数理解析研究所講究録
第 538 巻 1984 年 121-143

漸次打切データによる最尤推定量の弱収束について

阪大教養　稲垣　宣生

1. 寿命分布の連続型モデル

寿命確率変数 X は非負値であって，分布関数 $F_\theta(x)$，密度関数 $f(x,\theta)$ をもっとする：

(1) $$F_\theta(x) = P_\theta\{X \leqq x\} = \int_0^x f(t,\theta)\,dt,$$

$$x \in R^+ = [0,\infty),\quad \theta \in \Theta \subset R^k = (-\infty,\infty)^k.$$

正規，対数正規，逆正規，ガンマ，ワイブルなどの分布を寿命分布の連続型モデルとしてここでは考慮している．
次のような用語と記号を使う．

(2) $$\bar{F}_\theta(t) = 1 - F_\theta(t) = \int_t^\infty f(x,\theta)\,dx \quad : \text{生存関数}$$

(3) $$\phi(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta) \quad : \text{評点尤度関数}$$

(4) $$\bar{\phi}(t,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log \bar{F}_\theta(t) = \int_t^\infty \phi(x,\theta)\,F_\theta(dx)/\bar{F}_\theta(t)$$

$$: \text{生存評点尤度関数}$$

もしここで一般の評点関数 $\psi(x, \theta)$ を考えるならば

$$(5) \qquad \bar{\psi}(t, \theta) = \int_t^\infty \psi(x, \theta)\, F_\theta(dx) / \bar{F}_\theta(t)$$

を生存評点関数という．生存評点尤度関数における等式

$$(4') \qquad \frac{\partial}{\partial\theta} \log \bar{F}_\theta(t) = \int_t^\infty \phi(x, \theta)\, F_\theta(dx) / \bar{F}_\theta(t)$$

は，左辺が生存関数による評点関数であることを表す一方，右辺が評点尤度関数の生存化を表し，それらが一致することはいわゆる微分と積分の交換可能条件である．この等式はもっと一般の命題として導かれる（[1]，[2]）．

2．標本抽出の打切の型 —— 漸次打切について

n 個の標本 $X_1, \cdots, X_n$ の順序統計量を

$$X_{n:1} \leq X_{n:2} \leq \cdots \leq X_{n:n}$$

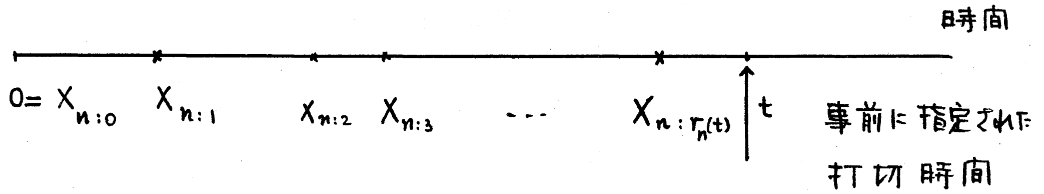
とする．寿命問題においては，観測は時間経過とともに生存時間列として小さい順に得られる．費用や時間・その他の制限のために実験・観測は，事前に指定された時間 t で中途打切される（これを Type I 打切という）か，または，事前に指定された標本数もしくは標本比率で中途打切される（これを Type II 打切という）．Type I 打切において，時間 t で実験が打切られるとき，観測される確率変数は

$$r_n(t) = \sum_{k=1}^{n} I(X_{n:k} \leq t), \quad I(A) \text{ は } A \text{ の 定義関数},$$

$$X_{n:j}, \quad j \leq r_n(t), \qquad X_{n:0} = 0$$

である．

Type I 打切

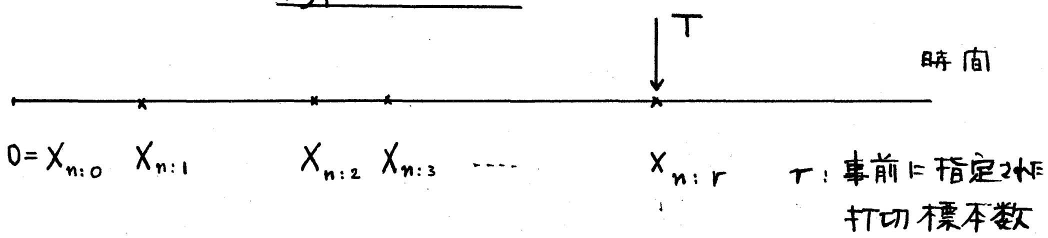


Type II 打切において，標本数 r で実験が打切られるとき，観測される確率変数は

$$X_{n:1}, \cdots\cdots, X_{n:r}$$

であり打切時間 $T = X_{n:r}$ は確率変数となる．

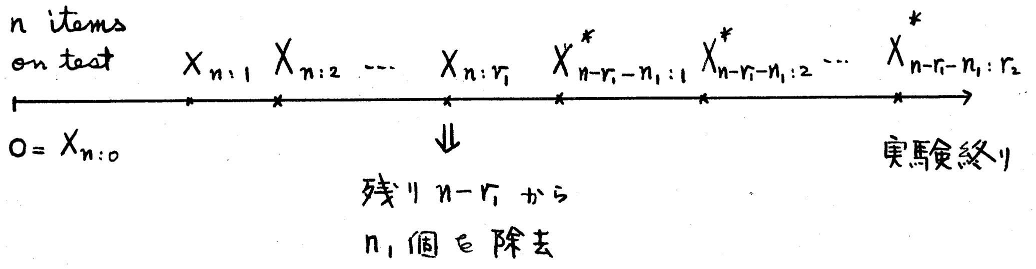
Type II 打切



漸次打切り方式にもTypeIとTypeIIがあるが，ここでは，Type II 漸次打切方式を説明する．r_1 個の観測がなされた時点で残りの $n-r_1$ 個から n_1 個の標本を除去して観測を続け，さらに $n-r_1-n_1$ 個の標本中 r_2 個が観測された時点で残りの $n-r_1-r_2-n_1$ 個から n_2 標本を除去して観測を続け同様な操作をくり返す．ただし，漸次打切標本数 r_1，r_2，$\cdots\cdots$

と漸次除去標本数 $n_1, n_2, \cdots$ は事前に指定されている。

Type II 漸次打切 (J. F. Lawless [4] 参照)



3. 打切尤度関数

打切観測による尤度関数について考えよう。Type I 打切データに対しては

$$(6) \qquad L_{n:t}(\theta) = (n)_{r_n(t)} \prod_{i=1}^{r_n(t)} f(X_{n:i}, \theta)\, \bar{F}_\theta(t)^{n-r_n(t)},$$

Type II 打切データに対しては

$$(7) \qquad L_{n:r}(\theta) = (n)_r \prod_{i=1}^{r} f(X_{n:i}, \theta)\, \bar{F}_\theta(X_{n:r})^{n-r},$$

Type II 漸次打切データに対しては

$$(8) \qquad L_n(\theta) = (n)_{r_1} \prod_{i=1}^{r_1} f(X_{n:i}, \theta)\, \bar{F}_\theta(X_{n:r_1})^{n_1}$$

$$\cdot (n-r_1-n_1)_{r_2} \prod_{i=1}^{r_2} f(X^*_{n-r_1-n_1:i}, \theta)\, \bar{F}_\theta(X_{n-r_1-n_1:r_2})^{n-r_1-r_2-n_1}$$

となる。

ここでは，漸次除去標本数 $n_i = 0$ の漸次打切方式を考える．すなわち，漸次打切標本数 r_i または漸次打切時間 t_i によって打切尤度関数がどのような動きをするかを論じる．打切標本比率と打切時間とは漸近的に同値であることが，Bahadur 表現定理によって保障されるので，Type I 打切と Type II 打切は漸近的に同値となる．以下では，Type I の漸次打切を打切時間 t を径数とする打切尤度関数の確率過程とみなす．（Sen [5], [6], Sen & Tsong [7] 参照.）

4. 生存・打切・射影

1節では評点関数の生存化を行い，生存評点関数（5）を定義した．打切は生存の反対語であるが，打切は時間 t までの関数への射影として考えることができることを示そう．

$\mathcal{B}_{n:t} = \mathcal{B}(X_{n:j},\ j \leq r_n(t),\ t - X_{n:r_n(t)})$

: 時間 t で観測可能な確率変数によって生成される最小の σ－集合体．ただし

$\mathcal{B}_{n:0} = \mathcal{B}(\{\phi\})$，　$\mathcal{B}_{n:\infty} = \mathcal{B}(X_{n:j},\ j \leq n)$

$\mathcal{F}_{n:t}$: $\mathcal{B}_{n:t}$ 可測関数族

$\mathcal{P}_{n:t}$: $\mathcal{F}_{n:\infty} \longrightarrow \mathcal{F}_{n:t}$　射影

すなわち，$\psi(X_{n:1}, \cdots, X_{n:n}) \in \mathcal{F}_{n:\infty}$ に対して

$$\mathcal{P}_{n:t}\ \psi = E_\theta\,[\,\psi(X_{n:1}, \cdots, X_{n:n})\,|\,\mathcal{B}_{n:t}\,]$$

とする．同様に，独立同一分布確率変数列 $\{X_i,\ i\geq 1\}$ に対して

$$\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(X_i<t,\ i\geq 1) \quad \text{ただし} \quad \mathcal{B}_0=\mathcal{B}(\{\phi\}),\ \mathcal{B}_\infty=\mathcal{B}(\{X_i,\ i\geq 1\})$$

$\mathcal{F}_t$: $\mathcal{B}_t$－可測関数の族

$\mathcal{P}_t$: $\mathcal{F}_\infty \longrightarrow \mathcal{F}_t$ 射影

とする．$n=1$ のとき，尤度関数 $f(x,\theta)$ に対して，その相対条件付き平均

$$(9) \qquad f_t(x,\theta) = E_\mu[\,f(X_1,\theta)\,|\,\mathcal{B}_{1:t}\,] = I(x\leq t)\,f(x,\theta) + I(x>t)\,\bar{F}_\theta(t)$$

を射影尤度関数とよぶ．同様に，評点関数 $\psi(x,\theta)$ に対してその条件付き平均

$$(10) \qquad \psi_t(x,\theta) = E_\theta[\,\psi(X_1,\theta)\,|\,\mathcal{B}_{1:t}\,] = I(x\leq t)\,\psi(x,\theta) + I(x>t)\,\overline{\Psi}(t,\theta)$$

を射影評点関数とよぶ．評点尤度関数 (3) に対しては，

$$(11) \qquad \phi_t(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log f_t(x,\theta)$$

が一般の正則条件の下で成立つ．すなわち，射影評点尤度関数は評点射影尤度関数に等しい．全観測 $(X_1,\cdots,X_n)$ に基づく尤度関数，推定尤度関数はそれぞれ

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta),$$

$$\Phi_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \phi(X_i,\theta)$$

である．したがって，漸次打切観測 $(X_{n:j},\ j\leq r_n(t))$ に

基づく尤度関数，推定尤度関数はそれぞれ

$$L_{n:t}(\theta) = \mathcal{P}_{n:t}\, L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_t(X_i, \theta)$$

$$\Phi_{n:t}(\theta) = \mathcal{P}_{n:t}\, \Phi_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \phi_t(X_i, \theta)$$

であることが示される．

5. 漸次打切推定関数のマルチンゲール性

この節では，打切時間 t の代りに，打切比率

$$\tau = F(t), \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1$$

を径数として考える．さらに，確率変数 X も

$$Y = F_\theta(X) \sim U(0, 1)$$

と変換して考える．しかし，混乱のない限り同じ記号を使うことにする．母数 θ は真の母数として固定して考えることにし，添字として無視し書かない．たとえば，

$$\psi(y) = \psi(y, \theta) = \psi(F_\theta^{-1}(x), \theta)$$

$$\bar{\psi}(\tau) = \int_\tau^1 \psi(y)\, dy \,/\, \bar{\tau}, \qquad \bar{\tau} = 1 - \tau$$

$$\psi_\tau(y) = I(y \leqq \tau)\, \psi(y) + I(y > \tau)\, \bar{\psi}(\tau)$$

$$\Psi_{n:\tau} = \mathcal{P}_{n:\tau}\, \Psi_n = \sum_{i=1}^{n} \psi_\tau(Y_i)$$

等々である．

$$(12) \qquad E\{\psi(Y)\} = E_\theta\{\psi(X,\theta)\} = 0$$

と仮定する．

補題 1

各 n に対し，$\mathcal{B}_{n:\tau}$ は非減少列であって，$\{\Psi_{n:\tau}, \mathcal{B}_{n:\tau};$ $0 \leqq \tau \leqq 1\}$ はマルティンゲールである．

証明

$\tau' > \tau$ とする．

$$\begin{aligned} &E[\psi_{\tau'}(Y) \mid \mathcal{B}_\tau] \\ &= I(Y \leqq \tau)\psi(Y) + \int_\tau^1 \psi_{\tau'}(y)\,dy \,/\, \bar{\tau} \\ &= I(Y \leqq \tau)\psi(Y) + \left\{\int_\tau^{\tau'} \psi(y)\,dy + \bar{\tau}'\,\bar{\Psi}(\tau')\right\} / \bar{\tau} \\ &= \psi_\tau(Y) \end{aligned}$$

であることから

$$E[\Psi_{n:\tau'} \mid \mathcal{B}_{n:\tau}] = \Psi_{n:\tau}$$

を得る．

補題 2

$$\begin{aligned} V_\tau(\psi) &= E[\psi_\tau(Y)\,\psi_\tau(Y)'] \\ &= \int_0^\tau \psi(y)\psi(y)' + \bar{\tau}\,\bar{\Psi}(\tau)\bar{\Psi}(\tau)' \\ &= \int_0^1 \psi(y)\psi(y)'\,dy - \int_\tau^1 (\psi(y) - \bar{\Psi}(\tau))(\psi(y) - \bar{\Psi}(\tau))'\,dy \\ &= V(\psi) - \bar{V}_\tau(\psi) \end{aligned}$$

補題2は補題1から当然のことである.

補題 3

(13) $\Psi^{\circ}_{n:\tau} = \frac{1}{\sqrt{n}} \Psi_{n:\tau}$

とおくとき, $\{\Psi^{\circ}_{n:\tau}\ ;\ 0 \leqq \tau \leqq 1\}$ の周辺分布は.

(14) $\Psi^{\circ}_{\tau} = \int_0^1 \psi_\tau(y)\, W^{\circ}(dy) = \int_0^1 \psi_\tau(y) W(dy),\quad 0 \leqq \tau \leqq 1$

の周辺分布に収束する. ここで, $\{W(y)\}_{0 \leqq y \leqq 1}$ は Wiener process であり $\{W^{\circ}(y)\}_{0 \leqq y \leqq 1}$ は Brownian Bridge である.

証明

$0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m \leqq 1$

$$\Psi^{\circ}_{n:\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \Psi^{\circ}_{n:\tau_1} \\ \vdots \\ \Psi^{\circ}_{n\tau_m} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \psi_{\tau_1}(Y_i) \\ \vdots \\ \psi_{\tau_m}(Y_i) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \psi_{\boldsymbol{\tau}}(Y_i)$$

$$\longrightarrow N(\mathbf{0},\ \Sigma) = \begin{bmatrix} \Psi^{\circ}_{\tau_1} \\ \vdots \\ \Psi^{\circ}_{\tau_m} \end{bmatrix} = \Psi^{\circ}_{\boldsymbol{\tau}}$$

ここで

$$\Sigma = (\Sigma_{ij}) = (V_{\tau_i \wedge \tau_j}).$$

もちろん

(15) $E(\Psi^{\circ}_{\tau_i} \Psi^{\circ}_{\tau_j}) = \int_0^1 \psi_{\tau_i}(y) \psi_{\tau_j}(y)'\, dy = E(\Psi^{\circ}_{n:\tau_i} \Psi^{\circ}_{n:\tau_j})$

が成立っている.

補題４ （ Lemma 3.3 in [7] 参照）

$\{X_t,\ t \in [0,T]\}$ が可分な sub-martingale であって $E(X_T^2) < \infty$ ならば

$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |X_t| \geq 2\lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}[P\{|X_T|>\lambda\}E(X_T^2)]^{1/2}$$

が成立つ.

さて，漸次打切関数 $\{\Psi^{\circ}_{n:\tau} \ ;\ 0\leq\tau\leq 1\}$ は $D^k[0,1]$ に属し，martingale をなし，その周辺分布は正規過程 $\{\Psi^{\circ}_{\tau}\ ;\ 0\leq\tau\leq 1\}$ の周辺分布に収束することが示された．これが弱収束であることを示すためには Tightness を示せばよい．それには

$$\omega_\delta(x) = \sup\{|x(t)-x(s)| : 0\leq s<t\leq (s+\delta)\wedge 1\}$$

に対し，

$$(16)\qquad \lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} P\{\omega_\delta(\Psi^{\circ}_{n:}) > \varepsilon\} = 0$$

を示せばよい．$k=1$ の場合について示せば十分である．$\delta = 1/N$ とし，$[0,1]$ を N等分すれば，定義より

$$\omega_\delta(\Psi^{\circ}_{n:}) \leq 4 \sup_{j=0,\cdots,N-1} \sup_{j\delta<\tau\leq(j+1)\delta} |\Psi^{\circ}_{n:} - \Psi^{\circ}_{n:j\delta}|$$

であり，$\{|\Psi^{\circ}_{n:} - \Psi^{\circ}_{n:j\delta}| ;\ j\delta < \ \leq (j+1)\delta\}$ は sub-martingale であるから補題４より

$$P\{\omega_\delta(\Psi^{\circ}_{n:}) > \varepsilon\} \leq \sum_{j=0}^{N-1} P\{\sup_{j\delta<u\leq (j+1)\delta} |\Psi^{\circ}_{n:\tau} - \Psi^{\circ}_{n:j\delta}| > \varepsilon/4\}$$

$$\leqq \sum_j \frac{8}{\varepsilon}\Big[P\{|\Psi^\circ_{n:(j+1)\delta} - \Psi^\circ_{n:j\delta}| > \varepsilon/8\} \times E|\Psi^\circ_{n:(j+1)\delta} - \Psi^\circ_{n:j\delta}|^2 \Big]^{1/2}$$

を得る．補題3から，

$$E|\Psi^\circ_{n:(j+1)\delta} - \Psi^\circ_{n:j\delta}|^2 = I_{(j+1)\delta} - I_{j\delta} = \Delta_j I \quad \text{とおく}.$$

を得る．さらに，$n\to\infty$ のとき

$$P\{|\Psi^\circ_{n:(j+1)\delta} - \Psi^\circ_{n:j\delta}| > \varepsilon/8$$

$$\to P\{|\Psi^\circ_{(j+1)\delta} - \Psi^\circ_{j\delta}| > \varepsilon/8\}$$

$$\leqq 16\varepsilon^{-1}(\Delta_j I/2\pi)^{1/2} \exp\{-\varepsilon^2/(128\Delta_j I)\}$$

を得る．ゆえに，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\omega_\delta(\Psi^\circ_{n:})>\varepsilon\}$$

$$\leqq 8\varepsilon^{-1}\sum_j\Big[\frac{16(\Delta_j I)^{3/2}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \exp(-\varepsilon^2/(128\Delta_j I))\Big]^{1/2}$$

$$\leqq \frac{32\,\varepsilon^{-3/2}}{(2\pi)^{1/4}} I_1 \max_j\{(\Delta_j I)^{-1/4}\exp(-\varepsilon^2/(256\Delta_j I))\}$$

$\Delta_j I \to 0$ as $N\to\infty$ （一様）

by

$$\longrightarrow 0 \quad \text{as } N\to\infty$$

よって（16）が示された．

定理 1.

打切関数 $\{ \Psi^{\circ}_{n:\tau} \ ; \ 0 \leq \tau \leq 1 \}$ は正規過程 $\{ \Psi^{\circ}_{\tau} \ ; 0 \leq \tau \leq 1 \}$ に $D^{k}[0,1]$ の Skorokhod J_1-topology で収束する.

系 1

打切推定関数 $\{ \Psi^{\circ}_{n:t} \ ; \ 0 \leq t < \infty \}$:

$$(17) \qquad \Psi^{\circ}_{n:t}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \psi_t(X_i, \theta) ,$$

は正規過程 $\{ \Psi^{\circ}_{t} \ ; \ 0 \leq t < \infty \}$:

$$(18) \qquad \Psi^{\circ}_{t}(\theta) = \int_0^{\infty} \psi_t(x, \theta) \, W^{\circ}(F_\theta(dx))$$

に $D^{k}[0, \infty)$ の拡張 Skorokhod J_1-topology で収束する.

系 2

打切尤度推定関数 $\{ \Phi^{\circ}_{n:t} \ ; \ 0 \leq t < \infty \}$:

$$(19) \qquad \Phi^{\circ}_{n:t}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \phi_t(X_i, \theta) ,$$

は正規過程 $\{ \Phi^{\circ}_{t} \ ; \ 0 \leq t < \infty \}$

$$(20) \qquad \Phi^{\circ}_{t}(\theta) = \int_0^{\infty} \phi_t(x, \theta) \, W^{\circ}(F_\theta(dx))$$

に $D^{k}[0, \infty)$ の拡張 Skorokhod J_1-topology で収束する.

6 正則条件について

[A1] The parameter space Θ is a subspace of R^k and for any $M > 0$, Θ_M (= $\Theta \cap \{\theta : \|\theta\| \leqq M\}$) is closed.

[A2] For each $\theta \in \Theta$, $F_\theta(x)$ has a positive p.d.f. $f(x,\theta)$ is continuous in Θ for all $x \in R^+$.

[A3] If $\theta_1 \neq \theta_2$, $\int_{R^+} |f(x,\theta_1) - f(x,\theta_2)|\, dx > 0$. Further, if $\theta_1 \neq \theta_2$ and $F_{\theta_1}(t) = F_{\theta_2}(t)$ for some $t > 0$, then

$$\int_0^t |f(x,\theta_1) - f(x,\theta_2)|\, dx > 0.$$

In addition to [A1]-[A3], we have the following ones, where $U_d(\theta_o) = \{\theta : \|\theta - \theta_o\| < d\}$ stands for a neighbourhood of θ_o of radius d (> 0).

[B1] There exists a $d_o > 0$, such that for every $x \in R^+$, $f(x,\theta)$ is continuously twice differentiable in $\theta \in U_{d_o}(\theta_o)$ and there are integrable functions $U_i^*(x) = U_i^*(x;\theta_o,d_o)$ with

$$U_i^* = \int_{R^+} U_i^*(x)\, dx < \infty, \quad i=1,2,$$

such that for every $\theta \in U_{d_o}(\theta_o)$,

$$\|(\partial/\partial\theta)\, f(x,\theta)\| \leqq U_1^*(x), \qquad x \in R^+,$$

$$\|(\partial^2/\partial\theta\partial\theta')\, f(x,\theta)\| \leqq U_2^*(x), \qquad x \in R^+.$$

Define $\phi(x,\theta)$ as in after (2.5) and let

$$\dot\phi(x,\theta) = (\partial/\partial\theta')\, \phi(x,\theta)$$

$$= (\partial^2/\partial\theta\partial\theta') \log f(x,\theta) \quad .$$

[B2] The Fisher information matrix

$$I(\theta) = E_\theta\{[\phi(X_i,\theta)][\phi(X_i,\theta)]'\}$$

exists, is positive definite (p.d.) and continuous in $\theta \in U_{d_o}(\theta_o)$. The expectation matrix $E_\theta\, \dot\phi(X_i,\theta)$ exists and is continuous in $\theta \in U_{d_o}(\theta_o)$. $E_{\theta_o} \|\dot\phi(X_i,\theta_o)\|^2 = E_{\theta_o}\{\text{trace}(\dot\phi(X_i,\theta_o))^2\}$ exists.

[B3] Let, for every $d > 0$,

$$u(x;\theta_o,d) = \sup\{ \|\dot{\phi}(x,\theta) - \dot{\phi}(x,\theta_o)\| \,;\, \|\theta - \theta_o\| < d \}.$$

Then, the expected value of $u(X_i;\theta_o,d)$ exists and

$$\lim_{d \downarrow o} E_{\theta_o} u(X_i;\theta_o,d) = 0.$$

[B4] For every d and $T > 0$, let

$$\bar{R}_T(d) = \sup\{ \bar{F}_{\theta_o}(t) \|(\partial^2/\partial\theta\partial\theta') \log \bar{F}_\theta(t) - (\partial^2/\partial\theta\partial\theta') \log \bar{F}_{\theta_o}(t)\| \,:\, \|\theta - \theta_o\| < d,\ t > T \}.$$

Then, for all sufficiently small $d > 0$,

$$\lim_{T \to \infty} \bar{R}_T(d) = 0.$$

For some other regularity conditions, let's introduce the following:

$$g(x;\theta,d) = \sup\{ f(x,\theta) : \tau \in \Theta, \|\tau - \theta\| < d \},\quad d > 0,$$

$$\tilde{G}_\theta(t:d) = \sup\{ \bar{F}_\tau(t) : \tau \in \Theta, \|\tau - \theta\| < d \},\quad d > 0,$$

and

$$\tilde{g}_t(x;\theta,d) = \begin{cases} g(x;\theta,d), & \text{if } x \in [0,t], \\ \tilde{G}_\theta(t;d), & \text{if } x \in (t,\infty), \quad t \in R^+. \end{cases}$$

Furthermore, let

$$g(x;\theta_\infty,d) = \sup\{ f(x,\theta) : \theta \in \Theta, \|\theta - \theta_o\| > d^{-1} \},$$

$$G_{\theta_\infty}(t;d) = \sup\{ \bar{F}_\theta(t) : \theta \in \Theta, \|\theta - \theta_o\| > d^{-1} \},$$

and

$$\tilde{g}_t(x;\theta_\infty,d) = \begin{cases} g(x;\theta_\infty,d), & \text{if } x \in [0,t], \\ \tilde{G}_\theta(t;d), & \text{if } x \in (t,\infty), \quad t \in R^+. \end{cases}$$

[C1] For every $\theta \in \Theta$, there exists a positive number $d_1(\theta) > 0$ such that for any $d \in (0, d_1(\theta))$,

$$\int_o^\infty g(x;\theta,d)\,dx < \infty.$$

[C2] There exists a positive number $\alpha_1 > 0$ such that

$$\lim_{d \downarrow o} \int_o^\infty \{g(x;\theta_\infty,d)/f(x,\theta_o)\}^{\alpha_1} f(x,\theta_o)\,dx = 0.$$

Furthermore, for all sufficiently small $d > 0$ and any $t > 0$,

$$\int_o^\infty \log^+ \{g(x;\theta_\infty,d)/f(x,\theta_o)\}\, f(x,\theta_o)\,dx < \infty,$$

$$\int_o^t \log^- \{g(x;\theta_\infty,d)/f(x,\theta_o)\}\, f(x,\theta_o)\,dx > 0, \quad \text{and}$$

$$\lim_{T \uparrow \infty} \int_T^\infty \log^- \{g(x;\theta_\infty,d)/f(x,\theta_o)\}\, f(x,\theta_o)\,dx \,/\, \bar{F}_{\theta_o}(T) < \infty,$$

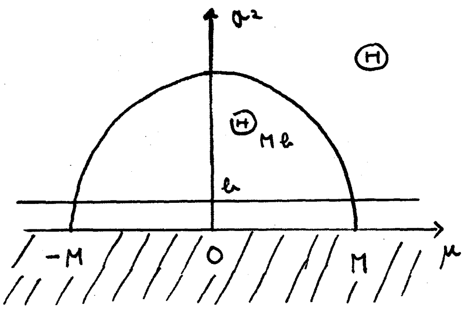
where $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$ and $\log^- x = \max\{-\log x, 0\}$.

いくつかの生存分布，たとえば，正規，対数正規，逆正規，ガンマ，ワイブル等，がこの正則条件をみたしている．仮定群Aは母数と分布の対応を明確にするためのものである．仮定群Bは［B4］を除けばそんなに制約的なものではない．仮定群Cは母数空間をコンパクト化するためのものである．［B4］は残念ながら Case by Case で見る以外ないように思う．対数正規と逆正規を例にとって正則条件を検討してみる．

① 対数正規分布

$$f(x, \theta) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right\}, \quad x > 0$$

$$\Theta = \left\{ \theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} -\infty < \mu < \infty \\ 0 < \sigma^2 < \infty \end{array} \right\}$$



$$\log f = -\log(x\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2$$

a)
$$\phi = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\log f = \dfrac{1}{\sigma^2}(\log - \mu) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\log f = -\dfrac{1}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}(\log x - \mu)^2 \end{cases}$$

$$\dot{\phi} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\mu^2}\log f = -\dfrac{1}{\sigma^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial\sigma^2\partial\mu}\log f = -\dfrac{1}{\sigma^4}(\log x - \mu), \quad \dfrac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\log f = \dfrac{1}{2\sigma^4} - \dfrac{1}{\sigma^6}(\log x - \mu)^2 \end{cases}$$

b) $\dot{f} = \left(\frac{\partial}{\partial\mu} f = f \cdot \frac{\partial}{\partial\mu} \log f \qquad \frac{\partial}{\partial\sigma^2} f = f \frac{\partial}{\partial\sigma^2} \log f \right.$

$$\ddot{f} = \left(\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} f = f\left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}(\log x-\mu)^2\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2\partial\mu} f = f\left\{-\frac{3}{2\sigma^4}(\log x-\mu) + \frac{1}{2\sigma^6}(\log x-\mu)^2\right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2} f = f\left\{\frac{3}{4\sigma^4} - \frac{3}{2\sigma^6}(\log x-\mu)^2 + \frac{1}{4\sigma^8}(\log x-\mu)^4\right\} \end{array} \right.$$

[B2] $$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$E_\theta \|\dot{\phi}\|^2 = \frac{1}{\sigma^4} + \frac{2}{\sigma^6} + \frac{9}{4\sigma^8}$$

[B3] $$\left(\dot{\phi}(x,\theta) - \dot{\phi}(x,\theta_0)\right)_{11} = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_0^2},$$

$$(\qquad)_{12} = \frac{\mu-\mu_0}{\sigma^4} - \left(\frac{1}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma_0^4}\right)(\log x-\mu_0)$$

$$(\qquad)_{22} = \left(\frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma_0^4}\right) - \frac{(\mu-\mu_0)^2}{\sigma^6} + 2\frac{\mu-\mu_0}{\sigma^6}(\log x-\mu_0) - \left(\frac{1}{\sigma^6} - \frac{1}{\sigma_0^6}\right)(\log x-\mu_0)^2$$

$$E\, u(X_i;\theta_0,d) \leq \left\{E_{\theta_0} u^2(X_i;\theta_0,d)\right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \frac{4d^2}{(\sigma_0^2+d)^4} + 4\left(\frac{1}{(\sigma_0^2+d)^2} - \frac{1}{\sigma_0^4}\right)^2\sigma_0^2 + \left(\frac{1}{\sigma_0^2+d} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{(\sigma_0^2+d)^2} - \frac{1}{\sigma_0^4}\right)^2 + \frac{4d^4}{(\sigma_0^2+d)^6} + 8\frac{d^2\sigma_0^2}{(\sigma_0^2+d)^6} + 12\left(\frac{1}{(\sigma_0^2+d)^3} - \frac{1}{\sigma_0^6}\right)^2\sigma_0^4 \right\}^{1/2}$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{as } d \longrightarrow 0$$

[B4] $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{\Phi}(t,\theta)\right)_{11} = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\int_T^\infty x^2\,dN/\bar{N}(T) - \left(\frac{1}{\sigma}\int_T^\infty x\,dN/\bar{N}(T)\right)^2$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\{T n(T) + \bar{N}(T)\}/\bar{N}(T) - \left(\frac{1}{\sigma}\, n(T)/\bar{N}(T)\right)^2$$

$$\sim O(T^2) \quad \text{as } T\to\infty$$

ここで $T = \log t$, $N = N(0,1)$, $\frac{dN(x)}{dx} = n(x)$

また $n(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) < \bar{N}(x) < n(x)\frac{1}{x}$

同様にして

$$(\quad)_{12} \sim O(T^3) \qquad (\quad)_{22} \sim O(T^4)$$

ゆえに,

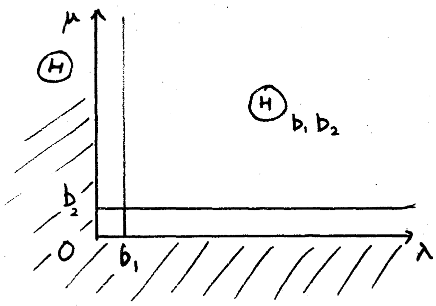
$$\bar{R}_T(d) = \bar{N}(T)\cdot O(T^4) \to 0, \quad \text{as } T\to\infty.$$

② 逆正規分布

$$f(x,\theta) = \left(\frac{\lambda}{x^3 2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2\right\}$$

$$Ⓗ = \left\{\theta = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} : \begin{array}{l} 0<\lambda<\infty \\ 0<\mu<\infty \end{array}\right\}$$

$$\log f = \frac{1}{2}\log\frac{\lambda}{2\pi x^3} - \frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2$$



a)

$$\phi = \left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial\lambda}\log f = \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2 \\ \frac{\partial}{\partial\mu}\log f = \frac{1}{\mu^2 x}(x-\mu) + \frac{1}{\mu^3 x}(x-\mu)^2 \end{array}\right.$$

$$\dot{\phi} = \left(\begin{array}{ll} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log f = -\frac{1}{2\lambda^2}, & \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\lambda}\log f = \frac{1}{\mu^2 x}(x-\mu) + \frac{1}{\mu^3 x}(x-\mu)^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\log f = -\frac{\lambda}{\mu^2 x} - \frac{4\lambda}{\mu^3 x}(x-\mu) - \frac{3\lambda}{\mu^4 x}(x-\mu)^2 & \end{array}\right.$$

b)

$$\dot{f} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\lambda} f = f \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \log f = f\left(\dfrac{1}{2\lambda} - \dfrac{1}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2 \right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\mu} f = f \dfrac{\partial}{\partial\mu} \log f = f\left(\dfrac{\lambda}{\mu^2 x}(x-\mu) + \dfrac{\lambda}{\mu^3 x}(x-\mu)^2 \right) \end{cases}$$

$$\ddot{f} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\lambda^2} f = f\left(-\dfrac{1}{4\lambda^2} - \dfrac{1}{2\lambda\mu^2 x}(x-\mu)^2 + \dfrac{1}{4\mu^4 x^2}(x-\mu)^4 \right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial\mu\partial\lambda} f = f\left(\dfrac{3}{2\mu^2 x}(x-\mu) + \dfrac{3}{2\mu^3 x}(x-\mu)^2 - \dfrac{\lambda}{2\mu^4 x^2}(x-\mu)^3 - \dfrac{\lambda}{2\mu^5 x^2}(x-\mu)^4 \right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial\mu^2} f = f\left(-\dfrac{\lambda}{\mu^2 x} - \dfrac{4\lambda}{\mu^3 x}(x-\mu) - \dfrac{3\lambda}{\mu^4 x}(x-\mu)^2 + \dfrac{\lambda^2}{\mu^4 x}(x-\mu)^2 \right. \\[2ex] \qquad\qquad \left. + \dfrac{2\lambda^2}{\mu^5 x^2}(x-\mu)^3 + \dfrac{\lambda^2}{\mu^6 x^2}(x-\mu)^4 \right) \end{cases}$$

[B2]

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\lambda^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda}{\mu^3} \end{pmatrix}$$

$$E\|\dot{\phi}\|^2 = \frac{1}{4\lambda^4} + \frac{2\lambda}{\lambda^2\mu^2} + \frac{2}{\lambda\mu^3} + \frac{9\lambda}{\mu^5} + \frac{\lambda^2}{\mu^6} + \frac{192}{\mu^4}$$

[B3]

$$\left(\dot{\phi}(x,\theta) - \dot{\phi}(x,\theta_0)\right)_{11} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

$$\left(\quad\right)_{12} = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right)\left(-\frac{x-\mu_0}{x}\right) + \frac{\mu-\mu_0}{\mu}\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right)\frac{(x-\mu)^2}{x}$$

$$- \frac{2(\mu-\mu_0)}{\mu^3}\frac{x-\mu_0}{x} + \frac{(\mu-\mu_0)^2}{\mu^3}\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\quad\right)_{22} = -\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{1}{x} - 4\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{x-\mu_0}{x} + 4\frac{\lambda}{\mu}\frac{\mu-\mu_0}{x}$$

$$-3\left(\frac{\lambda}{\mu^4} - \frac{\lambda_0}{\mu_0^4}\right)\frac{(x-\mu_0)^2}{x} + 6\frac{\lambda}{\mu^4}(\lambda-\lambda_0)\frac{x-\mu_0}{x} - 3\frac{\lambda}{\mu^4}\frac{(\mu-\mu_0)^2}{x}$$

これより

$$E_{\theta_0} u(X_i;\theta_0,d) \leq \left\{ E_{\theta_0} u(X_i;\theta_0,d)^2 \right\}^{1/2} \longrightarrow 0 \quad \text{as } d \to 0 .$$

[B4] $$\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(t,\theta) = \int_t^\infty \ddot{f}\,dx \Big/ \bar{F}_\theta(t) - \left[\int_t^\infty \dot{f}\,dx \Big/ \bar{F}_\theta(t)\right]\left[\int_t^\infty f'\,dx \Big/ \bar{F}_\theta(t)\right]'$$

L'Hopital's Law より

$$\frac{\int_t^\infty x^2 f\,dx}{t^2\bar{F}(t)} \sim \frac{t^2 f}{t^2 f - 2t\bar{F}} = \frac{1}{1-2\frac{\bar{F}(t)}{tf}} \sim 1 \quad \text{as } t\to\infty$$

$\frac{\bar{F}(t)}{tf} \to 0$

$$\because\quad \frac{\bar{F}(t)}{tf} \sim \frac{-f}{f + t\frac{d}{dt}f} = -\frac{1}{1 + t\frac{\frac{d}{dt}f}{f}} = -\frac{1}{1 + t\left\{-\frac{3}{2}\frac{1}{t} - \frac{\lambda(t^2-\mu^2)}{2\mu^2 t^2}\right\}}$$

$$\to 0 \quad \text{as } t\to\infty$$

また

$$\bar{F}(t)\,t^2 \sim 2t^3 f = 2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\, t^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2\mu}\left(t - 2\mu + \frac{\mu}{t^2}\right)} \longrightarrow 0$$

ゆえに

$$\bar{F}(t)\frac{\int_t^\infty x^2 f\,dx}{\bar{F}(t)} = \bar{F}(t)\,t^2\,\frac{\int_t^\infty x^2 f\,dx}{t^2\bar{F}(t)} \longrightarrow 0 \quad \text{as } t\to\infty$$

よって

$$R_T(d) = O\left(T^2\bar{F}_{\theta_0}(T)\right) \longrightarrow 0 \quad \text{as } T\to\infty$$

7. 漸次打切データによる最尤推定量

漸次打切尤度を最大にする θ の値 $\hat{\theta}_{n:t}$ を漸次打切最尤推定量と定義する：

(21) $$L_{n:t}(\hat{\theta}_{n:t}) = \sup\{L_{n:t}(\theta) : \theta\in\Theta\}.$$

$L_{n:t}(\theta)$ は θ については連続であり，t については右連続

であるから，$\hat{\theta}_{n:t}$ は右連続である：

(22) $\{\hat{\theta}_{n:t}, t \in R^+\} \in D^k[R^+]$.

定理 2

正則条件の下で，任意の $t_1 > 0$ に対し，漸次打切最尤推定量は

(23) $\{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_{n:t} - \theta_0),\quad t_1 \leq t < \infty\}$

は $D^k([t_1, \infty))$ の拡張 Skorokhod topology で正規過程

(24) $[I_t(\theta_0)]^{-1}\,\Phi^\circ_t(\theta_0) = [I_t(\theta_0)]^{-1} \int_0^\infty \phi_t(x, \theta_0)\, W^\circ(F_{\theta_0}(dx)),\quad t_1 \leq t < \infty$

に収束する．

この定理を証明するためには，通常の最尤推定量の場合と同じく２つの段階に分けて議論する．しかし，通常の場合と異なる点は，打切時間 t に関する一様性が収束について要求されることである．それは次の２つの定理としてまとめられる．

定理 3.

漸次打切最尤推定量 $\{\hat{\theta}_{n:t},\ 0 < t < \infty\}$ は θ の強一致推定量であって，任意の $t_1 > 0$ に対し，この収束は $[t_1, \infty)$ 上で一様である：任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} P_\theta \left\{ \sup_{t \in [t_1, \infty)} |\hat{\theta}_{n:t} - \theta| > \varepsilon \right\} = 0.$$

定理4

任意の $\varepsilon>0$ と $t_1>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left\{ \sup_{t\in[t_1,\infty)} \left| \mathring{\Phi}_{n:t}(\theta) - I_t(\theta)\sqrt{n}(\hat{\theta}_{n:t}-\theta)\right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

定理1と定理4から直に定理2が求まる．定理4は，
定理4は展開式

$$(25)\qquad \mathring{\Phi}_{n:t}(\hat{\theta}_{n:t}) = \mathring{\Phi}_{n:t}(\theta) + \frac{1}{n}\dot{\Phi}_{n:t}(\tilde{\theta}_{n:t})\sqrt{n}(\hat{\theta}_{n:t}-\theta)$$

ただし，$|\tilde{\theta}_{n:t}-\theta| \leqq |\hat{\theta}_{n:t}-\theta|$

を論じることによって証明される．まずはじめに，定理3から，$\hat{\theta}_{n:t}$ が $t\in[t_1,\infty)$ に一様に Ⓗ の内点であることが示されるので，(25) 式の左辺 $=0$ となる確率が1に行く．
同じ理由によって

$$\sup_{t\in[t_1,\infty)} \left| \frac{1}{n}\dot{\Phi}_{n:t}(\tilde{\theta}_{n:t}) + I_t(\theta)\right| \longrightarrow 0$$

が示される．しかしそれは，次の2つの補題から導かれる．

補題5

任意の $\varepsilon>0$ と $d>0$ に対して

$$(26)\qquad \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}\left\{ \sup_{\substack{0\leqq t<\infty \\ |\theta-\theta_0|<d}} \left| n^{-1}\dot{\Phi}_{n:t}(\theta) - n^{-1}\dot{\Phi}_{n:t}(\theta_0)\right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

補題 6

任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta \left\{ \sup_{t\in R^+} \left| n^{-1} \dot{\Phi}_{n:t}(\theta) - I_t(\theta) \right| > \varepsilon \right\} = 0 \quad .$$

結局，示すべき基本命題は定理 3 と補題 5，6 に帰着した．定理 3 はもっと基本の命題に帰着される．それらを検討してゆけば，前に論じた正則条件のもとで，射影子による Martingale Property と Submartingale 及び Supermartingale Inequality（Karlin and Taylor〔3〕参照）を使うことによって，これらの打切時間 t に対して一様な収束性に関する基本補題を証明することが出来る（Inagaki and Sen〔1〕参照）．

最後に，主定理 2 の有用性について触れる．Sen〔5-7〕の尤度比検定による逐次検定を考える場合，複合仮説検定を論じるならばどうしても漸次打切最尤推定量の性質，とくに，打切時間 t に一様な収束性が示されなければならない．それを避けることはできないのである．定理 2 はそれを保障している．

8．まとめ．

本稿では，Inagaki and Sen〔1〕の準備部分である 1 節～3 節について，漸次打切推定関数という一般化を行い，定理1

を得た．これは Sen and Tsong [7] の結果を一般化するとともに証明も明確にした．また，よく用いられる生存分布が正則条件をみたしていることを具体的に示した．本稿7節では，[1] の主定理2の証明法を直観的に説明した．

参考文献

[1] Inagaki,N. and Sen, P.K.(1984). On progressively truncated maximum likelihood estimators, *Ann.Inst.Statist.Math.*, (submitted).

[2] Inagaki,N.(1983). The decomposition of the Fisher information, *Ann.Inst.Statist.Math.*, 35, 151-165.

[3] Karlin,S. and Taylor,H.M.(1981). *A First Course in Stochastic Process*, second edition, Academic Press.

[4] Lawless,J.F.(1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons.

[5] Sen,P.K.(1976). Weak convergence of progressively censored likelihood ratio statistics and its role in asymptotic theory of life testing, *Ann.Statist.*, 4, 1247-1257.

[6] Sen,P.K.(1981). *Sequential Nonparametrics*, John Wiley & Sons, New York.

[7] Sen,P.K. and Tsong,Y(1981). An invariance principle for progressively truncated likelihood ratio statistics, *Metrika*, 28, 165-177.