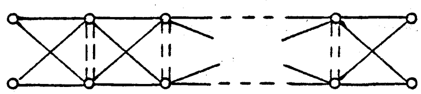
$C_\ell^{(1,1)*}$  $(\ell \geq 2)$

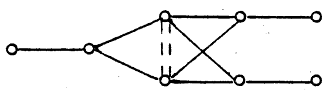
$BC_\ell^{(2,1)}$  $(\ell \geq 2)$,  $(\ell = 1)$

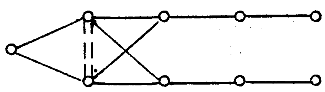
$BC_\ell^{(2,4)}$  $(\ell \geq 2)$,  $(\ell = 1)$

$BC_\ell^{(2,2)}(1)$  $(\ell \geq 2)$

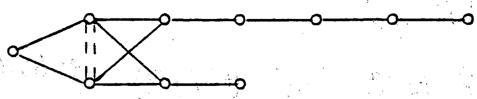
$BC_\ell^{(2,2)}(2)$  $(\ell \geq 2)$,  $(\ell = 1)$

$D_\ell^{(1,1)}$  $(\ell \geq 4)$

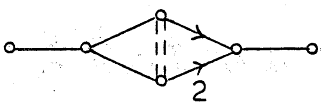
$E_6^{(1,1)}$ 

$E_7^{(1,1)}$ 

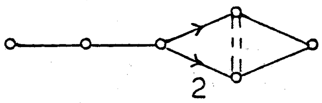
$E_8^{(1,1)}$



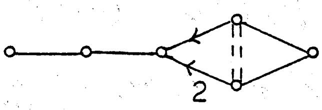
$F_4^{(1,1)}$



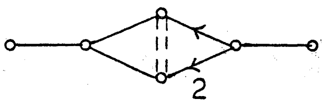
$F_4^{(1,2)}$



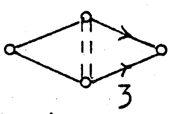
$F_4^{(2,1)}$



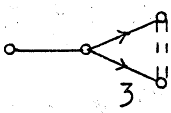
$F_4^{(2,2)}$



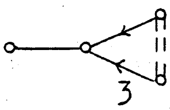
$G_2^{(1,1)}$



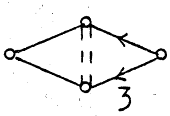
$G_2^{(1,3)}$



$G_2^{(3,1)}$



$G_2^{(3,3)}$



(R,G)

<u>説明1.</u> 各ルート系に対応させた型 $P_l^{(t_1,t_2)}$ のうち、P_l は有限ルート系 R/G の型を表わし、t_1, t_2 は (R,G) の第1、第2 tier 数と呼んで、次の様に定義する。(cf. [ ](4.3))

$$t_1(R,G) := (b^\vee \bmod a^\vee : b \bmod a) \times (I_{R^\vee} : I)$$

$$t_2(R,G) := (a^\vee : a) \times (I_{R^\vee} : I)$$

但しここで $a, a^\vee$ は(それぞれ) lattice $Q(R)\cap G$, $Q(R^\vee)\cap G$ の basis, b, $b^\vee$ はそれぞれ lattice $Q(R)\cap \mathrm{rad}\, I/Q(R)\cap G$, $Q(R^\vee)\cap \mathrm{rad}\, I/Q(R)\cap G$ の basis を表わし、又、$I_{R^\vee}$ は bilinear form I の正定数倍で定まる bilinear form で lattice $Q(R^\vee)=\sum_{\alpha\in R}\mathbb{Z}\alpha^\vee \subset F$ に制限して、even lattice になるようなもののうち最少倍のものとする。又記号 $A:B$ とは $A=cB$ となる constant c の意味とする。

<u>説明2.</u> 各ルート系 (R,G) に対応させた上記の、ディンキン図型 $\Gamma_{R,G}$ は、実際には、R のある有限部分集合 B (生成系) 対し、次の様に diagram を対応させたもの。

i) $\Gamma_{R,G}$ の vertex の集合を B と同一視する。

ii) $\alpha,\beta\in B$ に対し

$\overset{\alpha}{\circ}\quad\overset{\beta}{\circ} \iff I(\alpha,\beta)=0$

$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \iff I(\alpha,\beta^\vee)=I(\alpha^\vee,\beta)=-1$

$\circ\!\xrightarrow[t]{}\!\circ \iff I(\alpha,\beta^\vee)=-t,\ I(\alpha^\vee,\beta)=-1$

$\circ\cdots\cdots\circ \iff I(\alpha,\beta^\vee)=I(\alpha^\vee,\beta^\vee)=2.$

ここで basis の集合 B を (R,G) に対し どの様にとるかは、exponent の概念を用いるもので、かなりややこしいので、ここでは立ち入らない。 B は実ベクトル空間をはるが、一般に B の元は一次独立ではない。

古典的なルート系や Kac-Moody algebra の理論では、α:::0 なる bond は出てこない。

上記、Dynkin 図型のみを用いて、マーク付の拡大アフィンルート系 (R,G) を再構成できるが、ここでは立ち入らない。

§4. Coxeter 変換

マーク付の拡大アフィンルート系 (R,G) に対し、その Coxeter 変換 c を定義し、その基本的性質を述べる。

W_R でもって鏡映 w_α, $\alpha\in R$ で生成された、直交群 $O(F,I)\subset GL(F)$ の部分群を表す事にする。

定義 $c\in W_R$ が (R,G) の Coxeter 変換であるとは、c が (R,G) の Dynkin 図型 $\Gamma_{R,G}$ を用いて

$$c=\prod_{\alpha\in\Gamma_{R,G}} w_\alpha$$

と表示できる事とする。ただし、右辺の積表示の意味は、$\Gamma_{R,G}$ の頂点を何らか一列に並べて定義されたものとする。その時 α:::0 なる(2) 頂点は常に隣りあうようにしておく。この様に定義された c の W_R 中の conjugacy class は積の順の

取り方によらない。

以下に証明なしに述べる補題A, B, Cが(後の不変式の研究で)基本的となる。

補題A. i) cは有限位数となる。(正確には $c^{l_{max}+1}=1$, l_{max}: = $\Gamma_{R,G}$から $\circ\!\!::::\!\!\circ$ なるbondsの部分を除いた残りの最大連結成分の頂点数)

ii) cの固有値の集合 $=\left\{\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\frac{m_i}{m_{max}}\right) : i=0,\cdots,l\right\} \cup \{1\}$

但しここで $0<m_1\le\cdots\le m_l=m_{max}$ は exponents と呼ばれる整数.

補題B. $R\cap \mathrm{Image}(c-1)=\emptyset$

補題Cを述べる為に記号を用意する。

簡単な線形代数の考さつにより、Fを含む実ベクトル空間$\tilde F$で次の様なものが(同型を除いて)唯一つある。

i) $F\subset\tilde F$, $\mathrm{rank}\,\tilde F=\mathrm{rank}\,F+1$ $(=l+3)$.

ii) $\tilde F$上のsymmetric bilinear form $\tilde I:\tilde F\times\tilde F\to\mathbb{R}$で、次の性質を持つものがある。 イ) $\tilde I|F=I$, ロ) $\mathrm{rad}\,\tilde I=G\ (=\mathbb{R}a)$.

この時、$\alpha\in R$を$\tilde F$の元と見なして定義した鏡映を$\tilde w_\alpha\in O(\tilde F,\tilde I)$と書く事にする。$\tilde w_\alpha$, $\alpha\in R$で生成される群を$\tilde W_R$と書く。Coxeter変換の定義においてw_αを$\tilde w_\alpha$におきかえたものを$\tilde c\ (\in\tilde W_R)$と書きhyperbolic Coxeter変換と呼ぶ。$\tilde W_R$の$\tilde F$への作用をFに制限する事により自然な上への写像.

$$\tilde W_R \longrightarrow W_R$$

が得られ、特に$\tilde c$はcに写される。この写像のkernelを.

$\tilde{K}_G$ と書いて exact sequence を得る。

$$1 \longrightarrow \tilde{K}_G \longrightarrow \tilde{W}_R \longrightarrow W_R \longrightarrow 1$$

補題 C　i) K_G は無限順回群 $(\simeq \mathbb{Z})$ で $c^{l_{max}+1}$ により生成される。

ii) $c^{l_{max}+1}(u) = u - \tilde{I}_R(u,b)\frac{l_{max}+1}{m_{max}}a$

（但し、ここで、a, b は §3 に出てきた $rad I \cap Q(R) = \mathbb{Z}^2$ の basis である。）

§5 偏極アーベル多様体族

§3, §4 の data を基に、偏極アーベル多様体の1次元の族を構成する。その特別な場合は、Looijenga[5], Kac-Peterson[ ] により研究されたものである。

まず $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上定義された複素 affine 空間の族を次の様に定める。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}^{l+2} &:= \{x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\tilde{F}^{l+2}, \mathbb{C}) : a(x) = 1,\ \mathrm{Im}(b(x)) > 0\} \\
&\downarrow \\
\mathbb{E}^{l+1} &:= \{x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F^{l+2}, \mathbb{C}) : a(x) = 1,\ \mathrm{Im}(b(x)) > 0\} \\
&\downarrow \tau \\
\mathbb{H} &:= \{x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(rad I, \mathbb{C}) : a(x) = 1,\ \mathrm{Im}(b(x)) > 0\}
\end{aligned}$$

但し、ここで、$a, b \in rad I$（既出 § ）はその dual space 上の (linear) functional と理解し $\tau(x) := b(x)/a(x)$ とおく。肩付の数は、それぞれの空間の複素又は実次元を表わす。

定義より、$\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}$ 上に群 $\tilde{W}_R$ が、$\mathbb{E}^{l+1}$ 上に群 W_R が作用して

$\tilde{\mathbb{E}}^{l+2} \to \mathbb{E}^{l+1} \xrightarrow{\tau} \mathbb{H}$ と可換となる。この群作用が proper dis-continuous である事は、次の様に分る。

自然の projection $R \to R/\mathrm{rad}\, I$ に対応して、上への準同型写像 $W_R \to W_{R/\mathrm{rad}\, I}$ が定まり、その kernel を T とおく。

$$1 \longrightarrow T \to W_R \longrightarrow W_{R/\mathrm{rad}\, I} \longrightarrow 1$$

更に、T の $\tilde{W}_R$ への逆像 $\tilde{T}$ とおく事により、

$$1 \longrightarrow \tilde{K}_G \to \tilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow 1$$

。

ここで最初の exact sequence は半直積に分解しかつ、T は

$$(Q(R)/\mathrm{rad}\, I) \otimes (Q(R) \cap \mathrm{rad}\, I) \simeq \mathbb{Z}^l \otimes \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^{2l}$$

と iso-genus な abel 群で、$\mathbb{E}^{l+1} \xrightarrow{\tau} \mathbb{H}$ の fiber 毎に $\mathbb{Z}^l \oplus \tau\mathbb{Z}^l$ の affine translation group として作用している。

二番目の exact sequence は T の cyclic extension を与え（補題C），

extension class $= \dfrac{l_{max}+1}{m_{max}}\, I/\mathrm{rad}\, I \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Ext^2(T, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^2 Hom_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{Z})$,

となる。

よって、$X := \mathbb{E}^{l+1}/T \xrightarrow{\tau} \mathbb{H}$ は $\tau \in \mathbb{H}$ に対し $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})^l$ と isogenus な abel 多様体を対応させる族であり、$L^* := \tilde{\mathbb{E}}^{l+2}/\tilde{T}$ は族 X の各 abel 多様体に negative な $\mathbb{C}^*$-bundle をのせた total space となる。L^* にその line bdle の零セクションを付加した line bundle を L と書き、blow down したものを $\bar{L}$ と書く事にする。

最後に、有限群 $W_{R/\mathrm{rad}\, I}$ が この(l+1次元特異点の)族．

$$\tilde{L} \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{H}$$

に作用している。

定理　$E_8^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, D_5^{(1,1)}, A_4^{(1,1)}$ 型のルート系 (R) に対し、商空間 $\tilde{L}/W_{R/\mathrm{rad}\,I}$ は自然に、$\tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6, \tilde{D}_5, \tilde{A}_4$ 型の単純楕円特異点の universal deformation の底空間 S と同一視できる。

（[5] [15] 参照）

この定理が、元来、拡大 affine root 系研究の目標であるが、証明の為には、特異点に対する周期写像，特に原始積分の理論（cf [12]）を用いるので、ここでは、立ち入らない。

$\tilde{L}/W_{R/\mathrm{rad}\,I}$ を $\mathbb{H}$ 上の affine algebraic variety として、その構造環を決定する事は、$\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}$ 上の函数で、$\tilde{W}_R$-不変な函数を求める事に外ならない。$\tilde{W}$-不変な函数環は

$$\Gamma(L, \mathcal{O}_L) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})$$

だから、$\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}$ 上の $\tilde{W}_R$-不変な函数環は

$$\Gamma(\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}})^{\tilde{W}_R} \cong \widehat{\bigoplus_{k=0}^{\infty}} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})^{W_{R/\mathrm{rad}\,I}}$$

と書ける。又、$\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}$ 上の $\tilde{W}_R$-反不変な函数全体は

$$\Gamma(\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}})^{-\tilde{W}_R} \cong \widehat{\bigoplus_{k=0}^{\infty}} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})^{-W_{R/\mathrm{rad}\,I}}$$

ここで上記表現の右辺達は、適当な、Θ-函数達を用いて表現できるが、ここでは、立ち入らない。右辺の直和因子の

元を homogeneous of degree k の元と呼ぶ事にする。

ここで、不変式環に関する Chevalley 型の定理を述べる。この形での state は Looijenga [6] によるが、証明は(不備で)、その後いく多の人により修正を試みられている。

定理 (Chevalley type theorem)

1. $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})^{W_{R/\mathrm{rad}\,I}}$ は $\Gamma(\mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathbb{H}})$ 上 $l+1$ 変数多項式環と同型で、その生成系 $(\vartheta_0, \cdots, \vartheta_l)$ として、homogeneous of degree $m_0, m_1, \cdots, m_l$ となるものをとれる。

2. $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})^{-W_{R/\mathrm{rad}\,I}}$ は $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, L^{\otimes(-k)})^{W_{R/\mathrm{rad}\,I}}$ ―加群として free で、その生成元 Θ_A として homogenous of degree $= \sum_{i=0}^{l} m_i$ なるものをとれる。

Θ_A の零面 ($\widehat{\mathbb{E}}^{l+2}$ 内での) は ルート $\alpha \in R$ の零面の union に等しい。Θ_A の事を基本反不変式と呼ぶ。Θ_A は $\Gamma(\mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathbb{H}})$ の unit factor を除いて唯一つ決る事に注意する。

§6. Flat structure on $\widehat{\mathbb{E}}^{l+2}/\widetilde{W}_R$

最後の Chevalley 型の定理 1. は(空間) $\widehat{\mathbb{E}}^{l+2}/\widetilde{W}_R$ が $\mathbb{H}$ 上 $l+1$ 次元の algebraic variety $\mathbb{C}^{l+1}$ と同型 (i.e. $\widehat{\mathbb{E}}^{l+2}/\widetilde{W}_R \simeq \mathbb{C}^{l+1} \times \mathbb{H}$) を主張しているが、その $l+1$ ケの座標 $\vartheta_0, \cdots, \vartheta_l$ は cannonical に決るとは言ってない。以下 (R, G) が特別の場合には、ある特別な座標が入る事を示そう。もっと正確には、空間 $\widehat{\mathbb{E}}^{l+2}/\widetilde{W}_R$ の co-tangent bundle に cannonical に(非退化)内積 J が定まり、J の係

数が constant になる様な $\tilde{E}^{l+2}/\tilde{W}_R$ の "linear coordinates" が唯一つ定まる事 (i.e $\nabla J=0$ なる connection が integrable となる事) を示す。この様な構造を $\tilde{E}^{l+2}/\tilde{W}_R$ の flat 構造と呼ぶ。

一般のルート系でも、かなりの事が分るが、話しを分りやすくする為、次の定義を行う。

定義 marking付 拡大 affine ルート系 (R,G) が対称型とは、その Dynkin diagram $\Gamma_{R,G}$ の中に o==o なる結合が唯一つしかない事。

証明なしで次の事実を認める。

Prop. 以下の (R,G) に対する諸条件は互に同値である。

i) (R,G) は対称型.

ii) $\{0, m_0, m_1, \cdots, m_l\}$ は対称。(i.e. $m_i + m_{l-1-i} = m_l \quad i=0,\cdots,l-1$)

iii) $2\sum_{i=0}^{l} m_i = (l+2)\, m_l$

iv) 最大 exponent $(=:m_l)$ の重複度 $=1$.

(実際には $A_1^{(1,1)*}$, $BC_2^{(2,4)}$, $E_6^{(1,1)}$, $E_7^{(1,1)}$, $E_8^{(1,1)}$, $F_4^{(1,1)}$, $F_4^{(1,2)}$, $F_4^{(2,1)}$, $G_2^{(1,1)}$, $G_2^{(1,3)}$, $G_2^{(3,1)}$, $G_2^{(3,3)}$.)

以下 (R,G) は常に対称型と仮定する。

補題. 基本不変式 Θ_A の自乗を $\Gamma(\mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathbb{H}})[\vartheta_0, \cdots, \vartheta_l]$ の元として、ϑ_l の多項式に展開する。

$$\Theta_A^{\,2} = A_0(\tau)\,\vartheta_l^{\,l+2} + A_1\,\vartheta_l^{\,l+1} + \cdots + A_{l+2}, \quad (A_i \in \Gamma(\mathbb{H},\mathcal{O}_{\mathbb{H}})[\vartheta_0,\cdots,\vartheta_{l-1}])$$

すると $A_0(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上値零をとらない。(i.e. $A_0(\tau)$ は unit).

証明 (補題B, 補題C による。詳細略。実は、この補題こそ

が key 補題で、唯これを証明せんが為に、補題 A, B, C を準備をして来、ひいては、拡大 affine root 系の概念を導入したのである。)

<u>metric J on co-tangent bundle of $\tilde{\mathbb{E}}^{l+2}/\tilde{W}_R$ の定義.</u>

(R,G) を対称型とすると、$S := \Gamma(\mathbb{H},\mathcal{O}_{\mathbb{H}})[\vartheta_0,\cdots,\vartheta_l]$ の subring $T := \Gamma(\mathbb{H},\mathcal{O}_{\mathbb{H}})[\vartheta_0,\cdots,\vartheta_{l-1}]$ は $\deg\vartheta_l\ (=m_l) \gneq \deg\vartheta_{l-1} \geq \cdots \geq \deg\vartheta_0$ だから、intrinsic に意味を持つ。以下係数環を S から T に reduction して、J を以下の通り構成する。

S は graded ring なので $Der_S := \sum_{i=-1}^{l} S\frac{\partial}{\partial\vartheta_i}$ は graded S-module であり、その中で degree の最少元(集合)は $\Gamma(\mathbb{H},\mathcal{O}_{\mathbb{H}})\frac{\partial}{\partial\vartheta_l}$ と書ける。

1方 $\Omega^1_S := \sum_{i=-1}^{l} S\,d\vartheta_i$ (但し $d\vartheta_{-1}=d\tau$) 上に、次の様に S-bilinear form が入る。

$$\tilde{I}:\ \Omega^1_S\times\Omega^1_S \longrightarrow S\ ,\quad \tilde{I}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{i,j=1}^{l+2}\langle\tfrac{\partial}{\partial X_i},\omega_1\rangle\langle\tfrac{\partial}{\partial X_j},\omega_2\rangle\hat{I}(X_i,X_j)$$

(但しここで $a, X_1,\cdots,X_{l+2}$ は $\tilde{F}^{l+3}$ の basis, かつ $\hat{I}$ は I の hyperbolic extension (cf §4)).

さて $\frac{\partial}{\partial\vartheta_l}$ は $\Gamma(\mathbb{H},\mathcal{O}_{\mathbb{H}})$ の unit factor の積の ambiguity が有るが、次の normalization condition を設ける事により、定数倍を除いて、unique に決る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_l}\right)^2 I(d\vartheta_l, d\vartheta_l) = 0\ .$$

さてこの $\frac{\partial}{\partial\vartheta_l}$ を用いて、Ω^1_S の T-free submodule $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} := \left\{\ \omega\in\Omega^1_S\ :\ L_{\frac{\partial}{\partial\vartheta_l}}(\omega)=0\right\} = \sum_{i=-1}^{l} T\,d\vartheta_i$$

↑ Lie derivative

と定める。($T:=\{\vartheta\in S:\frac{\partial}{\partial\vartheta_\ell}\vartheta=0\}$ と書ける事に注意。)

以上の用意の下に、$\mathcal{F}$上の T-bilinear form を定める。

$$J:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\longrightarrow T\quad ,J(\omega_1,\omega_2):=\frac{\partial}{\partial\vartheta_\ell}\tilde{I}(\omega_1,\omega_2).$$

$\Omega^1_S=S\underset{T}{\otimes}\mathcal{F}$ だから、J は、S の cotangent bundle Ω^1_S に入った内積と思ってよい。構成より、J は constant factor を除いて unique に決る。

'$\tilde{E}/\tilde{W}_R$ が flat 構造を持つとは、次の定理が成立するの意であ

<u>定理</u> 1. J <u>は</u> $\tilde{E}/\tilde{W}_R$ <u>上いたる所 non-degenerate</u>.

2. J <u>に associate した Riemannian connection</u> (i.e. <u>$\tilde{E}/\tilde{W}_R$ の (co-) tangent bundle の connection ∇ であって</u> $\nabla J=0$ <u>なるもの。(それは唯一つある。)</u>) <u>は integrable である</u>。(i.e. $\nabla^2=0$)

<u>系</u>. <u>不変式環</u> $\bigoplus_{k=0}^{\infty}\Gamma(X,L^{\otimes -k})^{W_R}$ <u>の (homogeneous な) generator</u> $\vartheta_{-1}=\tau,\vartheta_0,\cdots,\vartheta_\ell$ <u>であって</u> $J(d\vartheta_i,d\vartheta_j)=\text{constant}\in\mathbb{C}$ <u>for</u> $i,j=-1,\cdots,\ell$ <u>なるものが</u>、<u>(同次なものの間の線型変換の ambiguity を除いて)</u> <u>唯一つ存在する</u>。

この定理(2.)の証明には、discriminant Θ_A^2 にそって logarithmic な vector field 及び forms の議論及び、connection の議論を用いて、多少ややこしいので、ここでは一切立ち入らない。

定理 1. はもはや、次の様に(易)(容)に見る事ができる。

まず、Jの定義により、

定理1 $\Longleftrightarrow$ $\det\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_\ell}\tilde{I}(d\vartheta_i, d\vartheta_j)\right)_{i,j=-1,\cdots,\ell}\right)$ は unit.

一方、Chevalley型定理 及び、本§最初の補題により、

$$\det\left(\left(\tilde{I}(d\vartheta_i, d\vartheta_j)\right)_{i,j=-1,\cdots,\ell}\right) = \text{unit }\Theta_A^2$$
$$= \text{unit }\vartheta_\ell^{\ell+2} + \text{lower terms in }\vartheta_\ell .$$

しかるに一方 exponentsの対称性 及び、$\frac{\partial}{\partial\vartheta_\ell}$ の normalization より、行列の各成分 $\tilde{I}(d\vartheta_i, d\vartheta_j)$ は（$\vartheta_0, \cdots, \vartheta_\ell$ の多項式として）ϑ_ℓ を含みうるのは $i+j \geq \ell-1$ でしかも高々 ϑ_ℓ について一次式という事が分る。

従って $\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_\ell}\tilde{I}(d\vartheta_i, d\vartheta_j)\right)_{i,j=-1,\cdots,\ell}$ は右下三角行列でありかつ、その斜対角成分の積 = unit Θ_A^2 の $\vartheta_\ell^{\ell+2}$ の係数

$$= \text{unit}.$$

これで、定理1.の証明はできた。 //

この最後の系で述べた、不変式環の generators $\vartheta_{-1}, \vartheta_0, \cdots, \vartheta_\ell$ が、flat generator と呼ばれるもので、R が有限ルート系の時は [10][11] に与えられている。

又、前節定理により、$\tilde{E}/\tilde{W}_R$ を、楕円特異点の変型の底空間 (S) と同一視した時、内積 J は residue pairing $J := K^{(0)}$ と同一視され、flat generators $\vartheta_{-1}, \vartheta_0, \cdots \vartheta_\ell$ は S の flat coordinates と同一

視され．函数 $\tau : \tilde{E}/\tilde{W}_R \to \mathbb{H}$ は S 上の flat function τ と同一視される。（詳細は[12]を参照）

文　献

[1] Bourbaki, N. : Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, Paris ; Hermann 1969.

[2] Brieskorn, E. : Singular element of semisimple algebraic groups, Actes Congrès Intern. Math. 1970, t. 2, 279-284.

[3] Brieskorn, E. : Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten, Bonner Mathem. Schriften (Nr. 150) 1983.

[4] Kac, V., Peterson, D. : Infinite-dimensional Lie algebras, ϑ-functions, and modular forms (pre-print 1982).

[5] Looijenga, E. : On the semi-universal deformations of a simple elliptic singularity II, Topology 17. 23-40 (1978).

[6] Looijenga, E. : Root systems and elliptic curves, Inventiones Math., 38, 17-32 (1976).

[7] Looijenga, E. : Invariant theory for generalized root systems, Inventiones Math., 61, 1-32 (1980).

[8] MacDonald, I. G. ; Affine root systems and Dedekind's η-function, Inventiones Math. 15, 91-143 (1972).

[9] Saito, K.: Einfach-Elliptisch Singularitäten, Inventiones math. 23, 289-325 (1974).

[10] Saito, K, Yano, T & Sekiguchi, J: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflexion group, Comm. in Alg.

[11] Saito, K: On a linear structure of a quotient variety by a finite reflexion group, pre-print R.I.M.S.-288 (1979).

[12] Saito, K.: Period mapping associated to a primitive form, Publ. R.I.M.S., Vol. 19, 1231-1264 (1983)

[13] Saito, K.: The Root System of Sign (1,0,1), to appear in Publ. RIMS.

[14] Saito, K.: Extend Affine Root Systems I, pre-print RIMS-480 (1984)

[15] Saito, K.: Extended Affine Root Systems II, in preparation

[16] Slodowy, P.: Simple Singularities and Simple algebraic Group, Lecture Notes in Math. Springer (1980)

[17] Slodowy, P.: A character approach to Looijenga's invariant theory for generalized root systems, pre-print 1982

[18] Slodowy, P.: Another (new) class of Lie algebras, pre-print (1983)