数理解析研究所講究録
第538巻 1984年 144-152

非支配的な場合の"non-regularity"について

東京水産大　山田作太郎 (Sakutarō Yamada)

§1. 序

同じパラメーター空間Θをもつ2つの実験を $E=(X, \underline{A}, \underline{P}=\{P_\theta; \theta\in\Theta\})$, $F=(Y, \underline{B}, \underline{Q}=\{Q_\theta; \theta\in\Theta\})$ とする。

定義1 (Blackwell [1]).

FがEに対して十分

$\Longleftrightarrow$ $(Y, \underline{B})$から$(X, \underline{A})$へのMarkov核$T(y, A)$が存在して

$$P_\theta(A) = \int T(y, A)\ Q_\theta(dy)$$

が任意のA, θに対して成りたつ。

今, $Y=X$, $\underline{B}\subset\underline{A}$, $Q_\theta = P_\theta|\underline{B}$ (P_θの$\underline{B}$への制限)とし, $\underline{B}$はEに対して通常の意味で十分とし, $A\in\underline{A}$の$\underline{B}$を与えたときの, $P_\theta\in\underline{P}$に共通な条件つき確率を$E(I_A|\underline{B})$で表わすと

$$P_\theta(A) = \int E(I_A|\underline{B})(x)\ P_\theta|\underline{B}(dx) \qquad (*)$$

が任意の$A\in\underline{A}$, $\theta\in\Theta$に対して成りたつ。ここでもし, $E(I_A|\underline{B})(x)$が任意の$x\in X$に対して, $\underline{A}$上の確率測度なら

$\underline{F} \equiv E(\underline{B})$ はEに対して定義1の意味で十分であるが，そのような正則な条件つき確率は必ずしも存在しない（[4]）。

Le Cam（[5]）は，この困難をさけるためMarkov核 をそのまゝ扱わないで，Tから生成される，有界符号測度の空間の間の作用素

$$T: \quad M^b(Y, \underline{B}) \longrightarrow M^b(X, \underline{A})$$
$$(T\mu)(A) = \int T(y, A)\, \mu(dy)$$

のもつ性質

(a) linear

(b) positive $(\mu \geq 0 \Rightarrow T\mu \geq 0)$

(c) positively isometric $(\mu \geq 0 \Rightarrow \|\mu\| = \|T\mu\|)$

を抽出して transition と名づけた。ここに $M^b(X, \underline{A})$ は $(X, \underline{A})$ 上の有界符号測度の全体で，(c)のノルムは全変動のそれとする。 $M^b(X, \underline{A})$ は抽象L-空間で，Dedekind 完備であり，従って，Riesz の分解定理（Schaefer [9]）より，

$$M^b(X, \underline{A}) = \{\underline{P}\text{ より生成される }M^b(X, \underline{A})\text{ の band}\} \oplus \underline{P}^{\perp}$$

が成りたつ。従って，$\underline{P}$ の各元と直交する $\mu \in M^b(X, \underline{A})$ は考える必要はないだろうから，$M^b(X, \underline{A})$ 全体を考える必要はなく，$\underline{P}$ から生成される $M^b(X, \underline{A})$ の band，$L(E)$ としるす，に制限してもよいだろう。$L(E)$ を実験Eの L-空間という。

定義2（Le Cam [5]）.

$L(F)$ から $L(E)$ への *linear*, *positive*, *positively isometric* な写像を実験Fから実験Eへの *transition* という。

定義3（Le Cam [5]）

$$\delta(F, E) = \inf_{T} \sup_{\theta \in \Theta} \| TQ_\theta - P_\theta \|$$

をFのEに対する *deficiency* という。ここにTはFからEへの *transition* 全体を動く。

従って，$TQ_\theta = P_\theta$ が任意の $\theta \in \Theta$ に対して成りたつ *transition* Tが存在すれば $\delta(F, E) = 0$ となる。そしてこのことは，"適当に制限された決定問題に対しては，実験Eは忘れて実験Fのみを実行しても損失はない" ことと同値であることが知られている（[5]）。そして Le Cam（[5]）は有界可測関数を $L(E)$ の双対空間 $M(E)$ ── 実験Eの M－空間という ── の元とみなし，Eの部分実験は$M(E)$のいくつかの条件をみたす部分空間と定義された。この定義はひろく，必ずしも部分 σ－代数に対応する部分実験ばかりとは限らない。そして部分実験FがEに対して十分であることの定義を射影によって与え，その十分性と $\delta(F, E) = 0$ の同等性を示した（この十分等の定義は省略する）。

§2. 目的と結果

ここでは，非支配的な場合に，Le Cam の *transition* を用

いて，部分σ-代数による部分実験のもとの実験に対する deficiency が0になるための十分条件と，そのときに(＊)と同じ式がL空間の対応に現われる（transition の表現）ことを示す結果を紹介する。

これらの結果においては，実験の pivotal 測度が重要な役割を果たす。実は我々の研究も pivotal 測度の研究からスタートした。

必要な定義と定理をまず列挙しよう。

定義4（[3]，[10]）．

実験 $E=(X, \underline{A}, \underline{P}=\{P_\theta ; \theta\in\Theta\})$ が majorized であるとは，支配測度 m が存在することをいう。すなわち，各 P_θ が m に関して密度をもつことである。

定義5（[3]）． $E=(X, \underline{A}, \underline{P}=\{P_\theta ; \theta\in\Theta\})$ は実験とする。$C_\theta\in\underline{A}$ は次の条件をみたすとき P_θ の（Eに対する）carrier といわれる。

(a) $P_\theta(C_\theta)=1$

(b) $A\subset C_\theta$， $P_\theta(A)=0$ ならば A は $\underline{P}$-零集合。

$\underline{A}$ の部分σ-代数 $\underline{B}$ が，各 P_θ に対して P_θ の1つの carrier を含むとき carriers を含むという。

定理1（[2]）．

実験Eに対して各 P_θ は carrier をもつとする。このときE

に対する同値（つまり $\underline{P}$ と支配測度が同じ零集合をもつ）な支配測度が存在する。

定義6（[8]）.

Eは majorized な実験とする。Eの同値な支配測度 n がEに対する pivotal 測度である

$\Longleftrightarrow$ 任意の $\underline{B} \subset \underline{A}$ に対して，

「$\underline{B}$ が対十分で carriers を含む $\Longleftrightarrow$ 任意の P_θ に対して，P_θ の n に関する密度の version で $\underline{B}$ 一可測なものが取れる」が成りたつ。

定理2（[8]）.

Eは majorized な実験とする。Eに対する pivotal 測度が存在する。

定義7（[6]）.

支配測度として局所化可能な測度がとれる実験は weakly dominated であるといわれる。ここに，$(X, \underline{A})$ 上の測度 m が局所化可能であるとは，m 一測度有限な $\underline{A}$ 一可測集合の任意の族 $\underline{E}$ に対して，その上限 $\operatorname{ess-sup}_{m} \underline{E} \in \underline{A}$ が存在することをいう。

定理3（[7]）.

実験が weakly dominated ならば，最小十分 σ-代数が存在する。

定理4（[3]）.

実験 $E=(X, \underline{A}, \underline{P}=\{P_\theta : \theta\in\Theta\})$ は weakly dominated とする。Eに対する同値な支配測度 n が E に対して pivotal であるための必要十分条件は，任意の十分な部分 σ−代数 $\underline{B}$ と，任意の P_θ に対して，P_θ の n に関する密度の version で $\underline{B}$−可測なものが取れることである。

次の定理は pivotal 測度が (*) と同じタイプの関係式を有して，実験の比較と強く結びついていることを示している。

定理5（[11]）.

実験Eは weakly dominated とする。$\underline{B}_0$ を最小十分σ−代数とする。n はEに対する同値な支配測度とする。このとき n がEに対して pivotal であるための必要十分条件は

$$n(A) = \int E(I_A \mid \underline{B}_0)\, dn|\underline{B}_0 \quad , A\in\underline{A},$$

が成りたつことである。

定理6（[11]）.

Eは majorized な実験とする。$\underline{B}$ は対十分で carriers を含むとする。このとき　$\delta(E(\underline{B}), E)=0$.

この定理は次のようにして示される。n をEに対する pivotal 測度としたとき，n は E に対して，$n|\underline{B}$ は $E|\underline{B}$ に対して同値な支配測度である。従って，次の補題より

$$T_n : L(E(\underline{B})) \longrightarrow L(E)$$

を $\qquad f\cdot n|\underline{B} \longrightarrow f\cdot n \quad , f\in L^1(X, \underline{B}, n|\underline{B})$

で定義すると、T_nは transition であり、かつ $T_n P_\theta|\underline{B} = P_\theta$, $\theta\in\Theta$ が成りたつことから従う。

補題（[10]）.

nはEに対する同値な支配測度とすると、$L(E)=\{f\cdot n;\ f\in L^1(X, \underline{A}, n)\}$ が成りたつ。ここに $f\cdot n$はnに関して密度fをもつ符号測度を表わす。

この定理6は、拡大された transition の性質 $T_n P|\underline{B} = P$ を示すのに、十分核 $E(I_A|\underline{B})$ を登場させる必要のないことを示す。Le Cam の実験の比較の定義が"弱い"ものであることを示している。そして、その時に pivotal 測度のはたす役割もその証明中に示されている。

しかし、十分な部分σ一代数に対しては、deficiency が0であるのみならず、deficiency を0にする transition T_nをpivotal 測度nから定理6のようにしてつくると、これがL一空間の対応として、(*)と同じ表現をもつ（T_nの表現）ことになる。即ち

定理7（[11]）.

$E=(X, \underline{A}, \underline{P}=\{P_\theta;\ \theta\in\Theta\})$ は weakly dominated とし、$\underline{B}$は十分σ一代数とする。nはEに対する pivotal 測度とし

$$T_n:\ L(E(\underline{B})) \longrightarrow L(E)$$

を　　$f\cdot n|\underline{B} \longrightarrow f\cdot n$　，　$f \in L^1(X, \underline{B}, n|\underline{B})$

で定義すると，これは transition で，$T_n P_\theta|\underline{B} = P_\theta$, $\theta \in \Theta$,

をみたし（従って $\delta(E(\underline{B}), E) = 0$ で），さらに

$$T_n(f\cdot n|\underline{B})(A) = \int E(I_A|\underline{B})(x)\,(f\cdot n|\underline{B})(dx), \quad A \in \underline{A} \qquad \cdots (**)$$

が成りたつ。

(**)で，$f = dP_\theta|\underline{B}/dn|\underline{B}$ とおくと(*)に一致する。なお，ここで$\underline{B}$について正則な条件つき確率の存在を仮定していないことに注意する。つまり，Le Cam の transition は，この様に，我々が十分性に期待していることに答えてくれるものであって，その時に pivotal 測度が本質的な役割を果たすことをこの定理はのべている。定理5と(**)の証明には，pivotal 測度の又別の性質を利用しなければいけないのでここでは省略する。

参考文献

[1] Blackwell, D. : Equivalent comparisons of experiments, Ann. Math. Statist. 24(1953), 265-272.

[2] Diepenbrock, F.R. : Charakterisierung einer allgemeineren Bedingung als Dominiertheit mit Hilfe von lokalisierten Massen, Thesis: University of Münster, 1971.

[3] Ghosh J.K., H. Morimoto and S. Yamada: Neyman factorization and minimality of pairwise sufficient subfields, Ann. Statist. 9(1981), 514-530.

[4] Halmos P.R. : Measure theory, van Nostrand, 1950.

[5] Le Cam, L. : Sufficiency and approximate sufficiency, Ann. Math. Statist. 35(1964), 1419-1455.

[6] Mussmann, D. : Vergleich von Experimenten in schwach diminierten Fall, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete. 24(1972), 295-308.

[7] Pitcher, T.S. : A more general property than domination for sets of probability measures, Pacific J. Math. 15(1965), 597-611.

[8] Ramamoorthi, R.V. and S. Yamada: Neyman factorization theorems for experiments admitting densities, Sankhya 45 (1983), Series A. 168-180.

[9] Schaefer, H.H. : Banach Lattices and positive operators, Springer-Verlag, 1974.

[10] Siebert, E.: Pairwise sufficiency, Z. Wahrscheinlichkeits-theorie und verw. Gebiete. 46(1979), 237-246.

[11] Yamada, S. : A note ona representation of a transition by pivotal measures, in preparation.