数理解析研究所講究録
第 535 巻 1984 年 161-175



# 三次曲線の迷走と円錐曲線族

成木 勇夫

**0.** $P_2$ に作用する例外的有限群として、古典的に 位数 216 の Hesse 群（HS と記す）、位数 168 の Klein 群（KL）、位数 360 の Valentiner-Wiman 群（VW）がよく知られていた。KL は PSL(2,7) と、VW は $A_6$（6次交代群）と同型である。VW と KL に関しては、それに付随する円錐曲線族の図形も知られていた。この小述では それらを3次曲線の迷走という立場から説明するとともに、HS に対しても最も自然と思われる1つの円錐曲線図形を対応させてみよう。

**1.** 複素射影平面 $P_2:(x,y,z)$ 上に3つの円錐曲線 $Q_1$: $q_1=0$, $Q_2$: $q_2=0$, $Q_3$: $q_3=0$（$q_i$ 達は $x,y,z$ の2次形式）を考えると、一般に 円錐曲線全体の空間（$\cong P_5$）内にそれらで張られる平面 $H(Q_1,Q_2,Q_3)$: $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$

$$\xi_1 q_1 + \xi_2 q_2 + \xi_3 q_3 = 0$$

が定まる。$Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ は非退化と仮定しておく。また

混同の恐れがない限り以後、 $H(Q_1, Q_2, Q_3)$ を $H$ と記すことにする。 $H$ 上には、その上の特別な3点、即ち、 $Q_1, Q_2, Q_3$ が与えられている。したがって、それらを結んで出来る三角形 $\Delta = \Delta(Q_1, Q_2, Q_3)$ も又、自然に定まっている。他方、 $H$ 上にある退化円錐曲線全体は $H (\cong P_2)$ の 3次曲線を作る（（3.3）-行列の行列式は要素の3次式）。これを DS (= discriminant) とかく。こうして、$H$上に 2つの自然な3次曲線 $\Delta$, DS が出来たことになる。 さて、今、或る円錐曲線

$$Q : q(x, y, z) = 0$$

が、 $Q_1, Q_2, Q_3$ のどれとも2点で接すると仮定する。 このとき、 $x, y, z$ の1次形式 $l_1, l_2, l_3$ 及び、3つの定数 $a_1, a_2, a_3 (\neq 0)$ があって、

$$q = a_i q_i + l_i^2$$

と書ける。（ $l_i = 0$ は $Q$ と $Q_i$ との2接点を通る直線を定義する。） したがって、特に $\Delta \cap DS$ 内の3点

$$T_i : a_j q_j - a_k q_k = (l_k + l_j)\cdot(l_k - l_j) = 0$$

$$(1 \leqq j < k \leqq 3,\ \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\})$$

が $q$ に対して定まるが、この3点は明らかに（$H$ 内で）一直線上にある。この3点のことを $Q$ の（$Q_1, Q_2, Q_3$ に関する）boundary と呼ぶことにしよう。明らかにここで Homology 代数が意識されているが、この用語に従えば、cycle とは、$\Delta \cap DS$ の3点で一直線上にあるもののことを意味するべきである。（ここで、$\Delta \cap DS$ は Bézout の定理により一般に9点より成ることに注意する。）

__基本定理__: $Q_1, Q_2, Q_3, H, \Delta, DS$ を上のとおりとし、今 $\Delta \cap DS$ の3点（$T_1, T_2, T_3$）が上の意味で cycle であるとする。このとき、（$T_1, T_2, T_3$）を boundary として持つ円錐曲線 $Q$ が必ず存在する。$T_1, T_2, T_3$ を通る曲線を $L$ とする。もし $L \not\subset DS$ ならば、そのような $Q$ は一意的であるが、$L \subset DS$ ならば、そのような $Q$ は丁度2つ存在する。

**2.** この基本定理を念頭におくとき、今の問題に関して重要なことは、次のように要約されるであろう。

問：$\Delta$ と $DS$ とで生成される3次曲線の pencil $[\Delta, DS]$ の中に、直線を既約成分として含むような3次曲線が多く現れるための条件は何か。

実際、$[\Delta, DS]$ のメンバー達は丁度9点 $\Delta \cap DS$ を通過する3次曲線達であるから、問にいうような既約成分があれば基本定理によりそれに対応して $Q_1, Q_2, Q_3$ のどれにも2点で接するような円錐曲線を1つ（乃至2つ）作ることができるからである。もし $[\Delta, DS]$ が他の三角形 $\nabla'$ を含むとし、簡単のために $DS$ は $\nabla'$ の辺を含まないと仮定する。このとき我々は $\nabla'$ の3辺に対応して $Q_i$ $(i=1,2,3)$ のどれにも2点で接するような3つの円錐曲線 $Q'_1, Q'_2, Q'_3$ を得る。この $Q'_i$ 達に対して、また $H'(=H(Q'_1, Q'_2, Q'_3))$, $\Delta'$, $DS'$, $[\Delta', DS']$ などが構成でき、基本定理によれば pencil $[\Delta', DS']$ は $Q_1, Q_2, Q_3$ と対応する三角形 $\nabla$ を含んでいる。この過程において我々は、平面3次曲線 $DS \subset H$ は平面3次曲線 $DS' \subset H'$ に動いたとみるのである。もし $[\Delta, DS]$ が $\Delta$ 以外に2つ以上の三角形を含むならば、動き方も2つ以上あることになり、動いた先でも動き方が2つ以上ある

（ことが証明される）。このような運動を次々に合成していったものを３次曲線の迷走と呼んだのである。（勿論、動いているのはDSのみでないことはいうまでもない。迷走と呼んだのは移行 DS → DS′ は不変量 $j$ も保たない性質のものだからである。）我々の主題はこの迷走によってどの程度面白い円錐曲線図形を構成できるか、ということにある。

**3.** ここで我々は［△, DS］が Hesse pencil となっているような著しい場合を考える。（Hesse pencil とは、9個の固定点がその全ての非特異メンバーに対して変曲点となってい~~るような~~て、特異メンバーは4つの三角形であるようなものをいう。これは $a$ をパラメーターとする pencil

$$\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3-3a\xi_1\xi_2\xi_3=0$$

と同型を除いて一致する。$a=\infty, 1, \omega, \omega^2$ ($\omega^2+\omega+1=0$) に対して4つの三角形を得る。このとき $\mathbb{P}_2$ の座標を適当にとると、

$$G_0(\lambda_0)\begin{cases} Q_1: & \lambda_0 x^2 + 2yz = 0 \\ Q_2: & \lambda_0 y^2 + 2xz = 0 \\ Q_3: & \lambda_0 z^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

と書ける（λ はパラメーター）。このとき $\Delta = \xi_1 \xi_2 \xi_3$, $DS = \lambda_0(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3) - (\lambda_0 + 2)\xi_1 \xi_2 \xi_3$ となっていて、［Δ, DS］は明らかに Hesse pencil であることが判る。$G_0(\lambda_0)$ とかいたのは $\lambda_0$ に依存したこの３つの円錐曲線のグループを指している。さて、前節に述べたことから、ここで３通りの逆走が考えられる訳であるが、逆走の行った先の受け皿として次の３つのグループを天下り式に与えてしまおう。

$$G_i(\lambda_i)\begin{cases} \lambda_i X_i^2 + 2Y_i Z_i = 0 \\ \lambda_i Y_i^2 + 2X_i Z_i = 0 \\ \lambda_i Z_i^2 + 2X_i Y_i = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

但し、ここで

$$
\begin{cases}
X_1 = x + y + z \\
Y_1 = x + \omega y + \omega^2 z \\
Z_1 = x + \omega^2 y + \omega z
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
X_2 = \omega x + y + z \\
Y_2 = x + \omega y + z \\
Z_2 = x + y + \omega z
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
X_3 = \omega^2 x + y + z \\
Y_3 = x + \omega^2 y + z \\
Z_3 = x + y + \omega^2 z
\end{cases}
$$

こうして、4つのグループ $G_i(\lambda_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ が出来

だが、ここで我々は $G_j(\lambda_j)$ の各々のメンバーが $G_k(\lambda_k)$ の各々のメンバーと2点で接しているとき、この2つのグループは善隣関係にあると言うことにしよう。この関係は、2つが互いに逆走によって移り合うということと同値である。

<u>定理1.</u> 任意の対 $0 \leq i \neq j \leq 3$ に対して1次分数函数 $f_{ij}(z)$ があって、$G_i(\lambda_i)$ と $G_j(\lambda_j)$ は $\lambda_i = f_{ij}(\lambda_j)$ であるとき、またそのときに限って善隣関係にある。

ここで勿論 $f_{ij}(f_{ji}(z)) = z$ である。具体的には $f_{ij}$ は次のように与えられる。

$$f_{10}(z) = -(2z+1)/(z+2), \quad f_{20}(z) = -(2\omega z+1)/(z+2\omega^2)$$

$$f_{30}(z) = -(2\omega^2 z+1)/(z+2\omega), \quad f_{21}(z) = -(2z+\omega)/(z+2\omega)$$

$$f_{31}(z) = -(2z+\omega^2)/(z+2\omega^2), \quad f_{32}(z) = f_{20}(z)$$

この形から、次のことが判る。

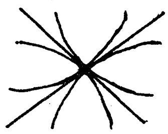
系1. すべての三つ組 $0 \leq i, j, k \leq 3$ に対して、変換 $z \to f_{ki} \circ f_{ij} \circ f_{jk}(z)$ は、リーマン球上唯一の固定点をもつ。

したがって、例えば組 $(0, 1, 2)$ に対しては $G_0(\omega)$, $G_1(\omega^2)$, $G_2(\omega^2)$ が互いに善隣関係にある。(これらに対して $G_3(\lambda_3)$ は $\lambda_3$ の如何なる有限の値に対しても善隣関係にあることはできない。)

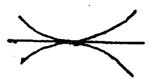
こうして得られた9個の円錐曲線族は $3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$ 個の接点を持つように思われるが、実はこれらは3個ずつ一致して、18個の三重接点( $\asymp$ )になる。残りの交点は36個の単純交点( $\times$ )である。このような図形を我々は(円錐曲線の)小Hesse図形と呼ぶ。この図形は次のような意味で非常に重要である。即ち、9個の円錐曲線の合併である18次曲線で分岐する $\mathbb{P}_2$ の2重被覆を考えると、36個の $A_1$ と18個の $\tilde{E}_8$ を持つ曲面となるが、この18個の特異点の complement は2次元超球の quotient となっていることが判るのである。このことは、最近の Hirzebruch の仕事に形を変えて現れてきるが、それは小Hesse図形の別の構成と関係している。ここではしかしこのことに深く立ち入ることはできない。このような小Hesse図形

を4個含むものが大Hesse図形なのであるが、それは別の3つの組(0, 1, 3), (0, 2, 3) (1, 2, 3)に対しても今の9個の円錐曲線の構成を繰り返して、全部を並列すれば出来る。 この大図形は12本の直線 $x, y, z, X_i, Y_i, Z_i$ $(i=1, 2, 3)$ の作る図形(Hesseの直線図形)の自己同型群 HS によって自分自身に写される。 大図形は次のような奇妙な交り方をするが、今のところその正体ははっきりとは判らない。 即ち、それは

12個の

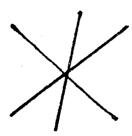


72個の



108個の

144個の



の形の交点を持ち、残りは全て単純交点となる。

**4.** 前節の4つのグループ $G_i(\lambda_i)$ $(i=0,1,2,3)$ を使って 有名な Valentiner-Wiman の図形を構成することができる。

<u>系2</u>. $z=f_{03}\circ f_{31}\circ f_{12}\circ f_{20}(z)$ は $2z^2-z+2=0$ と同値である。

そこで $\lambda_0=(1\pm\sqrt{-15})/4$ とおき、$\lambda_2=f_{20}(\lambda_0)$, $\lambda_1=f_{12}(\lambda_2)$, $\lambda_3=f_{31}(\lambda_1)$ と順に定めると、自動的に $\lambda_0=f_{03}(\lambda_3)$ が満されることになる。定理1により6個の円錐曲線 $G_0(\lambda_0)$, $G_1(\lambda_1)$ の各々は、もう1組の6個の $G_2(\lambda_2)$, $G_3(\lambda_3)$ の各々と2点で接する。このような12個の円錐曲線は Valentiner-Wiman によって既に前世紀に求められていた。彼らは $PSL(2,9)\cong A_6$ の $\mathbb{P}_2$ への作用を具体的に構成したのだが、$A_6$ は明らかに6個の二十面体群 $A_5$ を含んでいる。各々の $A_5$ は1つずつ円錐曲線を不変にし、したがって 6個の円錐曲線を得る。ところが $PSL(2,9)$ は $Gal(F_9/F_3)$ の作用からくる外部自己同型を持ち、これによって 最初の6個の

$A_5$ は別の6個の $A_5$ に写される。これに対応して、更に6個の円錐曲線が出来るのである。我々の構成から HS の一部分がこの図形に作用することは判るのだが、$G_2(\lambda_2)$, $G_3(\lambda_3)$ などのグループ分は もっと大きな群 $A_6$ の作用では意味が無くなってしまうのである。

**5.** 最後に Klein 群 KL を迷走によって構成してみよう。第3節とは違って、ここでは [Δ, DS] に次のような条件を課すことにする。

i) DS もまた三角形である。

ii) [Δ, DS] は Δ, DS の他にもう1つの三角形を含む。

iii) [Δ, DS] は円錐曲線と直線とから成る特異メンバーを含む。

このような条件の下で組 $(Q_1, Q_2, Q_3)$ は次のような三つ組 T(S) として与えられる。

$$T(s):\begin{cases} Q_1(s): & sx^2+y^2+z^2=0 \\ Q_2(s): & x^2+sy^2+z^2=0 \\ Q_3(s): & x^2+y^2+sz^2=0 \end{cases}$$

ここで パラメーター $s$ は容易に判るように このような三つ組の射影的不変量である。明らかに $T(s)$ は座標の入れ替えと符号の交換から生成される群 $\cong S_4$ によって自分自身に写される。座標の符号交換から生成される Klein の四元群 $K$ は $S_4$ の正規部分群である。ところで、条件 i) と基本定理から $Q_i(s)$ 達のいずれとも2点で接する6個の円錐曲線が得られるが、これらは $S_4$ の作用で互いに移り合う。この6個は $K$ の作用では3個の orbits に分れる。この3つの orbits から1個ずつ勝手に取り出して合せると、合計8個の三つ組が生まれるが、そのうちの4個だけが $T(s)$ と同じように i), ii), iii) を満している。但し、射影不変量 $s$ は今度は $1/s$ に置きかわっている。この4個のうちから1つを選び、それを $T'(1/s)$ と書き、これに対して また同じ操作を施せば また4個の三つ組 —— $T_i''(s)$ $(i=1,2,3,4)$ と書く —— が得

されるが、最初の $T(s)$ はこのうちの1つである。そこで $T_1''(s)$ は $T(s)$ と違うものとすると、この2つは同じ射影不変量 $s$ を持つので、$T(s)$ を $T_1''(s)$ に写す non-trivial な射影変換 $L(s)$ が無くてはならない。そこで最初の $S_4$ と $L(s)$ とで生成される変換群を $\mathcal{G}(s)$ とすると、

<u>定理2</u>. $\mathcal{G}(s)$ は $2s^2+3s+2=0$ なるとき、またそのときに限って有限群となる。

ことが証明される。そして $s=(-3\pm\sqrt{-7})/4$ のとき $\mathcal{G}(s)$ は $KL\cong PSL(2,7)$ と同型になり、$T(s)$ の orbit から7個の円錐曲線を得、$T'(1/s)$ の orbit から更に7個の円錐曲線が得られる。一方の組の各々は他方の組の各々と2点で接している。この2接点を結ぶことによって49本の直線を得るのであるが、これはまた $KL$ の作用の orbits として28本と21本とに分れる。28本の直線は有名な Klein 4次曲線の bitangents であり、21本の方は $KL$ の中の21個の reflexions の fixed point sets の1次元成分たちである。このような構成の長所は、直接 $KL$ が $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ 上に定義されることが判

るという点にあると言える。