数理解析研究所講究録
第537巻 1984年 69-99

順序及び名義の系列検定

岡山理大・理　一村　稔
Minoru Ichimura
九州大・理　浅野　長一郎
Chooichiro Asano

1. 序論

近年，電子計算機の急速な発達と大衆化に伴って，乱数の使用は，非常に拡大している。使用分野は，Ｍｏｎｔｅ－Ｃａｒｌｏ法やシミュレーションを用いる工学，医学，物理学，統計学，ＯＲ，社会学，経済学，生物学等の多分野にわたる。使用に際しては，一様乱数を所望の分布を有する乱数へ変換する。従って，乱数の生成は，一様乱数の生成が主要課題である。生成法には，算術乱数と物理乱数のごとく，算術演算による方法と，物理現象に基づく方法に大別される。算術乱数は，一般に，連続な数の近似に用い得る程度の数を，一度に生成する。一方，物理乱数は，Ｍ進数（Ｍ≧２）１桁乱数を物理現象に基づいて生成し，複数個を連結して，一様乱数とする。[1]

いずれかの方法によって生成された一様乱数は，統計的検

定を受けるべきである。本論文では，特に，M進1桁乱数に注目した無規則性の検定を連（上昇連、下降連　及び Ties）の分布を利用して行う。その目的で，M進1桁一様乱数列中の連の個数及び共分散行列を求め，平均個数と共分散既知として，χ^2検定を実施可能とした。また，適用例を示したものである。なお従来の連に基づく検定(Levene & Wolfowitz)[2]は，離散的数列，すなわち，M進1桁乱数には，適用出来ない。

2. 上昇連、下降連　及び Ties

Randomnessを定義する方法は，種々あるが[3]，本論文では，M進1桁一様乱数に注目し，以下の如く定義する。すなわち，一様分布をなし，独立である。

$$P(X_j = i) = 1/M \quad ,$$

$$P(X_j = i,\ X_{j+1} = k)$$

$$= P(X_j = i) \cdot P(X_{j+1} = k) \qquad (1)$$

ここで，$i, k \in M = M\{0, 1, \cdots, M-1\}$とする。

つぎに，M進1桁乱数列において，連を定義する際には，Tieを無視し得ない。したがって，Tieを導入して，上昇連，下降連及びTieを定義する。

$S = (a_1, a_2, \cdots, a_N)$：1桁乱数列

a) $a_i=k$, $k\in M$ のとき，転向点i(turning point i)で，転向値k(turning value k)である長さpの上昇連

$$a_{i-1}\geqq a_i < a_{i+1} < \cdots < a_{i+p} \geqq a_{i+p+1} \qquad (2)$$

b) $a_i=k$, $k\in M$ のとき，転向点i(turning point i)で，転向値k(turning value k)である長さpの下降連

$$a_{i-1}\leqq a_i > a_{i+1} > \cdots > a_{i+p} \leqq a_{i+p+1} \qquad (3)$$

c) $a_i=k$, $k\in M$ のとき，転向点i(turning point i)で，転向値k(turning value k)である長さpのTie

$$a_{i-1}\neq a_i = a_{i+1} = \cdots = a_{i+p} \neq a_{i+p+1} \qquad (4)$$

ただし，乱数列Sの両端，すなわち，a_1, a_{N-p} の点では，(2),(3),(4)を各々以下の如く定義し，長さpで，転向値kと考える。

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{p+1} \geqq a_{p+2} \qquad (2\text{-}1)$$

$$a_{N-p-1} \geqq a_{N-p} < a_{N-p+1} < \cdots < a_N \qquad (2\text{-}2)$$

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{p+1} \leqq a_{p+2} \qquad (3\text{-}1)$$

$$a_{N-p-1} \leqq a_{N-p} > a_{N-p+1} > \cdots > a_N \qquad (3\text{-}2)$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{p+1} \neq a_{p+2} \qquad (4\text{-}1)$$

$$a_{N-p-1} \neq a_{N-p} = \cdots = a_N \qquad (4\text{-}2)$$

ここで，$a_1 = a_{N-p} = k$　とする。

さて，乱数列$S = (a_1, a_2, \cdots, a_N)$中の連の個数及び共分散を計算するために，新しく3種類の確率変数を導入する。これらの変数は，連の計算においては，よく用いられるものである。[2]

ここで，$a_i = k$

$$X_{ip}^{k} = \begin{cases} 1, & a_i \text{が長さ} p \text{の連の転向点で，} a_i = k \text{である} \\ & \text{転向値を持つとき，} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{5}$$

$$X_i = \begin{cases} 1, & a_i \text{が転向点となる連であるとき，} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{6}$$

$$W_{ip}^{k} = \begin{cases} 1, & a_i = k \text{で，転向点となり長さ} p \text{以上の連の} \\ & \text{とき，} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{7}$$

式(5),(6),(7)を用いて，乱数列S中の各種の連の平均個数が求められる。[4]　文献［4］で，一部の平均個数は，求められており，ここでは，それに含まれていない結果も一緒にして，結果のみを示す。

r_p^k：S中の転向値kの長さpの連の平均個数，

$r_p'^k$：S中の転向値kの長さp以上の連の平均個数，

r^k ：S中の転向値kの連の平均個数，

r_p ：S中の長さpの連の平均個数，

r'_p ：S中の長さp以上の連の平均個数，

r ：S中の連の平均個数，

連の定義より明らかなように，$E(X_1)=1$，$E(X_N)=0$である。また，

$$K=M-k-1 \tag{8}$$

$$A(p,k)=(M+1)C_p^k-C_{p+1}^{k+1} \tag{9}$$

$$B(p,k)=(k+1)C_p^k \tag{10}$$

とおくと，

$$E(X_{ip}^k)=[(K+1)A(p,K)+(k+1)A(p,k)+(M-1)^2]/M^{p+3} \tag{11}$$

for $i=2,\cdots,N-p-1$;

$E(X_{ip}^k)=0$, for $i=N-p+1,\cdots,N$;

$$E(W_{ip}^k)=[B(p,K)+B(p,k)+(M-1)]/M^{p+2} \tag{12}$$

for $i=2,\cdots,N-p$;

$E(W_{ip}^k)=0$, for $i=N-p+1,\cdots,N$;

$$E(X_{1p}^k)=[A(p,K)+A(p,k)+(M-1)]/M^{p+2} \tag{13}$$

$E(X_{N-p\,p}^k)=[B(p,K)+B(p,k)+(M-1)]$

$$/ M^{p+2} \tag{14}$$

$$E(W_{1p}^{k}) = [C_p^K + C_p^k + 1] / M^{p+1} \tag{15}$$

式（11）から，式（15）を用いると，

$$\begin{aligned} r_p^k = \sum_{i=1}^{N} E(X_{ip}^{k}) = & (N-p-2)[(K+1)A(p,K) \\ & + (k+1)A(p,k) + (M-1)^2] / M^{p+3} \\ & + [A(p,K) + A(p,k) + 2(M-1) \\ & + B(p,K) + B(p,k)] / M^{p+2} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} r'^{k}_{p} = \sum_{i=1}^{N} E(W_{ip}^{k}) = & (N-p-1)[B(p,K) \\ & + B(p,k) + (M-1)] / M^{p+2} + [C_p^K + C_p^k + 1] \\ & / M^{p+1} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} r_p = \sum_{k=0}^{M-1} r_p^k = & (N-p-2)[2\{(p+1) \\ & \times A(p+2, M+1) - p C_{p+2}^{M+1} - C_{p+3}^{M+2}\} \\ & + M(M-1)^2] / M^{p+3} + 2[A(p+1, M) \\ & + M(M-1) + (p+1) C_{p+2}^{M+1}] \end{aligned} \tag{18}$$

$$r'_p = \sum_{k=0}^{M-1} r'^k_p = (N-p-1)[2(p+1)C^{M+1}_{p+2}$$

$$+ M(M-1)]/M^{p+2} + [2C^M_{p+1} + M]/M^{p+1} \quad (19)$$

$$r^k = (N-1)\{K(K+1)+k(k+1)+M-1\}/M^3$$

$$+\{1-2(M-1)/M^{N-3}\}/M^3 \quad (20)$$

$$r = \sum_{i=0}^{M-1} r^k = (N-1)(M-1)(2M+5)/3M^2$$

$$+\{1-2(M-1)/M^{N-3}\}/M^2 \quad (21)$$

一方，Mが十分大きな場合には，Levene & Wolfowitzが扱った連続な場合の連の個数と一致する。すなわち，

$\lim_{M\to\infty} r_p$，$\lim_{M\to\infty} r'_p$，$\lim_{M\to\infty} r'_i$ は，彼ら[2]の求めた(4.1),(4.2)と(4.3)とに一致する。

3. 連の共分散

3.1　転向値kである長さpとqとの連の共分散を求める。

$$V(R^k_p, R^k_q) = E[(R^k_p - E(R^k_p))(R^k_q - E(R^k_q))]$$

$$= E[(\Sigma X_{p\,i}^{\,k} - E(\Sigma X_{p\,i}^{\,k}))(\Sigma X_{q\,j}^{\,k} - E(\Sigma X_{q\,j}^{\,k}))]$$

$$= E[\sum (X_{pi}^{k} - E(X_{pi}^{k})) \sum (X_{qj}^{k} - E(X_{qj}^{k}))]$$

$$= \sum_{i} E[(X_{pi}^{k} - E(X_{pi}^{k}))(X_{qi}^{k} - E(X_{qi}^{k}))]$$

$$+ \sum\sum_{i<j} E[(X_{pi}^{k} - E(X_{pi}^{k}))(X_{qj}^{k} - E(X_{qj}^{k}))]$$

$$+ \sum\sum_{i<j} E[(X_{qi}^{k} - E(X_{qi}^{k}))(X_{pj}^{k} - E(X_{pj}^{k}))] \qquad (22)$$

さて，$j \geqq i + p + 3$ のとき，X_{pi}^{k} と X_{qi}^{k} とは独立であることを利用して，式（22)を整理する。

$$V(R_{p}^{k},\ R_{q}^{k}) = \sum_{i} E(X_{pi}^{k} X_{qi}^{k}) + \sum\sum_{i<j<i+q+3} E(X_{qi}^{k} X_{pj}^{k})$$

$$+ \sum\sum_{i<j<i+p+3} E(X_{pi}^{k} X_{qj}^{k}) - [\sum_{i} E(X_{pi}^{k})E(X_{qi}^{k})$$

$$+ \sum\sum_{i<j<i+q+3} E(X_{qi}^{k})E(X_{pj}^{k})$$

$$+ \sum\sum_{i<j<i+P+3} E(X_{pi}^{k})E(X_{qj}^{k})] \qquad (23)$$

$$X_{qi} X_{pj} = 0 \quad \text{for} \quad i < j < i + q$$

右辺の第1項は

$$\sum_{i} E(X_{pi}^{k} X_{qi}^{k}) = \sum_{i} E(\delta_{pq} X_{pi}^{k}) = \delta_{pq} E(\sum_{i} X_{pi}^{k})$$

$$= \delta_{pq} r_p^k$$

となる。ここでδ_{pq}はクロネッカのδである。さらに，右辺の第２項は，

$$\sum_{i<j<i+q+3}\sum E(X_{qi}^k X_{pj}^k) = \sum_{i=1}^{N-p-q} E(X_{qi}^k X_{p,i+q}^k)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-p-q-1} E(X_{qi}^k X_{p,i+q+1}^k) + \sum_{i=1}^{N-p-q-2} E(X_{qi}^k X_{p,i+2}^k)$$

$$= E(X_{q1}^k X_{p,1+q}^k) + \sum_{i=2}^{N-p-q-1} E(X_{qi}^k X_{p,i+q}^k)$$

$$+ E(X_{p,N-p-q}^k X_{p,N-p}^k) + E(X_{q1}^k X_{p,q+2}^k)$$

$$+ \sum_{i=2}^{N-p-q-2} E(X_{qi}^k X_{p,i+q+1}^k)$$

$$+ E(X_{q,N-p-q-1}^k X_{p,N-p}^k)$$

$$+ E(X_{q1}^k X_{p,q+3}^k) + \sum_{i=2}^{N-p-q-3} E(X_{qi}^k X_{p,i+q+2}^k)$$

$$+ E(X_{q,N-p-q-2}^k X_{p,N-p}^k)$$

となる。詳細は付録に示した。$G(i)=C^K_i+C^k_i$，
$H(i)=(K+1)C^K_i+(k+1)C^k_i+M-1$ とおく。式 (23)
においてNを含む項を取り出し，$V_N(R^k_p,\ R^k_q)$とすると，

$$
\begin{aligned}
V_N(R^k_p,\ R^k_q) = N[\,\delta(p,\ q)\{&(K+1)A(p,\ K)\\
&+(k+1)A(p,\ k)+(M-1)^2\}/M^{p+3}\\
&+(M-1)\{A(p,\ K)+A(q,\ K)\\
&+A(p,\ k)+A(q,\ k)\}/M^{p+q+3}\\
&+\{(M-1)(H(p)+H(q))\\
&+(K+1)(C^K_q A(p,\ K)\\
&+C^K_p A(q,\ K))+(k+1)(C^k_q A(q,\ k)\\
&+C^k_p A(q,\ k))\}/M^{p+q+4}\\
&+\{(M-1)\{2(M-1)^2+K(A(p,\ K)\\
&+A(q,\ K))\\
&+k(A(p,\ k)+A(q,\ k))\}+(k+1)\\
&\times\{(M-1+A(p,\ K))((2K+1)C^k_q\\
&+A(q,\ k))+(M-1+A(q,\ K))\\
&\times((2K+1)C^k_p+A(p,\ k))\\
&+2C^k_q A(p,\ k)+2C^k_p A(q,\ k)\}\\
&+(K+1)\{(M-1+A(p,\ k))\\
&\times((2k+1)C^K_q+A(q,\ K))\\
&+(M-1+A(q,\ k))((2k+1)C^K_p
\end{aligned}
$$

$$+A(p,K))+2C_q^K A(p,K)$$

$$+2C_p^K A(q,K)\}\}/M^{p+q+5}$$

$$-(p+q+5)\{(K+1)A(p,K)$$

$$+(k+1)A(p,k)+(M-1)^2\}$$

$$\times\{(K+1)A(q,K)+(k+1)$$

$$\times A(q,k)+(M-1)^2\}/M^{p+q+6}] \quad (24)$$

3.2　転向値kである長さpとq以上との連の共分散

ここで，η_{pq}を導入する。

$$\eta_{pq}=\begin{cases}1 & ,\ p \geqq q\text{のとき}\\ 0 & ,\ p<q\text{のとき}\end{cases} \quad (25)$$

$$V(R_p^k, R_q^{k\prime})=E[(R_p^k-E(R_p^k))(R_q^{k\prime}-E(R_q^{k\prime})]$$

$$=E[(\Sigma X_{pi}^k-E(\Sigma X_{pi}^k))(\Sigma W_{qj}^k-E(\Sigma W_{qj}^k))]$$

$$=\sum_{i} E(X_{pi}^k W_{qi}^k)+\sum_{i<j<i+q+2}\Sigma E(W_{qi}^k X_{pj}^k)$$

$$+\sum_{i<j<i+p+3}\Sigma E(X_{pi}^k W_{qj}^k)-[\sum_{i} E(X_{pi})E(W_{qi})$$

$$+\sum_{i<j<i+q+2}\Sigma(W_{qi})E(X_{pi})\sum_{i<j<i+p+3}\Sigma E(X_{pi}^k)E(W_{qj}^k)] \quad (26)$$

$X_{pi}^k W_{qi}^k \equiv \eta_{pq} X_{pi}^k$となり，$\Sigma E(X_{pi}^k W_{qj}^k)=\eta_{pq}\Sigma E(X_{pi}^k)$

となる。式(26)の詳細は，付録に示す。ここではNを含む項のみを残した$V_N(R^k_p, R^{k\prime}_q)$を示す。

$$
\begin{aligned}
V_N(R^k_p, R^{k\prime}_q) = N[\, & \eta_{pq}\{(K+1)A(p,K)+(k+1) \\
& \times A(p,k)+(M-1)^2\}/M^{p+3} \\
& +\{H(q)+(M-1)(A(p,K) \\
& +A(p,k)-1)+(K+1)C^K_p C^K_q \\
& +(k+1)C^k_p C^k_q\}/M^{p+q+3}+\{(M-1)(H(p) \\
& +H(q)-G(q)-(M-1))+(K+1) \\
& \times C^k_q(A(p,K)+pC^{K+1}_{p+1}+C^K_p)+pC^{K+1}_{p+1}+kC^K_p \\
& +(k+1)C^K_p C^k_q\}+(k+1)\{C^k_q(A(p,k) \\
& +pC^{k+1}_{p+1}+C^k_p)+pC^{k+1}_{p+1}+KC^k_p+(K+1)C^k_p C^K_q\} \\
& /M^{p+q+4}]-(p+q+4)\{(K+1)A(p,K) \\
& +(k+1)A(p,k)+(M-1)^2\}H(q) \\
& /M^{p+q+5}]
\end{aligned}
\tag{27}
$$

3.3 転向値kである長さp以上と長さq以上との連の共分散

$$
\begin{aligned}
V(R^{k\prime}_p, R^{k\prime}_q) &= E[(R^{k\prime}_p - E(R^{h\prime}_p))(R^{h\prime}_q - E(R^{k\prime}_q))] \\
&= E[(\Sigma\, {W_p}^k_i - E(\Sigma\, {W_q}^k_j))(\Sigma\, {W_q}^k_j - E(\Sigma\, {W_q}^j_k))] \\
&= \sum_{i} E({W_p}^k_i {W_q}^k_i) + \sum\sum_{i<j<i+q+2} E({W_q}^k_i {W_p}^k_j) + \Sigma\,\Sigma\, E({W_p}^k_i {W_q}^k_i) \\
&\quad -[\Sigma\, E({W_p}^i_k)E({W_q}^k_i) + \Sigma\,\Sigma\, E({W_q}^k_i)E({W_p}^k_j)
\end{aligned}
$$

$$\qquad i \qquad\qquad\qquad\qquad i<j<i+q+2$$

$$+\sum\sum E(W_{p\,i}^{\,k})E(W_{q\,j}^{\,k})] \qquad (28)$$

$$i<j<i+p+2$$

ここで，$t=\mathrm{Max}(p,q)$とおくと，$W_{p\,i}^{\,k}W_{q\,i}^{\,k}\equiv W_{t\,i}^{\,k}$となる。式（28)の詳細は，付録に示す。ここでは，Nを含む項のみを残した$V_N(R_p^{k\prime},R_q^{k\prime})$を示す。

$$\begin{aligned}V_N(R_p^{k\prime},R_q^{k\prime}) = N[&H(t)/M^{t+2}+(M-1)\\ &\times(G(p)+G(q))/M^{p+q+2}\\ &-2(M-1)\}/M^{p+q+3}-(p+q+3)H(p)\\ &\times H(q)/M^{p+q+4}]\end{aligned} \qquad (29)$$

4.　連の検定法

1桁乱数列$S=(a_1,a_2,\cdots,a_N)$において，転向値kを有する長さ1，2，・・・，t－1の連の個数，及び長さt以上の連の個数を$R_1,R_2,\cdots,R_t$とする。

$R=(R_1,\cdots,R_t)'$に対して，共分散Σ既知の場合の検定を行う。平均値μは式（16)，(17)を用いて求め得る。

共分散行列Σの(i,j)要素は式（24)，(27)及び（29)を用いて求める。検定統計量Tは式（1）の下では自由度tのχ_t^2分布をする。

したがって，

$$T = N(R-\mu)'\Sigma^{-1}(R-\mu) \sim \chi^2_t \tag{30}$$

を用いて，有意水準αより$\chi^2_t(\alpha)$を求めて，検定を実施する。

すなわち，

$$T \geqq \chi^2_t(\alpha) \tag{31}$$

の場合には，乱数列Sは，独立な1桁一様乱数列とは考えられぬ。

5．具体例

4進数1桁一様乱数列を用いて，連の検定法を示す。まず，検定を実行する前に，乱数列S中の乱数の総個数Nを決定する。この際，乱数の使用目的及び転向値kによって決まる連の平均個数r^k_p，$r^{k\prime}_p$等を考慮して，ここでは，$M=4$であることから，$N=1000$とする。つぎに，各連に対するpを決定するすなわち，転向値kの長さp及びp以上の連の理論平均値数が小さな値とならない程度で決定する。ここでは，$p=1$と2以上の連を取扱う。最後に，Σは式(24)，(27)及び(29)を用いて求め，Σ^{-1}を求める。

使用例1．乗算合同法を用いた擬似乱数X_nに連の検定を実施する。

$$I_{n+1} \equiv kI_n + a \,(\mathrm{Mod}\ M),\quad X_n = I_n/M,\quad M = 2^{31} \tag{32}$$

ただし，$I_0=1$，$k=32771$，$a=1234567891$

である。式（32）の乱数は，全国共同利用センターで広く利用されている乱数である。サンプル・サイズを１０００とし３０回実験する。まず，x_nを０，１，２，３に変換して，４進数一桁一様乱数として，連の検定を行った結果を表１に示す。０，１，２，３に対し自然な順序を入れる場合と，他の２３通りの順序付けが可能である。しかし，上昇連と下降連を区別せず統計量Ｔを取ることを考慮すると１２通り可能である。各々について片側検定で有意水準１％及び０．５％について実施し，棄却されたものに＃，Ｘを付けて示した。表１より示される如く，順序付けによって，棄却されるものが多く発生する。これは，乱数発生の順序が，多大な影響力を持つことを示すが，充分な解明は，現在研究中である。

使用例２．Ａｔｏｋｉｎｓｏｎ[5]が発表した乗算合同法による乱数である。式（32）における係数は，

$$k=100485,\ a=1,\ M=2^{35},\ I_0=1$$

である。他の条件は使用例１に同一として行った実験結果は表２に示す。

使用例３．ＤＥＣ製ＰＤＰ－１１／４５の乱数も乗算合同法による乱数である。式（32）における係数は，

$$k=65539,\ a=0,\ M=2^{32},\ I_0=1$$

である。他の条件は使用例１，２に同一である。結果は，表

3に示す。

使用例4．物理乱数ＭＩＫＹ　３０１７Ｂ００４[6]を用いた実験結果は，表4に示す。

No.	0<1<2<3	0<1<3<2	3<1<2<0	0<2<3<1	0<3<1<2	0<3<2<1
1		#				
2						
3		X #		X	X	X
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11		X	X	X	#	X
12						
13	X		X			
14	#		X			
15						
16			#			
17	X	X	X	X	X	X
18					X	X
19	X	X X	X	X X	X	X
20	#	X		X		#
21	X	X X	X	X X	X	X
22						
23						
24						
25						
26	#		X	#		
27				#		
28		#				
29	X	X #	X	X	X	X
30						

表１　ＲＡＮ

No.	1<0<2<3	1<0<3<2	1<2<0<3	1<2<3<0	1<3<0<2	1<3<2<0
1						
2						
3	X	X X	X	X	X X	X
4						
5						
6						
7						
8				X	#	X
9						
10					#	
11	X	#	X	X	X	X
12						
13	#		X			
14	#					
15						
16	#		X	X		X
17						
18	X	X			X	X
19	#	# X	X X	X	X X	
20	X	X X	X	X	X X	#
21		X	X	X	X	
22	X					
23						
24						
25						
26	X		X	X		#
27				X		
28						
29						
30						

表1　RAN

No.	0<1<2<3		0<1<3<2		3<1<2<0		0<3<1<2		0<2<3<1		0<3<2<1	
1												
2												
3		X				X						
4										#		#
5												
6												
7												
8	#				#		X				X	
9												
10	X		X		X		X		X		X	
11												
12	X		X		X				X		X	
13				X				X				
14												
15												
16												
17												
18				X				X				
19												
20												
21				X		X		X		X		
22	X		X	X	X		X	X	X		X	
23												
24												
25												
26						#				X		X
27										X		X
28												
29				X				#				
30				X				X		X		X

表２－１　ＡＴＫ　３

No	1<0<2<3	1<0<3<2	2<0<1<3	3<0<1<2	2<0<3<1	3<0<2<1
1						
2						
3	X		X	X		X
4	X	X		X		X
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13		X	X	X	X	
14		X				
15						
16						
17						
18		X	X	X	X	
19						
20						
21		X	X	X	X	
22	X	X	X X	X	X X	#
23			#			
24						
25						
26	X	X	#		X	X
27	X	X		#	X	X #
28						
29	#	X X	X	X	#	
30	X	X X	X	X	X X	X

表２－２　ＡＴＫ　３

No.	0<1<2<3				0<1<3<2				3<1<2<0				0<3<1<2				0<2<3<1				0<3<2<1			
1	X				X				X			#	X				X				X			
2				X								X												X
3										X									X			#		
4																								
5																								
6																								
7																								
8																								
9		X			#	X							#											
10			#	#			X					#		X										
11	X				X				X				X				X		X		X	X		
12							X							X										
13				X								X							#					
14																								
15			X				X							X										
16							X							X										
17																								
18	X				X				X				X				X				X			
19	X				X				X				X				X				X		#	
20																								
21					#					X			X				#				X			
22				X								X												
23																								
24					X		X							X										
25	#			X								X					X				X			
26																								
27																					#			
28	X			X	X				X			X	X				X				X			
29																			X					
30																								

表３－１　ＤＥＣ－ＲＡＮ

No	1<0<2<3	1<0<3<2	2<0<1<3	3<0<1<2	2<0<3<1	3<0<2<1
1				#		
2	X		X	X		X
3						
4				X		
5						
6				#	#	
7						
8						
9						
10	X X	X	X #	X #	X	#
11	X	X			X	X
12		X	X	X	X	
13	X		X	X		X
14						
15				X		
16				X		
17	#	X				
18						
19				X		#
20						
21		X		#		#
22	X		X	X		X
23						
24		X	X	X	X	
25	X		X	X		X
26				X		
27		#				
28	X		X	X		X
29					X	#
30	#					

表３－２　ＤＥＣ－ＲＡＮ

No.	0<1<2<3				0<1<3<2				3<1<2<0				0<3<1<2				0<2<3<1				0<3<2<1			
1							X							X										
2	X				X		X		X				X	X			X				X			
3	#				#																			
4																								
5																								
6	X				#				#							#			#			X		
7																								
8																								
9																								
10							X							X										
11									#								#				#			
12																								
13				#								#							X			X		
14																								
15							#							X										
16							X							X										
17																			X			X		
18	#				X		X		#		#		X	X			#				X		X	
19				X								X												
20																								
21																			X			X		
22													X											
23																								
24																								
25																						X		
26																								
27																								
28	X				X				X				X				X		X		X	X		
29																								
30																								

表４－１　ＭＩＫＹ

№	1<0<2<3	1<0<3<2	2<0<1<3	3<0<1<2	2<0<3<1	3<0<2<1
1		X	X	X	X	
2	X	X X	X X	X X	X X	X
3	#	X				
4						
5						
6		X				X
7						
8						
9						
10	#	#	X	X	X	
11						
12						
13					#	#
14						
15		#	X	X	#	
16	X	X #	X	X X X	X X	X
17	#	#			#	X
18		# X	X #	X	X # #	X
19	X		X	X	X #	X
20				X		
21	X	X			X	X
22				X		
23						
24						X
25		X				
26	X	# #				#
27						
28	X	X			#	X
29						
30						

表４－２　ＭＩＫＹ

6.結言

一様乱数列の無規則性及び一様分布を検定する手法として，連の検定を開発した。本手法は，離散的数列に適用可能であり，従来適用不能であったＭ進数一桁乱数の検定に用いた。この際，自然な順序のみで検定することの不十分さを示す具体例を表１に示した。今後は，一様分布以外の分布にも適用して，無規則性の検定を実施する。

7.参考文献

1] Ｍｉｙａｔａｋｅ，Ｏ．，Ｙｏｓｈｉｚａｗａ，Ｙ．，Ｉｎｏｕｅ，Ｈ．：Ｏｎ ｔｈｅ ｇｅｎｅｒａｔｉｏｎ ａｎｄ ｐｒｏｐｅｒｔｉｅｓ ｏｆ Ｐｈｙｓｉｃａｌ Ｒａｎｄｏｍ Ｎｕｍｂｅｒｓ，Ｍａｔｈ． Ｊａｐｏｎｉｃａ，２４，Ｎｏ．４（１９７９），３６９－３７６．

2] Ｌｅｖｅｎｅ，Ｈ．ａｎｄ Ｗｏｌｆｏｗｉｔｚ，Ｊ．：Ｔｈｅ Ｃｏｖａｒｉａｎｃｅ Ｍａｔｒｉｘ ｏｆ Ｒｕｎｓ ｕｐ ａｎｄ ｄｏｗｎ，Ａ．Ｍ．Ｓ． Ｖｏｌ．１５（１９４４），ｐｐ．５８－６９．

3] Ｋｎｕｔｈ，Ｄ．Ｅ．：Ｔｈｅ Ａｒｔ ｏｆ

Computer Programming. Vol. 2, (1981), Addison-Wesley, pp. 142-166
4] Ichimura, M.: Run Test for Single-digit Random Numbers, Math. japonica, 25, No. 2(1980), pp. 231-237.
5] Atkinson, A. C.: Tests of Pseudo Random Numbers, Appl. Statist., 29(1980), pp. 164-171.
6] Inoue, H., Kumahora, H., Yoshizawa, Y., Ichimura, M. and Miyatake, O.: Random Numbers Generated by a Physical Device, Appl. Statist., 32 (1983), pp. 115-120.

Appendix

Index集合 U, Vをつぎのように定義する。

$$U = \{p, q\}, \quad V = \{K, k\} \tag{A-1}$$

また，つぎの式を用いる。

$$Q_1(i) = C_p^i\{M-1+A(q, i)+(i+1)(C_q^i+1)\}$$
$$+C_q^i\{M-1+A(p, i)+(i+1)(C_p^i+1)\} \tag{A-2}$$

$$Q_2(K, k, p, q) = (M-1)^2 + K\{(M-1)C_p^k$$
$$+A(p, K)\} + 2C_p^K A(q, K)$$
$$+(M-1+A(p, K))\{(2K+1)C_q^K$$
$$+A(q, k)\} + (K+1)(k+1+2C_q^k$$
$$+kC_q^K)\ C_p^k \tag{A-3}$$

$$Q_3(i, p, q) = C_p^i\{M-1+(i+1)A(q, i)\} \tag{A-4}$$

$$Q_4(K, k, p, q) = (k+1)\{M-1+A(p, K)\}$$
$$\times\{(2K+1)C_q^k + A(q, k)\} + 2C_q^k A(p, k) \tag{A-5}$$

$$Q_5(i) = A(i, K) + A(i, k) + M - 1 \tag{A-6}$$

$$Q_6(i) = (K+1)A(i, K) + (k+1)A(i, k)$$
$$+(M-1)^2 \tag{A-7}$$

$$
\begin{aligned}
V(R_p^k, R_q^k) = {} & \delta(p, q)\{\sum_{i\in V}(A(p, i)+C_p^i)\} \\
& /M^{p+2}+\delta(p, q)(N-p-2)Q_6(p)/M^{p+3} \\
& +\sum_{i\in V}\sum_{j\in U}\{A(j, i)+(M-1)C_j^i\}/M^{p+2} \\
& +(N-p-q-2)(M-1)\sum\sum A(j, i) \\
& /M^{p+q+3}+\sum_{i\in V}Q_1(i)/M^{p+q+3} \\
& +(Q_2(K, k, p, q)+Q_2(K, k, q, p) \\
& +Q_2(k, K, p, q)+Q_2(k, K, q, p)) \\
& /M^{p+q+4}+(N-p-q-3)\sum_{i\in V}(Q_3(i, p, q) \\
& +Q_3(i, q, p))/M^{p+q+5} \\
& +(N-p-q-4)[(M-1)\sum_{i\in U}\{(M-1)^2 \\
& +KA(i, K)+kA(i, k)\} \\
& +Q_4(K, k, p, q)+Q_4(K, k, q, p) \\
& +Q_4(k, K, p, q)+Q_4(k, K, q, p)] \\
& /M^{p+q+5}-[\prod_{i\in U}Q_5(i)+\prod_{i\in U}H(i)]/M^{p+q+4} \\
& -(p+2)Q_6(q)(Q_5(p)+H(p))/M^{p+q+5}
\end{aligned}
$$

$-(q+2)Q_6(p)(Q_5(q)+H(q))/M^{p+q+5}$

$-\{N(p+q+5)-(p^2+pq+q^2+7p$

$+7q+16)\}\prod_{i\in U} Q_6(i)/M^{p+q+6}$

式(26)の詳細な結果を示す。

$V(R^k_q,\ R^k_q)=\eta_{pq}(Q_5(p)+H(p))/M^{p+2}$

$+\eta_{pq}(N-p-2)Q_6(p)/M^{p+3}$

$+(Q_5(p)-(M-1)+2MG(p)+C^K_pC^K_q$

$+C^k_pC^k_q)/M^{p+q+2}+\{H(q)+(M-1)$

$\times(G(q)-1)+C^k_q(A(p,k)+(k+1)$

$\times G(p)+pC^{K+1}_{p+1}+C^k_p)+C^k_q(A(p,k)$

$+(k+1)G(p)+C^{k+1}_{p+1}+C^k_p)C^k_p)$

$+H(q)-(M-1)-G(q)$

$+p(C^{k+1}_{p+1}+C^{k+1}_{p+1})+kC^K_p+KC^k_p$

$-Q_5(p)(G(p)+1)\}/M^{p+q+3}$

$+(N-p-q-2)[(M-1)(Q_5(p)-M)$

$+H(p)+(K+1)C^K_p+C^K_q+(k+1)C^k_pC^k_q]$

$/M^{p+q+3}+(N-p-q-3)[(M-1)(Q_5(p)$

$-M+H(p)+(K+1)C^K_pC^K_q$

$+(K+1)C^K_pC^k_q]M^{p+q+3}+(N-p-q-3)$

$\times[(M-1)(H(p)+H(q)-G(q)$

$$-(M-1))+(K+1)\{C_q^K(A(p,K)$$

$$+pC_{p+1}^{K+1}+C_p^K)+pC_{p+1}^{K+1}+kC_p^K+(k+1)C_p^KC_q^k\}$$

$$+(k+1)\{C_q^k(A(p,k)+pC_{p+1}^{k+1}+C_p^k)$$

$$+pC_{p+1}^{k+1}+KC_p^k+(K+1)C_p^kC_p^K\}]/M^{p+q+4}$$

$$-Q_6(p)H(q)\{N(p+q+4)-(p+q+3)^2$$

$$+\eta_{pq}(pq+p+1)+(1-\eta_{pq})(p+1)$$

$$\times(4q-p-2)/2\}/M^{p+q+5}-(p+1)H(p)$$

$$\times H(q)/M^{p+q+4}-(q+1)(G(q)+1)$$

$$\times Q_6(p)/M^{p+q+4}-(p+2)Q_5(p)H(q)$$

$$/M^{p+q+4}$$

式(28)の詳細な結果を示す。

$$V(R_p^{k\prime},R_q^{k\prime})=(G(q)+1)/M^g$$

$$+(N-g-1)H(t)/M^{g+2}$$

$$+(N-p-q)(M-1)(G(p)+G(q))$$

$$/M^{p+q+2}+\{(G(p)+2)(G(q)+2)-5\}$$

$$/M^{p+q+2}+(N-p-q)\{H(p)(G(q)+1)$$

$$+H(q)(G(q)+1)-2(M-1)\}$$

$$/M^{p+q+3}-H(p)H(q)[N(p+q+3)$$

$$-(p+q+2)^2-g+q(p+1)+\eta_{pq}(p-q)]$$

$$/M^{p+q+4}-[(q+1)H(p)(G(q)+1)$$

$$+(p+1)H(q)(G(p)+1)]/M^{p+q+3}$$

Runs Test for Randomness

Summary

The discrete sequence of events is considered in the case that we define an ordinal scale to a nominal scale for some events. Consequently, the sequence consists of consecutively ascending parts, descending parts ans horizontal parts. These parts are called as runs up, runs down and ties, respectively. The mean and variance of runs are obtained in the given sequence of sample size N. Then we present the examples of its usage.