数理解析研究所講究録
第536巻 1984年 56-79

逆不安定解と2次分数調波解

岩手大 教育 中嶋文雄 (Fumio Nakajima)

§1. まえがき.

周期的外力を有するDuffing方程式

(1) $\ddot{u}+k\dot{u}+au+bu^3=B\cos t \quad (\cdot=\frac{d}{dt})$

を考える. ここで $k>0$, $a\geqq 0$, $b>0$, $B>0$ は定数とする. (1)に於て, kとBの数値に依って複数ケの周期解が存在することが知られている. これらの中で, 奇数次の分数調波解については, その存在証明等は Loud (1958), 占部 (1969) らによって, 各々摂動論的, 数値解析的に研究されて来た。他方, 偶数次の分数調波解については, その存在証明は摂動論的に極めて困難であり, 近年になって, 篠原 (1974) によって数値解析的に証明された。

他方、この偶数次の分数調波解の発生のしくみについては、比較的古くから、既に1940年代に、Levinson, Massera によって、逆不安定な2π-周期解があれば、2次分数調波解が存在することが指摘された。但し、彼らは、すべての周期解は simple であるという仮定を置いている。

更に、物理現象としての研究は、林-上田-川上(1969)によって行われ、そこでは2次分数調波解は逆不安定な2π周期解から、分岐して発生することが報告されている。

本講では、(1)に於て、simple の仮定無しに、逆不安定な2π周期解が存在すれば、Bを変化させるとき、そこから2次分数調波解が分岐発生することを証明する。証明では、周期点の指数概念が用いられる。

次の2次元周期系を考える

$$(2)\quad \begin{cases} \dot{u} = U(t, u, v; B) \\ \dot{v} = V(t, u, v; B) \end{cases} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

U, V は $(t, u, v, B) \in R^4 \to R^1$ なる連続関数で

t について 2π-周期的で、次の条件を満すとする；

条件(I). U, V は (t, B) を固定するとき，(u, v) について

解析的とする。

(II) $\dfrac{\partial U}{\partial u} + \dfrac{\partial V}{\partial v} < 0 \qquad ({}^\forall (t, u, v, B) \in R^4)$

(III) ${}^\forall B$ に対し，(2) は常に Dissipative である

(2) の解で，$t = 0$ で $(x, y) \in R^2$ を通るものを

$(u(t, x, y), v(t, x, y))$ とする．(2) が Dissipative で

あるとは．R^2 のある compact set D が存在して．

任意の解 $(u(t, x, y), v(t, x, y))$ に対し，t が十分大で

あれば

$$(u(t, x, y), v(t, x, y)) \in D$$

となることである．

(1) に対応する 2次元系

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 + B\cos t \end{cases}$$

は 条件 (I), (II), (III) をすべて満している。

さて, $(u(t,x,y), v(t,x,y))$ が t について, 2π-周期的ならば, (x,y) を 2π-周期点と呼び, t について 4π-周期的ならば, (x,y) を 4π-周期点と呼ぶ。4π-周期点であるが, 2π-周期点でない点を, 2次分数調波点と呼ぶ. 即ち, 2次分数調波点は, 2次分数調波解の $t=0$ での初期値である。

Poincaré 写像 $T: R^2 \to R^2$ を考える;

$$T(x,y) = (u(2\pi,x,y),\ v(2\pi,x,y)).$$

(2) の仮定より, $T(x,y)$ は (x,y) の解析関数である.

(x,y) が 2π-周期点 $\longleftrightarrow$ $T(x,y) = (x,y)$,

(x,y) が 4π-周期点 $\longleftrightarrow$ $T^2(x,y) = (x,y)$

(x,y) が 2次分数調波点 $\longleftrightarrow$ $T^2(x,y) = (x,y)$, $T(x,y) \neq (x,y)$

である.

§2. 周期点の指数

[6] より次の事が知られている；

命題1. T^2 の不動点は，高々有限ケである．

さて，C を単一閉曲線で，その上に T^2 の不動点は無いものとする．$Q \in C$ に対し，Q を始点，T^2Q を終点とする vector を $\overrightarrow{Q, T^2Q}$ で表わすと，

$$\overrightarrow{Q, T^2Q} \neq 0$$

となる．

今，Q が C 上を反時計回りに丁度一回転すれば，$\overrightarrow{Q, T^2Q}$ は原点の回りを反時計回り，あるいは時計回りに何回か回転する．その回転数を I_0 とするとき

$$I(T^2; C) = \begin{cases} I_0 & (\overrightarrow{Q, T^2Q} \text{ は反時計回り}) \\ -I_0 & (\quad 〃 \quad \text{は時計回り}) \end{cases}$$

と定義し，C の T^2 による指数という．

さて P を T^2 の不動点とする. P の十分小なる近傍を考え, この中には, P 以外に T^2 の不動点はないものとする. これは命題1より可能である。上の近傍に含まれる単一閉曲線で, その内部に P を含むものを C で表す. T^2 は C 上に不動点を持たないから, $I(T^2, C)$ が定義される. 次に, C を一点 P に連続的に縮少して行くことを考えると, $I(T^2, C)$ も連続的に変化する. しかし $I(T^2, C)$ は常に整数値を取るから, 実際は一定値となる. 故に

$$I(T^2, P) = I(T^2, C)$$

と定義し, P の T^2 による指数と呼ぶ.

[9] の定理2と同様にして, 次の命題2が成立する;

命題2

(i) $|I(T^2, P)| \leqq 1$

(ii) C の内部に含まれる T^2 の不動点の集合を $\{P_j\}_{j=1}^{n}$ とすると,

$$I(T^2; C) = \sum_{j=1}^{n} I(T^2; P_j)$$

である.

次の事が成立する;

命題 3. Q_1 を 2次分数調波点とすれば, $Q_2 = TQ_1$ も 2次分数調波点で

(4) $I(T^2; Q_1) = I(T^2; Q_2)$

である.

証明 Q_2 が 2次分数調波点であることは明らかである. Q_1 を中心に半径が十分小なる円で, その上及び内部に, Q_1 以外に T^2 の不動点を持たないものを C_0 とすると,

(5) $I(T^2; C_0) = I(T^2; Q_1)$

が得られる.

$\forall t \in R$ に対し,

$$C_t = \{ (u(t, Q), v(t, Q)) \in R^2 ; Q \in C_0 \}$$

とおく.

解の初期値に対する唯一性より，C_t も単一閉曲線で，

$C_{2\pi}$ は，その内部に唯一つの T^2 の不動点 Q_2 を

含んでいる．故に

$$(6) \quad I(T^2, C_{2\pi}) = I(T^2, Q_2)$$

となる．今，(2) の解で，$t=s$ で (x,y) を通るものを

$(u(t,s;x,y), v(t,s;x,y))$ とし，

$$S_t(x,y) = (u(4\pi+t, t; x,y), v(4\pi+t, t; x,y))$$

と置く．

この時，$S_0 = S_{2\pi} = T^2$ であり，S_t の不動点は

4π-周期解の t における値となる。故に $Q \in C_t$ に

対し，$S_t Q \neq Q$ であり，$\overrightarrow{Q, S_t Q} \neq 0$ となる。

Q が C_t 上を反時計回りに一周するとき，

$\overrightarrow{Q, S_t Q}$ が原点の回りを反時計回りに I_0 回転すれば，

$I(S_t, C_t) = I_0$ と置き，時計回りに I_0 回転

すれば，$I(S_t, C_t) = -I_0$ と置く．

S_t と C_t は共に t の変化に対し連続的であるから、
$I(S_t, C_t)$ も連続的となり、かつ常に整数値であるから、
一定となる。故に

$$I(S_{2\pi}, C_{2\pi}) = I(S_t, C_t) = I(S_0, C_0)$$

となり、$S_{2\pi} = S_0 = T^2$ より

$$I(T^2; C_{2\pi}) = I(T^2; C_0)$$

となる。故に、(5), (6) より (*) が得られる。

証明終り、

さて、2π-周期点 $P=(x,y)$ に対し、その特性乗数、
即ち、
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(2\pi, x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(2\pi, x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(2\pi, x, y) \end{pmatrix}$$
の固有値を ρ_1, ρ_2 で表し、

もし、$|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$ ならば P は完全安定といい、

もし、$\rho_1 < -1 < \rho_2 < 0$ ならば P は逆不安定という。

2π-周期点 P を T^2 の不動点と見れば，その特性乗数は ρ_1^2, ρ_2^2 となる。これより，次の事が導かれる：

(i) P が完全安定ならば，$I(T^2; P) = +1$，

(ii) P が逆不安定ならば $I(T^2; P) = -1$

（[3] を参照）。

以下，(2) で B を変化させるとき，$T = T(B)$ と書く．すると $T(B)(x, y)$ は B の連続関数となる。

§4 2次分数調波解の分岐.

<u>定理1</u> ある $B_0 \in R$ と $\varepsilon > 0$ が存在して

$B_0 - \varepsilon < B < B_0 + \varepsilon$ に対し, (2) は 2π-周期解 $P(B)$ を持ち, $P(B)$ は B の変化に対し連続的で,

$B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ で $P(B)$ は逆不安定で,

$B_0 - \varepsilon < B < B_0$ で $P(B)$ は完全安定 とする.

このとき, 次の (i), (ii) の中, 少くとも いづれか一方が成立する:

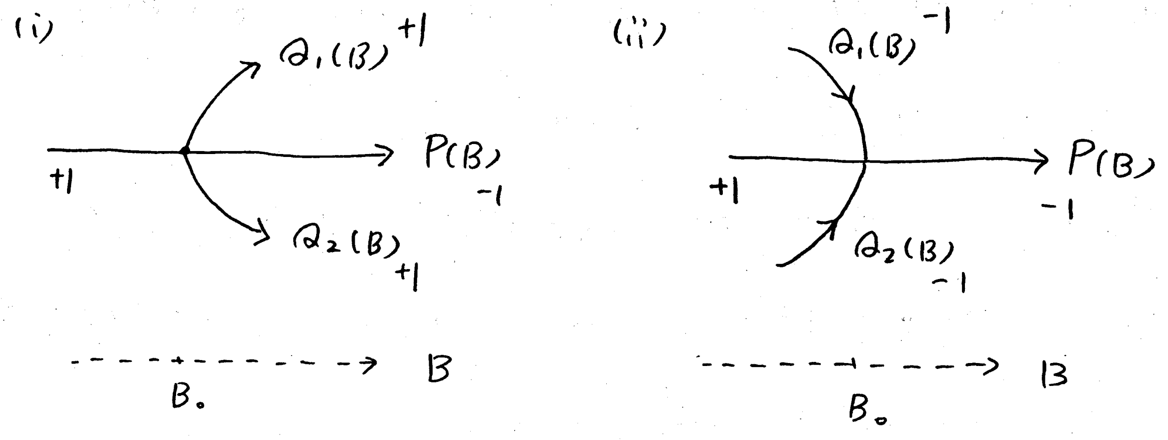
(i) $B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ で (2) は少くとも 2ケの 2次分数調波解 $Q_1(B)$, $Q_2(B)$ を持ち,

$B \to B_0$ のとき, $Q_i(B) \to P(B_0)$ $(i=1, 2)$,

かつ $$I(T^2(B), Q_i(B)) = -I(T^2(B), P(B))$$
$(i=1, 2)$

(ii) $B_0 - \varepsilon < B < B_0$ で (i) と同様の事が成立する。

上の結果を図示する;



ここで, +1, −1 は各々の不動点の $T^2(B)$ に対する指数を表している.

定理1の証明を行う.

<u>step1</u> $P(B_0)=P_0$ とする. P_0 を中心に半径が十分小なる円 C で, 次の要件を満すものの存在を示す;

(i) $T^2(B_0)$ は C の上に不動点を持たず, かつ C の内部に唯一つの不動点 P_0 を持つ.

(ii) ε を十分小とし, $|B-B_0|<\varepsilon$ に対し, $P(B)$ は C の内部に含まれ, かつ $P(B)$ は $T(B)$ の C 上及び C の内部における唯一つの不動点である.

(i) は命題1より, (ii) の前半は $P(B)$ の B に対する連続性より明らかである。(ii) の後半を示すには,

$$S(x,y,B) = T(B)(x,y) - (x,y)$$

と置き, $S(x,y,B)$ が $(x,y)=P_0$, $B=B_0$ の近傍で唯一つの零点を持つことを示せば良い。P_0 の特性乗数を ρ_1, ρ_2 とすれば, $\rho_1 \leqq -1 \leqq \rho_2 < 0$ で, かつ

$$\left.\frac{\partial S(x,y,B_0)}{\partial (x,y)}\right|_{(x,y)=P_0} = (\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1) \neq 0.$$

故に, 陰関数の定理より示された。

<u>Step 2</u>. 要件の(i)より

$$(7) \quad I(T^2(B_0), P_0) = I(T^2(B_0), C)$$

と定義できる。εが十分小ならば, $|B-B_0|<\varepsilon$ では, $T^2(B)$ は C 上に不動点を持たず, 従って, $I(T^2(B), C)$ が定義され, B の変化に対し連続的となる。このとき, $I(T^2(B), C)$ は常に整数値であるから一定となり

$$I(T^2(B), C) = I(T^2(B_0), C).$$

故に (7) より

$$I(T^2(B_0), P_0) = I(T^2(B), C)$$

になり、

命題 2 より、$|B - B_0| < \varepsilon$ に対し、

$$(8) \qquad I(T^2(B_0), P_0) = \sum_{p \in C} I(T^2(B), p)$$

を得る。ここで右辺の和は C に含まれる $T^2(B)$ の不動点について取る。

<u>Step 3</u>. さて、$B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ とすると、条件(例)より

$$I(T^2(B), P(B)) = -1 .$$

もし、C の中に、$T^2(B)$ の不動点で、指数 $+1$ のものが無ければ、命題 2 より、$I(T^2(B), p) \leqq 0$ であるから、

$$\sum_{p \in C} I(T^2(B), p) \leqq I(T^2(B), P(B)) = -1 .$$

よって、(8) より

$$I(T^2(B_0), P_0) \leqq -1$$

になり

命題２より，

$$(9) \quad I(T^2(B_0), p_0) = -1$$

となる．

次に $B_0 - \varepsilon < B < B_0$ とすると，条件と例より

$$I(T^2(B), P(B)) = +1$$

となり，もし C の中に $T^2(B)$ の不動点で指数 -1 のものが無ければ，同様の議論より，

$$I(T^2(B_0), B_0) = +1$$

となり，(9) に矛盾する．故に，$B_0 < B < B_0 + \varepsilon$ か，$B_0 - \varepsilon < B < B_0$ の少くともいづれか一方に対し，$T^2(B)$ は少くとも２ケの不動点（指数 $+1$ のものと指数 -1 のもの）を持つ。

<u>Step 4</u> 要件 (ii) より，$T(B)$ は C の中に不動点を唯一つしか持たないので，$T^2(B)$ の２つの不動点の中，一方は，$T(B)$ の不動点ではなく，２次分数調波点となる．

これを $Q_1(B)$ とすると,

$$(10) \quad I(T^2(B), P(B)) = -I(T^2(B), Q_1(B))$$

となる。 $Q_2(B) = T(B)Q_1(B)$ とおくと, $Q_2(B)$ も

2次分数調波点となる。

$B \to B_0$ の時, $P(B) \to P_0$ なので,

C の半径は任意に小さく取れ, 従って

$$Q_1(B) \to P_0$$

となる。

又, $B \to B_0$ のとき, $Q_2(B) \to T(B_0)P_0 = P_0$ が

得られる。更に (10) と命題 3 より

$$I(T^2(B), P(B)) = -I(T^2(B), Q_i(B)) \quad (i = 1, 2)$$

となり, 証明は終る。

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 + B\cos t \end{cases}$$

<u>定理2</u>　(3)は $B=B_1$ のとき，逆不安定な 2π-周期解を持つとする。このとき，$0<B_0<B_1$ と正数 $\varepsilon>0$ が存在して，次の事が成立する；

(3)は $B_0-\varepsilon<B<B_0+\varepsilon$ で 2π-周期解 $P(B)$ を持ち，$P(B)$ は B で解析的で，$B_0<B<B_0+\varepsilon$ では逆不安定となり，$B_0-\varepsilon<B<B_0$ では完全安定となる。従って，定理1の結論が成立する。

注．(3)に於て，B を減少させる代りに，k を増加させても同様の議論が成立して，同じ結論を得る。

<u>証明</u>．

<u>Step 1</u>．(3)の解で，$t=0$ で (x,y) を通るものを
$(u(t,x,y;B),\ v(t,x,y;B))$ と置き，

$$f(x, y, B) = u(2\pi, x, y; B) - x$$

$$g(x, y, B) = v(2\pi, x, y; B) - y$$

とする。

f, g は x, y, B で解析的であり, (x, y) が 2π-周期点であることは

$$f(x, y, B) = g(x, y, B) = 0$$

となることと同値である.

さて, $B = B_1$ のとき与えられた逆不安定な 2π-周期点を (x_0, y_0) とし, その特性乗数を ρ_1, ρ_2 とすれば, $\rho_1 < -1 < \rho_2 < 0$ となり,

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, B_1) = (\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1) \neq 0$$

となる.

今, $f(x_0, y_0, B_1) = g(x_0, y_0, B_1) = 0$ であるから, 陰関数の定理より $B = B_1$ の近傍で定義された解析関数 $x(B), y(B)$ が存在して.

7.

$$(11) \begin{cases} f(x(B), y(B), B) = 0 \\ g(x(B), y(B), B) = 0 \end{cases}$$

$x(B_1) = x_0, \quad y(B_1) = y_0$　　となる。

$(x(B), y(B))$ の $B < B_1$ の方向での解析関数としての最大の定義域を (B_2, B_1) とすると、(11) が成立し続けるので、$(x(B), y(B))$ は (B_2, B_1) で 2π-周期解となる。$(x(B), y(B))$ の特性乗数を $\rho_1(B)$, $\rho_2(B)$ とし、これらは B の連続関数である様に番号付けられているとし、

$$\rho_1(B_1) < -1 < \rho_2(B_1) < 0$$

とする。Abelの公式より

$$(12) \quad \rho_1(B)\rho_2(B) = e^{-2\pi k}$$

になる。

Step 2　$B_3 \in (B_2, B_1]$ が存在して

(13)　$-1 < \rho_1(B_3) < 0$

となることを示す。

もし、上の B_3 が存在しなければ、$\rho_1(B)$の連続性より

$$\rho_1(B) \leqq -1 < \rho_2(B) < 0 \qquad (B_2 < B < B_1)$$

となる。このとき、$B_2 = -\infty$ である。実際、もし $B_2 > -\infty$ ならば、$B \to B_2$ のとき、$P(B)$ は集積点を持ち、その一つは $B = B_2$ での 2π-周期点であり、特性根 ρ_1, ρ_2 は

$$\rho_1 \leqq -1 < \rho_2 < 0$$

となる。すると Step 1 の議論より、$P(B)$ は解析関数として B_2 を超えて定義可能となる。これは B_2 の決め方に矛盾する。従って $B_2 = -\infty$ である。

すると　$0 \in (B_2, B_1)$　となり，

$$(14) \qquad \rho_1(0) \leqq -1 < \rho_2(0) < 0$$

が得られる。他方，(3) は $B=0$ のとき

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 \end{cases}$$

となり，その 2π-周期解は唯一つ，$u=v=0$ で，その特性乗数の絶対値は 1 より小となり，これは (14) に矛盾する。以上より (13) が成立する。

Step3　(13) と $\rho_1(B)$ の連続性より，ある $B \in (B_3, B_1)$ が存在して

$$(15) \qquad \rho_1(B) = -1$$

となる。$\rho_1(B)$ が -1 の近傍にあれば，(12) より，$\rho_2(B)$ は $-e^{-2\pi k}$ の近傍にあるから，$\rho_1(B)$ と $\rho_2(B)$ は相異なる実根となり，故に $\rho_1(B)$ は B に対し，解析的となる。

従って (15) を満す β の中で、ある β_0 が存在して

十分小なる $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\rho_1(\beta) < -1 \qquad (\beta_0 < \beta < \beta_0 + \varepsilon),$$

$$\rho_1(\beta_0) = -1,$$

$$-1 < \rho_1(\beta) < 0 \qquad (\beta_0 - \varepsilon < \beta < \beta_0)$$

となる。このとき、$-1 < \rho_2(\beta) < 0$ であるから、

$P(\beta)$ は $\beta_0 < \beta < \beta_0 + \varepsilon$ で逆不安定で、

$\beta_0 - \varepsilon < \beta < \beta_0$ で完全安定となる。

証明は終る。

参考文献

[1] Funato & Maekawa, On the existence of subharmonics for Duffing's equation, Math. Japonica, 5 (1958~59), pp. 27-32.

[2] C. Hayashi, Y. Ueda & H. Kawakami, Transformation theory as applied to the solutions of non-linear differential equations of the second order, Int. J. Non-linear Mechanics, vol. 4 (1969), pp 235-255.

[3] N. Levinson, Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order, Ann. Math., 45 (1944), 723-737.

[4] W. S. Loud, Periodic solutions of $\ddot{x}+c\dot{x}+g(x)=\varepsilon f(t)$, Amer. Math. Soc. Mem., No. 31 (1958).

[5]. J. L. Massera. The number of subharmonic solutions of nonlinear differential equations of the second order, Ann. Math., 50 (1949), 118-126.

[6] F. Nakajima & G. Seifert, On the number of periodic solutions of 2-dimensional periodic systems, J. Diff. Equations, vol. 49, No. 3 (1983), 430-440.

[7] Y. Shinohara, Numerical investigation of $\frac{1}{2}$-subharmonic solutions to Duffing's equation, Memoirs of Numerical Mathematics, No. 1 (1974).

[8] M. Urabe, Numerical investigation of subharmonic solutions to Duffing's equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ., vol. 5 (1969), 79-112.

[9] F. Nakajima, Duffing 方程式における指数定理について, 数理研講究録 506 (1983), 237-253.