数理解析研究所講究録
第538巻 1984年 65-80

On the Bhattacharyya Inequality in Non-Regular Case

赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1. はじめに.

Cramér-Raoの不等式のlower boundを、分布の台が母数に依存したりFisher情報量が無限大になってしまう等、いわゆる非正則な場合への拡張は、Chapman and Robbins (1951)、Kiefer (1952)、Polfeldt (1970)、Vincze (1979)、Khatri (1980)、Móri (1983)らによって行われてきた。また非正則な場合の不偏推定に関する1つのサーベイが、Takeuchi and Akahira (1984)によって試みられている。

ここでは、非正則な場合にBhattacharyyaの不等式について論じ、さらにそのlower boundがsharpとなることを示したい。正則な場合には、一般にBhattacharyya boundはsharpとはならないから、このsharp boundという性質が、非正則な場合に成り立つということは、興味深いように思われる。

2. Bhattacharyyaの不等式のlower bound.

この節では、Akahira, Puri and Takeuchi（略して APT）(1984) に従って、母数の関数の不偏推定量の分散の Bhattacharyyaの不等式について述べる.

$\mathcal{X}$を標本空間、その元をxとし、$\mathcal{A}$を$\mathcal{X}$のσ-fieldとする. Ⓗは母数空間でR^1の開集合とする. また$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in$ Ⓗ$\}$を（$\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$）上の確率測度の族とする. 各$\theta \in$ Ⓗに対して、P_θがあるσ-有限測度μに対して絶対連続であると仮定し、$dP_\theta / d\mu$を$f(x, \theta)$で表わす. さらに各$\theta \in$ Ⓗに対して、$A(\theta) = \{x : f(x, \theta) > 0\}$とする. θ_0をⒽ上のある点とする.

さて、ここで次の条件（A. 1）～（A. 5）を仮定する.

(A. 1). $\mu\left(\left(\bigcap_{c>0}\left(\bigcup_{|h|<c} A(\theta_0 + h)\right)\right) \triangle A(\theta_0)\right) = 0$

ただし2つの集合E, Fに対して E△F はEとFのsymmetric differenceを表わすものとする.

(A. 2). 任意の$\theta_0 \in$ Ⓗに対して、ある正数εと正値関数$\rho(x)$が存在して、すべての$x \in A(\theta_0)$とすべての$\theta \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$に対して$\rho(x) > f(x, \theta)$であり、またすべての$\theta \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$に対して$\int_{A(\theta_0)} |\gamma(x)| f(x, \theta) d\mu < \infty$ならば、

$$\int_{\bigcup_{\theta \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)} A(\theta)} |\gamma(x)| \rho(x) d\mu < \infty \quad \text{である.}$$

(A.3). ある正の整数kに対して

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \sup_{x\in \bigcup_{j=1}^{i} A(\theta_0+jh)-A(\theta_0)} \frac{\left|\sum_{j=1}^{i}(-1)^j \binom{i}{j} f(x,\theta_0+jh)\right|}{|h|^i \rho(x)} < \infty$$

$(i=1,\cdots,k)$が成り立つ.

(A.4). 各$x\in A(\theta_0)$に対して、$f(x,\theta)$は$\theta=\theta_0$でθに関してk回連続微分可能である.

(A.5). 各$i=1,\cdots,k$に対して

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \sup_{x\in A(\theta_0)} \frac{\left|\frac{\partial^i}{\partial\theta^i} f(x,\theta_0+h)\right|}{\rho(x)} < \infty$$

である. ただし$\rho(x)$は(A.2)において定義された関数である.

このとき、次の定理が成り立つ.

定理 2.1. (APT, 1984). 条件(A.1)〜(A.5)が成り立つと仮定する. $g(\theta)$をΘ上でk回微分可能で推定可能な関数とし、$\hat{g}(x)$を$\int_{A(\theta_0)} |\hat{g}(x)|\rho(x)d\mu < \infty$となる$g(\theta)$の不偏推定量とする. さらに$\Lambda$を$(k,k)$型非負値行列で、その成分を

$$\lambda_{ij} = \int_{A(\theta_0)} \frac{1}{f(x,\theta_0)} \left\{ \frac{\partial^i f(x,\theta_0)}{\partial\theta^i} \frac{\partial^j f(x,\theta_0)}{\partial\theta^j} \right\} d\mu$$

$(i,j=1,\cdots,k)$とする. またλ_{ii} $(i=1,\cdots,k)$が有限であると仮定する.

このときΛがθ_0で正則ならば、

$$V_{\theta_0}(\hat{g}) \geq (g^{(1)}(\theta_0), \cdots, g^{(k)}(\theta_0))\Lambda^{-1}(g^{(1)}(\theta_0), \cdots, g^{(k)}(\theta_0))'$$

が成り立つ.

ただし $V_{\theta_0}(\hat{g})$ は $\theta=\theta_0$ での $\hat{g}$ の分散を表わし、$g^{(i)}(\theta)$ は $g(\theta)$ の第 i 次導関数とする.

証明は省略するが、APT (1984) で詳しく論じられている.

3. 不偏推定量の分散の sharp lower bound.

この節では、Cramér-Rao の不等式および前節で論じた Bhattacharyya の不等式の lower bound が sharp となることを、APT (1984) で与えられた例を一般化した形で議論する.

$\mathcal{X} = \Theta = R^1$ で、μ はルベーグ測度とし、位置母数の場合、すなわち $f(x,\theta)=f(x-\theta)$ であって、さらに任意の $p \geq 1$ に対して $f(x)$ が

$$(3.1) \qquad f(x)=\begin{cases}(a^2-x^2)^{p-1}u(x) & , |x|<a, \\ 0 & , |x| \geq a\end{cases}$$

を満たすとする. ここで a はある正の定数とし、関数 $u(x)$ は、$|x|<a$ に対して $u(x)>0$ で、区間 $(-a,a)$ 上において $[p]$ 回連続微分可能とし、各 $j=0, \cdots, [p-1]$ について適当な有限の正数 L_j^-, L_j^+ が存在して

$$\lim_{x\to -a+0}|u^{(j)}(x)| = L_j^-, \quad \lim_{x\to a-0}|u^{(j)}(x)| = L_j^+, \quad 特に\ L_0^- = L_0^+$$

とする. ただし $[s]$ は s 以下の最大の整数を表わし、また

各jに対して　$u^{(j)}(x)$ は $u(x)$ の第j次導関数で、$u^{(0)}(x)=u(x)$ とする.

まず $g(\theta)=\theta$ の不偏推定量の分散の lower bound について考察する.

(I). $p=1$ の場合. このときは

$$f(x)=\begin{cases} u(x) & , \ |x|<a, \\ 0 & , \ |x|\geq a \end{cases}$$

となり、本質的には一様分布の場合に帰着できるから Takeuchi (1961) によって、分散 0 をもつ局所最小分散不偏推定量が存在する、すなわち任意の $\theta_0\in\Theta$ に対して

$$\min_{\hat{\theta}:\text{unbiased}} V_{\theta_0}(\hat{\theta})=0$$

となる.

(II). $p=2$ の場合. このときは、Fisher 情報量は無限大となる、すなわち

$$\int_{-a}^{a}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2 f(x)\,dx=\infty$$

である.

任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\hat{\theta}_\varepsilon(x)=\begin{cases} -c_\varepsilon\dfrac{f'(x)}{f(x)} & , \ |x|\leq a-\varepsilon, \\ 0 & , \ a-\varepsilon<|x|\leq a \end{cases}$$

となる推定量 $\hat{\theta}_\varepsilon(x)$ を区間 $[-a, a]$ 上で定義する.

ここで c_ε は、

(3.2) $\int_{-a}^{a} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f(x)\,dx = 0, \quad \int_{-a}^{a} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f'(x)\,dx = -1$

を満たす定数とする。

次に $x \notin [-a, a]$ に対しても、推定量 $\hat{\theta}_\varepsilon(x)$ を不偏性の条件

(3.3) $\int_{-a+\theta}^{a+\theta} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f(x-\theta)\,dx = \theta \quad , \quad \forall \theta \in Ⓗ$

を用いて拡張する。

まず $0 < \theta \leq a$ に対して $G(\theta)$ を

(3.4) $G(\theta) = \int_{-a+\theta}^{a} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f(x-\theta)\,dx$

によって定義する。推定量 $\hat{\theta}_\varepsilon(x)$ と $G(\theta)$ は有界であるから、$G(\theta)$ は微分可能でかつ

$$G'(\theta) = -\int_{-a+\theta}^{a} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f'(x-\theta)\,dx$$

となる。$\hat{\theta}_\varepsilon(x)$ が $a < x \leq 2a$ において有界ならば、(3.4) の右辺が微分可能で、(3.3) と (3.4) から

(3.5) $G'(\theta) = 1 - \int_{a}^{a+\theta} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f'(x-\theta)\,dx$

となる。(3.5) の両辺を θ に関して微分すると

(3.6) $G''(\theta) = -2aL_0\, \hat{\theta}_\varepsilon(a+\theta) - \int_{a}^{a+\theta} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f''(x-\theta)\,dx$

となる。

(3.2)を用いて、$\hat{\theta}_\varepsilon(x)$が(3.6)を満たせば(3.5)も満たしそのことから(3.4)を満たすこともわかる。

(3.6)は Volterra's second type の積分方程式であるから、$a < x \leq 2a$に対して $\hat{\theta}_\varepsilon(x)$は存在して、しかも有界となることがわかる。

同様の議論を繰り返して、すべての$x > a$に対して推定量$\hat{\theta}_\varepsilon(x)$を拡張でき、すべての$x < -a$についても同様にして$\hat{\theta}_\varepsilon(x)$を構成できる。

一方(3.2)から任意の$\theta_0 \in Ⓗ$に対して

$$V_{\theta_0}(\hat{\theta}_\varepsilon) = c_\varepsilon^2 \int_{-a+\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2 f(x)\,dx$$

となる。また(3.2)から

$$-1 = \int_{-a}^{a} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f'(x)\,dx = -c_\varepsilon \int_{-a}^{a} \left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2 f(x)\,dx$$

でもあるから

$$V_{\theta_0}(\hat{\theta}_\varepsilon) = c_\varepsilon = \frac{1}{\int_{-a+\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2 f(x)\,dx}$$

となる。このとき、Fisher情報量が無限大となることから

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V_{\theta_0}(\hat{\theta}_\varepsilon) = 0$$

となる。

従って、任意の $\theta_0 \in \Theta$ に対して

$$\inf_{\hat{\theta}:\text{unbiased}} V_{\theta_0}(\hat{\theta}) = 0$$

となり、0 は sharp bound になる.

$p \geq 3$ なる整数の場合に進む前に、次のことを準備する。

$f(x)$ は (3.1) の形で与えられているから、$k < p/2$ ならば

$$\lambda_{ii} = \int_{-a}^{a} \frac{\{f^{(i)}(x)\}^2}{f(x)} dx < \infty \quad (i=1,\cdots,k)$$

となることがわかる。

そこで、これ以後 $k = [(p-1)/2]$ とする.

また任意の $i, j = 1, \cdots, k$ に対して

$$\lambda_{ij} = \int_{\theta-a}^{\theta+a} \frac{1}{f(x-\theta)} \left\{ \frac{\partial^i f(x-\theta)}{\partial \theta^i} \frac{\partial^j f(x-\theta)}{\partial \theta^j} \right\} dx$$

$$= \int_{-a}^{a} (-1)^{i+j} \frac{f^{(i)}(x) f^{(j)}(x)}{f(x)} dx$$

となる。もし $u(x)$ が偶関数ならば、$i+j$ が奇数のときは $f^{(i)}(x)f^{(j)}(x)$ が奇関数となることから $\lambda_{ij} = 0$ となる.

また Schwarz の不等式から $\lambda_{ij}^2 \leq \lambda_{ii}\lambda_{jj}$ $(i,j=1,\cdots,k)$ となることが示される。$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ $(i,j=1,\cdots k)$ も明らかである.

(III). $p \geq 3$ となる整数の場合.

$\hat{\theta}(x)$ を θ の不偏推定量とする. $f(x)$ が (3.1) の形で与えられているから

$$\lim_{x\to -a+0} f^{(i)}(x) = \lim_{x\to a-0} f^{(i)}(x) = 0 \quad (i=1,\cdots,p-2)$$

でかつ

$$\lim_{x\to -a+0} f^{(p-1)}(x) = \lim_{x\to a-0} f^{(p-1)}(x) \neq 0$$

となる．

よって $\hat{\theta}(x)$ の不偏性、すなわち

$$\int_{-a+\theta}^{a+\theta} \hat{\theta}(x) f(x-\theta)\, dx = \theta \quad , \qquad {}^{\forall}\theta \in \text{Ⓗ}$$

から

$$\int_{-a}^{a} \hat{\theta}(x) f(x)\, dx = 0 \quad ,$$

(3. 7) $$\int_{-a}^{a} \hat{\theta}(x) f'(x)\, dx = -1,$$

$$\int_{-a}^{a} \hat{\theta}(x) f^{(i)}(x)\, dx = 0 \qquad (i=2,\cdots,p-1)$$

となる．

また (3. 1) から

$$\int_{-1}^{1} \frac{\left\{\sum_{i=1}^{p-1} c_i f^{(i)}(x)\right\}^2}{f(x)} dx < \infty \quad \text{ならば} \quad c_{k+1} = \cdots = c_{p-1} = 0$$

となることが示される．

このとき Takeuchi and Akahira (1983) によって

(3. 8) $$\inf_{\hat{\theta}:\text{unbiased}} V_0(\hat{\theta}) = \frac{|\Lambda_{11}(k)|}{|\Lambda(k)|}$$

が与えられる．ここで $|\Lambda(k)|$ は λ_{ij} $(i,j=1,\cdots,k)$ を要素としてもつ (k,k) 型行列 $\Lambda(k)$ の行列式で $|\Lambda_{11}(k)|$ は $|\Lambda(k)|$

の第1行と第1列を取り去ってできる $(n-1)$ 次の小行列式とする. (3.8)の右辺は第2節の定理2.1において与えられたBhattacharyyaの不等式の lower bound になっている.
(3.8)から、任意の $\varepsilon > 0$ に対して (3.7)を満たし

$$\int_{-a}^{a} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f(x)\,dx \leq \frac{|\Lambda_{11}(k)|}{|\Lambda(k)|} + \varepsilon$$

となる $\hat{\theta}_\varepsilon(x)$ が区間 $(-a, a)$ 上に存在する.
そこで、不偏性の条件

$$\int_{-a+\theta}^{a+\theta} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f(x-\theta)\,d\theta = \theta \quad , \quad \forall \theta \in \Theta$$

を用いて、$\hat{\theta}_\varepsilon(x)$ を $x \notin (-a, a)$ に対して拡張する.
まず $0 \leq \theta < a$ に対して

$$G(\theta) = \int_{-a+\theta}^{a} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f(x-\theta)\,dx$$

によって $G(\theta)$ を定義する. (II)の場合と同様にして

$$(3.9) \quad G^{(p-1)}(\theta) = A_{p-1}\,\hat{\theta}_\varepsilon(a+\theta) + (-1)^{p-1}\int_{a}^{a+\theta} \hat{\theta}_\varepsilon(x) f^{(p)}(x-\theta)\,dx$$

となる. ただし $A_{p-1} = (-1)^{p-1} \lim_{x \to a-0} f^{(p-1)}(x)$ とする.
(3.9)は Volterra's second type の積分方程式であるからその解 $\hat{\theta}_\varepsilon(x)$ $(a < x \leq 2a)$ が存在する. 同様の操作を繰り返して、すべての $x \in \mathfrak{X}$ に対して θ の不偏推定量 $\hat{\theta}_\varepsilon(x)$ を構成

できる.

従って、任意の $\theta_0 \in \textcircled{H}$ に対して

$$(3.10) \qquad \inf_{\hat{\theta}:\text{unbiased}} V_{\theta_0}(\hat{\theta}) = \frac{|\Lambda_{11}(k)|}{|\Lambda(k)|}$$

が成り立つ、すなわち $|\Lambda_{11}(k)|/|\Lambda(k)|$ は sharp bound である.

以上のことから次の定理が成り立つ.

定理 3.1. 確率変数 X が位置母数 θ をもつ分布に従っていて、その密度関数 $f(x-\theta)$ が (3.1) によって与えられているとする. このとき、任意の $\theta_0 \in \textcircled{H}$ に対して

$p=1$ ならば、 $\displaystyle\min_{\hat{\theta}:\text{unbiased}} V_{\theta_0}(\hat{\theta}) = 0$,

$p=2$ ならば、 $\displaystyle\inf_{\hat{\theta}:\text{unbiased}} V_{\theta_0}(\hat{\theta}) = 0$,

$p \geq 3$ なる整数ならば、 $\displaystyle\inf_{\hat{\theta}:\text{unbiased}} V_{\theta_0}(\hat{\theta}) = \frac{|\Lambda_{11}(k)|}{|\Lambda(k)|}$

が成り立つ、すなわちいずれもその Bhattacharyya の不等式の lower bound が sharp である.

次に (3.10) の右辺、すなわち Bhattacharyya の不等式の lower bound についてもう少し詳しく調べてみよう. これから以後、$u(x)$ が区間 $(-a, a)$ 上で偶関数であると仮定する.

このとき、$b_k = |\Lambda_{11}(k)|/|\Lambda(k)|$ とおいて $k=2l-1,\ 2l$ $(l=1,2,\ldots)$ の場合に b_k を考える。各 l について、$k=2l-1$ のとき

$$
|\Lambda(2l-1)| = \begin{vmatrix}
\lambda_{11} & 0 & \lambda_{13} & 0 & \cdots & & \lambda_{1,2l-1} \\
0 & \lambda_{22} & 0 & \lambda_{24} & \cdots & & 0 \\
& & & \cdots & & & \\
0 & & \cdots & & 0 & \lambda_{2l-2,2l-2} & 0 \\
\lambda_{1,2l-1} & 0 & \cdots & & 0 & & \lambda_{2l-1,2l-1}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \left|\begin{array}{cccc:cccc}
\lambda_{11} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1,2l-1} & & & & \\
\lambda_{13} & \lambda_{33} & \cdots & \lambda_{3,2l-1} & & & 0 & \\
& \cdots & & & & & & \\
\lambda_{1,2l-1} & \lambda_{3,2l-1} & \cdots & \lambda_{2l-1,2l-1} & & & & \\
\hdashline
& & & & \lambda_{22} & \lambda_{24} & \cdots & \lambda_{2,2l-2} \\
& 0 & & & \lambda_{24} & \lambda_{44} & \cdots & \lambda_{4,2l-2} \\
& & & & & \cdots & & \\
& & & & \lambda_{2,2l-2} & \lambda_{4,2l-2} & \cdots & \lambda_{2l-2,2l-2}
\end{array}\right|
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\lambda_{11} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1,2l-1} \\
\lambda_{13} & \lambda_{33} & \cdots & \lambda_{3,2l-1} \\
& \cdots & & \\
\lambda_{1,2l-1} & \lambda_{3,2l-1} & \cdots & \lambda_{2l-1,2l-1}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
\lambda_{22} & \lambda_{24} & \cdots & \lambda_{2,2l-2} \\
\lambda_{24} & \lambda_{44} & \cdots & \lambda_{4,2l-2} \\
& \cdots & & \\
\lambda_{2,2l-2} & \lambda_{4,2l-2} & \cdots & \lambda_{2l-2,2l-2}
\end{vmatrix}
$$

$$
= |\Lambda'(2l-1)|\,|\Lambda'(2l-2)| \quad (\text{say})
$$

となり、同様にして

$$|\Lambda_{11}| = \begin{vmatrix} \lambda_{22} & 0 & \lambda_{24} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{33} & 0 & \lambda_{35} & \cdots & \lambda_{3,2\ell-1} \\ & & \cdots & & & \\ \lambda_{2,2\ell-2} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{2\ell-2,2\ell-2} & 0 \\ 0 & \lambda_{3,2\ell-1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{2\ell-1,2\ell-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{24} & \cdots & \lambda_{2,2\ell-2} \\ \lambda_{24} & \lambda_{44} & \cdots & \lambda_{4,2\ell-2} \\ & \cdots & & \\ \lambda_{2,2\ell-2} & \lambda_{4,2\ell-2} & \cdots & \lambda_{2\ell-2,2\ell-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{33} & \lambda_{35} & \cdots & \lambda_{3,2\ell-1} \\ \lambda_{35} & \lambda_{55} & \cdots & \lambda_{5,2\ell-1} \\ & \cdots & & \\ \lambda_{3,2\ell-1} & \lambda_{5,2\ell-1} & \cdots & \lambda_{2\ell-1,2\ell-1} \end{vmatrix}$$

$$= |\Lambda'(2\ell-2)|\,|\Lambda'_{11}(2\ell-1)| \quad (\text{say})$$

となる.

従って

$$(3.11) \qquad b_{2\ell-1} = \frac{|\Lambda_{11}(2\ell-1)|}{|\Lambda(2\ell-1)|} = \frac{|\Lambda'_{11}(2\ell-1)|}{|\Lambda'(2\ell-1)|} \quad (\ell = 1, 2, \cdots)$$

である. また全く同様にして

$$(3.12) \qquad b_{2\ell} = \frac{|\Lambda_{11}(2\ell)|}{|\Lambda(2\ell)|} = \frac{|\Lambda'_{11}(2\ell-1)|}{|\Lambda(2\ell-1)|} \quad (\ell = 1, 2, \cdots)$$

が得られる.

よって (3.11) と (3.12) から

$$(3.13) \qquad b_{2\ell-1} = b_{2\ell} \quad (\ell = 1, 2, \cdots)$$

となる. $k=[(p-1)/2]$ であるから、$m=[(k+1)/2]$ とおくと $m=[(p+1)/4]$ となる. このとき、定理 3.1 と (3.13) によって任意の $\theta_0\in\Theta$ における、θ の不偏推定量 $\hat{\theta}$ の分散の sharp bound は次の表のように与えられる.

p	k	m	$\inf_{\hat{\theta}:\text{unbiased}} V_{\theta_0}(\hat{\theta})$
1, 2	0	0	0
3, 4	1	1	$b_1=b_2=\lambda_{11}^{-1}$
5, 6	2		
7, 8	3	2	$b_3=b_4=\left[\lambda_{11}\left(1-\dfrac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{11}\lambda_{33}}\right)\right]^{-1}$
9, 10	4		
11, 12	5	3	$b_5=b_6=\left[\lambda_{11}\left\{1-\dfrac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{11}\lambda_{33}}-\dfrac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{11}\lambda_{33}}\cdot\dfrac{\dfrac{\lambda_{35}^2}{\lambda_{33}\lambda_{55}}\left(\dfrac{\lambda_{15}\lambda_{33}}{\lambda_{13}\lambda_{35}}-1\right)^2}{1-\dfrac{\lambda_{35}^2}{\lambda_{33}\lambda_{55}}}\right\}\right]^{-1}$
13, 14	6		

$p\geq 15$ なる整数についても同様に計算できるであろう.

$g(\theta)=\theta^2$ の不偏推定について、$p=7, 8, 9, 10$ の場合に、その Bhattacharyya の不等式の lower bound を計算すると次のようになる.

$p=7, 8$ のとき、任意の $\theta_0\in\Theta$ に対して

$$V_{\theta_0}(\hat{g}) \geq \frac{4\theta_0^2}{\lambda_{11}\left(1-\frac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{11}\lambda_{33}}\right)} + \frac{4}{\lambda_{22}}$$

となり、

$p=9, 10$ のとき、任意の $\theta_0 \in$ Ⓗ に対して

$$V_{\theta_0}(\hat{g}) \geq \frac{4\theta_0^2}{\lambda_{11}\left(1-\frac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{11}\lambda_{33}}\right)} + \frac{4}{\lambda_{22}\left(1-\frac{\lambda_{24}^2}{\lambda_{22}\lambda_{44}}\right)}$$

となる．いずれもその lower bound が sharp であることは、$g(\theta)=\theta$ の場合と同様にして示されるが、前表と比較してわかるように、その構造は少し異ってくる．

第3節の議論から、Bhattacharyya の不等式の lower bound が sharp となることが、実際にそのような不偏推定量を Volterra 型の積分方程式を用いて構成することによって、可能であることがわかる．このことは、序論でものべたように正則な場合には、一般に可能ではないから、むしろ非正則であるが故に可能になり得たともいえるのである．
ここでは、大標本の場合を取り扱わなかったけれども、もちろんその場合にも Bhattacharyya bound に関する議論を高次の漸近有効性との関連をもって進めていくことは可能であろうが、その話は、別の機会に譲りたいと思う．

References

Akahira,M., Puri,M.L. and Takeuchi,K. (1984). Bhattacharyya bound of variances of unbiased estimators in non-regular cases. (To appear).

Chapman,D.G. and Robbins,H. (1951). Minimum variance estimation without regularity conditions. Ann. Math. Statist., 22, 581-586.

Khatri,C.G. (1980). Unified treatment of Cramer-Rao bound for the non-regular density functions. J. Statist. Plann. Inference. 4, 75-79.

Kiefer,J. (1952). On minimum variance in non-regular estimation. Ann. Math. Statist., 23, 627-630.

Móri,T.F. (1983). Note on the Cramér-Rao inequality in the non-regular case: The family of uniform distributions. J. Statist. Plann. Inference. 7, 352-358.

Polfeldt,T. (1970). Asymptotic results in non-regular estimation. Skand. Akt. Tidskr. Suppl. 1-2.

Takeuchi,K. and Akahira,M. (1983). A note on minimum variance. To appear in Metrika.

Takeuchi,K. and Akahira,M. (1984). A survey of non-regular estimation, I. To appear in Proc. Symp., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto University.

Víncze,I. (1979). On the Cramér-Fréchet-Rao inequality in the non-regular case. In: Contributions to Statistics. The Jaroslav Hájek Memorial Volume. Academia, Prague, 253-262.