数理解析研究所講究録
第 539 巻 1984 年 57-72

ヴォートンによる渦運動の研究

名大 工学部　桑原真二
(KUWABARA Sinzi)

§1. まえおき

ここでは縮まない完全流体の渦運動を考える。このような流れにおいて、渦糸の微小部分が初期に長さベクトル $d\hat{x}$，渦度 $\hat{\omega}$，断面積 $\hat{\sigma}$ をもち，時刻 t でそれぞれ dx，ω，σ になったとすれば

$$\left.\begin{array}{l} dx \,/\!/\, \omega \qquad (d\hat{x} \,/\!/\, \hat{\omega}) \\ \hat{\omega}\hat{\sigma} = \omega\sigma \equiv \Gamma \;, \quad \hat{\sigma}\, d\hat{s} = \sigma\, ds \quad (ds = |dx|) \end{array}\right\} \quad (1.1)$$

が成立つ。すなわち渦糸はいつも同じ実質部分からなり、渦の強さ Γ は保存すると考えられる。それ故渦糸はいつまでも個性を保っている。これが渦糸モデルの基礎をなしている。

実際の渦運動では渦のつなぎかえが起る。これは粘性による渦度の拡散が本質的である。この現象を渦糸モデルによってシミュレートするには、物理的考察をまじえてつなぎかえを人工的に行ってやる必要がある。

vorton という言葉は Saffman[4)] の創作と思われるがここでは次のように理解する。渦場を多くの細胞に分割し1つの細胞を代表点の位置と渦度と体積によって特徴ずけられ

るものと仮定する。そしてこれらの量の時間的発展をLagrange的に追跡する。このようなモデルでは渦糸の連続性は表むき現れないが、近似的に成立っている。渦のつなぎかえも、渦度の拡散又はそれに相当する効果（例えば、衝撃波における von Neumann-Richtmeyer の方法のような）を計算スキームにふくめれば、渦糸モデルよりスムースに行うことができるように考えられる。

渦運動ではヘリシティー $Hl(t)$ とエンストロフィー $E_s(t)$ という量が重要と考えられる。各々

$$Hl(t) = \iiint \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)\, d^3\mathbf{x} \tag{1.2}$$

$$E_s(t) = \frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)^2\, d^3\mathbf{x} \tag{1.3}$$

で定義される。ヘリシティーの時間変化を考えよう。まず

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}\, d^3\mathbf{x} = \iiint_V \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}\omega_\alpha + v_\alpha\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t}\right) d^3\mathbf{x}$$

$$= \iiint_V \left[\left(-v_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}\right)\omega_\alpha + v_\alpha\left(-v_\alpha\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\beta} + \omega_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\right] d^3\mathbf{x}$$

$$= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{p}{\rho}\omega_\alpha - v_\alpha v_\beta \omega_\beta + \frac{1}{2}v_\beta v_\beta \omega_\alpha\right) d^3\mathbf{x}$$

$$= \iiint_V \mathrm{div}\left(\frac{p}{\rho}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\boldsymbol{\omega}\right) d^3\mathbf{x}$$

$$= \iint_{\partial V} \left(\frac{p}{\rho}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\boldsymbol{\omega}\right)\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{1.4}$$

が成立つ。今 $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega} \neq 0$ の領域が有界で、無限遠で (1.4) の

最後の項が0となると仮定すれば

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}\, d^3\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\iiint \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}\, d^3\mathbf{x} = \frac{d\, Hl}{dt} = 0 \qquad (1.5)$$

が成立ち，上に述べた条件（$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v} \neq 0$ の領域が有界。無限遠からの Hl への寄与がない）を満足すれば、ヘリシティは時間的に不変である。

§2. ヴォートン力学の基礎方程式

縮まない流体の渦運動では、縮まない条件 $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$ から速度場は（副条件を伴う）ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ によって

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{C}(\mathbf{x}) \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{C} = 0 \qquad (\text{副条件}) \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

で表わされ，渦度の定義 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ より $\mathbf{C}$ は

$$\nabla^2 \mathbf{C} = -\boldsymbol{\omega} \qquad (2.2)$$

を満足する。無限に広い空間で，無限遠からの効果がないとすれば

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{r}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')\, d^3\mathbf{x}' \qquad r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \qquad (2.3)$$

したがって、速度は

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{r^3}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')\times\mathbf{r}\, d^3\mathbf{x}' \qquad (2.4)$$

で表わされる。これを Lagrange 表現で表わせば

$$\mathbf{v}(\mathbf{a},t) = \frac{1}{4\pi}\iiint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}',t)\times\mathbf{r}/r^3\, d^3\mathbf{a}' \qquad (2.4')$$

となる。(2.4′) では

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{a},t),t) \text{ を } \mathbf{v}(\mathbf{a},t) \text{ で} \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}(\mathbf{a},t),t) \text{ を } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{a},t) \text{ で} \\ \mathbf{r} = \mathbf{x}(\mathbf{a},t) - \mathbf{x}(\mathbf{a}',t) \end{array}\right\} \quad (2\cdot 5)$$

で表わしている。

流体粒子の運動と渦度の Lagrange 的変化は

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x},t) \quad (2\cdot 6)$$

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot \mathrm{grad})\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \quad (2\cdot 7)$$

で表わされる。(2·6) (2·7) の右辺の $\mathbf{v}$ に (2·4) を代入し、Lagrange 表現で表わせば

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{x}(\mathbf{a},t) = \frac{1}{4\pi}\iiint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}',t)\times\mathbf{r}\,\frac{1}{r^3}\,d^3a' \quad (2\cdot 8)$$

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a},t) = \frac{1}{4\pi}\iiint \Big[\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}',t)\times\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a},t) - \frac{3}{r^5}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}',t)\times\mathbf{r}\,(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a},t))\Big]\,d^3a' \quad (2\cdot 9)$$

をうる。

連続した渦場を多くの細胞に分割し、各細胞を代表点の位置、渦度，体積で特徴づけられると仮定し、その運動を Lagrange 的に追跡する。各細胞は l で番号ずけられ、その Lagrange 座標およびその t における位置は

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}(l), \qquad \mathbf{x} = \mathbf{X}(l,t) \quad (2\cdot 10)$$

で，又その渦度は

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t) = \sum_l \boldsymbol{\Omega}(l,t)\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{X}(l,t))\,V(l) \quad (2\cdot 11)$$

$$\omega(a,t)=\sum_{l}\Omega(l,t)\,\delta^3(a-A(l))\,V(l) \qquad (2\cdot 11')$$

で表わされるものとする。こゝで$V(l)$は細胞lの体積で，縮まない流体を考えているから，時間的に一定である。更に特性関数を

$$\Lambda(l,a)=\left\{\begin{array}{ll}1 & a\in \text{細胞}\, l\\ 0 & a\notin \quad 〃\end{array}\right\} \qquad (2\cdot 12)$$

で定義する。まず(2·8)に$\delta^3(a-A(l))$をかけ，~~(2·9)に~~ (2·12)をかけてaで積分すると各々

$$\frac{D}{Dt}X(l,t)=\frac{1}{4\pi}\sum_{l'}\frac{V(l)}{|X(l,t)-X(l',t)|^3}$$

$$\Omega(l',t)\times(X(l,t)-X(l',t)), \qquad (2\cdot 13)$$

$$\frac{D}{Dt}\Omega(l,t)=\frac{1}{4\pi}\sum_{l'}\Big[\frac{\Omega(l',t)\times\Omega(l,t)}{|X(l,t)-X(l',t)|^3}$$

$$-\frac{3}{|X(l,t)-X(l',t)|^5}\,\Omega(l',t)\times(X(l,t)-X(l',t))$$

$$(\Omega(l,t)\cdot(X(l,t)-X(l',t)))\Big]\,V(l') \qquad (2\cdot 14)$$

をうる。(2·13),(2·14)がヴォートンの基礎方程式である。

ヴォートン力学の方程式を上のようにaについての積分でなく，xについての積分でも行うことができる。すなわち，ωとして(2·11)，特性関数として(2·12)でaをxにかえたもの，(2·8)に$\delta^3(x-X(l,t))$をかけてxについて積分する等の変更を行うものである。しかし，前者の方が直截簡明で

ある。

§3. 乱流境界層におけるバーストのヴォートン・モデルによる解析

今まで渦糸モデルで行って来たように[2]，乱流境界層を流れの方向(x)には変化しない，$y(\geq 0)$だけに依存する（実験式で与えられた）平均流をもつ縮まない粘性のない渦運動とみなす。初期に壁($y=0$)から有限の高さhの，x方向には無限に長い領域の平均流を，z方向に無限に長い断面$a_1 \times a_2$ ($N_2 a_2 = h$)の渦管に分割し、更に渦管をその中心に渦糸をおいて近似する。すなわち，y方向に等間隔に配列した渦列で近似したことになる。そして1列の渦列は同じ強さのx方向に等間隔に無限に列んだ渦糸よりなる。その強さは渦列のある場所の平均流の速度勾配に比例するから、各渦列によって異なる。壁における流線速度0の境界条件は、上述の渦系の鏡像をとることによって満足される（鏡像は$y \leq 0$に存在する）。これまでの近似段階において各渦列は他の渦列($0 \leq |y| \leq h$)と連続な渦度($|y|>h$)からの誘導速度によってx方向に等速度で移動する。

まずこの渦糸系を適当な有限個の自由渦糸群と無変形渦糸群に分ける。自由渦糸群に初期に擾動を加えてその後のふる

まいを追跡する。非変形渦糸群は摂動を加えない場合の速度で移動する。各自由渦糸の（$z=0$ を中心にした）$2X_3^M$ の中の部分を等間隔に $2N_3+1$ 個のヴォートンでおきかえる。ヴォートンの発展すなわちヴォートンの移動と渦度の変化はヴォートン間の相互作用、自由渦群のヴォートン以外の部分、非変形渦糸群、連続的に分布した渦場（$|y|>$ た）よりの寄与からなる。ヴォートン間の相互作用は (2.13) (2.14) によって表わされる。

こゝで自由渦糸を $3\times 3=9$ 本とり

$$a_1=10,\ a_2=a_3=5$$

とおいた。a_1, a_2, a_3 はおのおの渦列中の渦糸の間隔、渦列の間隔、1本の自由渦糸上のヴォートンの間隔で、すべて初期における値である。長さは境界層底面における接線応力から計算した「摩擦長さ」で規格化してある。1本の自由渦糸中のヴォートンの数は 21 である。初期に渦糸は

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 l_1 \qquad -\infty < l_1 < \infty \\ y &= (|l_2|+\tfrac{1}{2})a_2 \qquad l_2=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N_2 \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

にあり、自由渦糸は初期に平行4辺形

$$\left.\begin{aligned} -a_1-\frac{a_1}{a_2}(y-2.5a_2) \le x \le a_1-\frac{a_1}{a_2}(y-2.5a_2) \\ 1.5a_2 \le y \le 3.5a_2 \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

の内部にある。$x=0\ (l_1=0)$, $y=2.5a_2\ (l_2=2)$ にあ

る渦糸（ヴォートン）に

$$x=\varepsilon e^{-z^2/\sigma^2}\cos\varphi$$

$$y=\varepsilon e^{-z^2/\sigma^2}\sin\varphi$$

のように変形し、渦度は

$$\omega_1=-\omega_3\frac{2}{\sigma^2}z\,\varepsilon e^{-z^2/\sigma^2}\cos\varphi$$

$$\omega_2=-\omega_3\frac{2}{\sigma^2}z\,\varepsilon e^{-z^2/\sigma^2}\sin\varphi$$

$$\omega_3=-\Gamma_2/(a_1a_2)$$

で与えられる。この計算では

$$\varepsilon=1,\quad \sigma=10,\quad \varphi=90^\circ$$

とおいた。Γ_2は擾乱を与えた渦列（$l_2=2$）の渦糸の循環である。

以上の初期条件のもとに計算を行った結果が第3図に(a)各軸に斜め方向からの立体図，(b)側面図として示してある。第2図には（a）自由渦糸群の変形部分のエンストロフィー(b)ヘリシティーの時間変化が示してある。計算は$t=30$まで行ったが，9本の自由渦糸群では、$t>15$で近似があまりよくないと考えられる。

§4．絡った2つの渦輪の運動

今x,y面内、y,z面内にある，おのおの中心を原点，(1,0,0)にもつ，半径a，断面半径b，循環Γの絡った2つの等し

い渦輪を考える。渦輪はそれ自身その面に垂直な方向に移動速度をもっている。そこで、この場合垂直な方向に移動速度をもっているからある時間たつと、非常に接近した部分が現れるであろう。このような状態において２つの渦輪は合体するか、通りぬけるか，不安定になるか興味ある問題である。

長さをaで，時間を$\pi b^2/\Gamma$で速さを$\Gamma a/\pi b^2$で，渦度を$\Gamma/\pi b^2$で規格化する。$b/a=0.1$，１つの渦輪を16に分割し，上述の状態を初期条件として行った計算結果を第３図に示す。$\Delta t=0.1$で$t=30$まで行ったが，$t=4$附近に「不安定」その後、いくつかのヴォートンの渦度が極端に大きくなる。第４図に(a)エンストロフィー (b)ヘリシティーの時間的変化が示してある。ヘリシティーは$t=4$まで大体一定である。

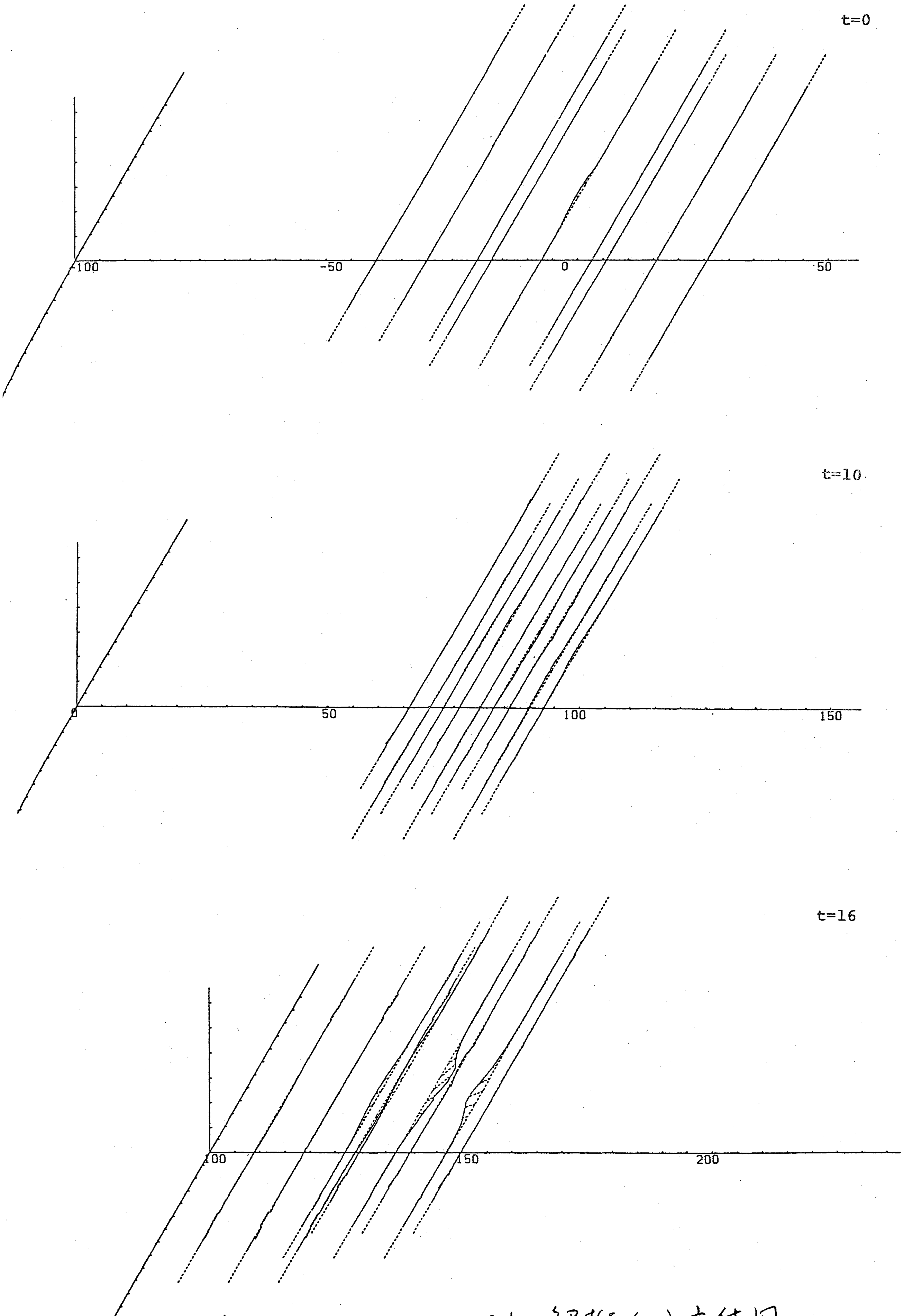
§５、むすび

この論文ではヴォートン力学の基礎方程式を、渦場を細胞に分割し、各細胞の特徴を代表点の位置，渦度，体積で表現できるとして近似し、連続体としての流体の方程式から導いた。例題として乱流境界層のバーストと絡った２つの渦輪の問題を取扱った。両者において渦のつなぎかえは起っていない。ヴォートンが近ずくと渦度が急速に大きくなり，不安定になる現象が起るように思われる。渦のつなぎかえは計算

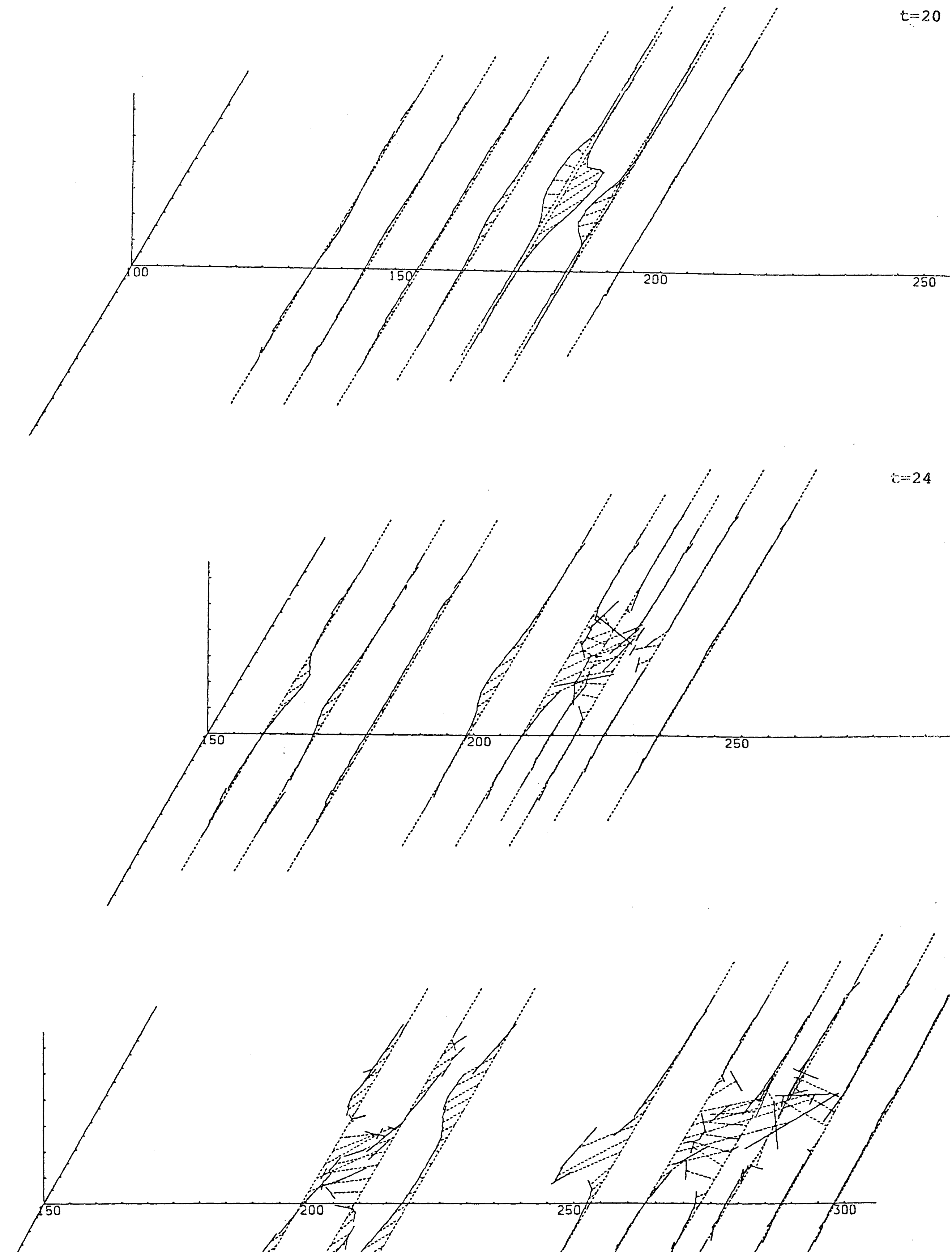
スキームに何らかの渦度の拡散の効果をとり入れねば表わせないように思われる。

参考文献：

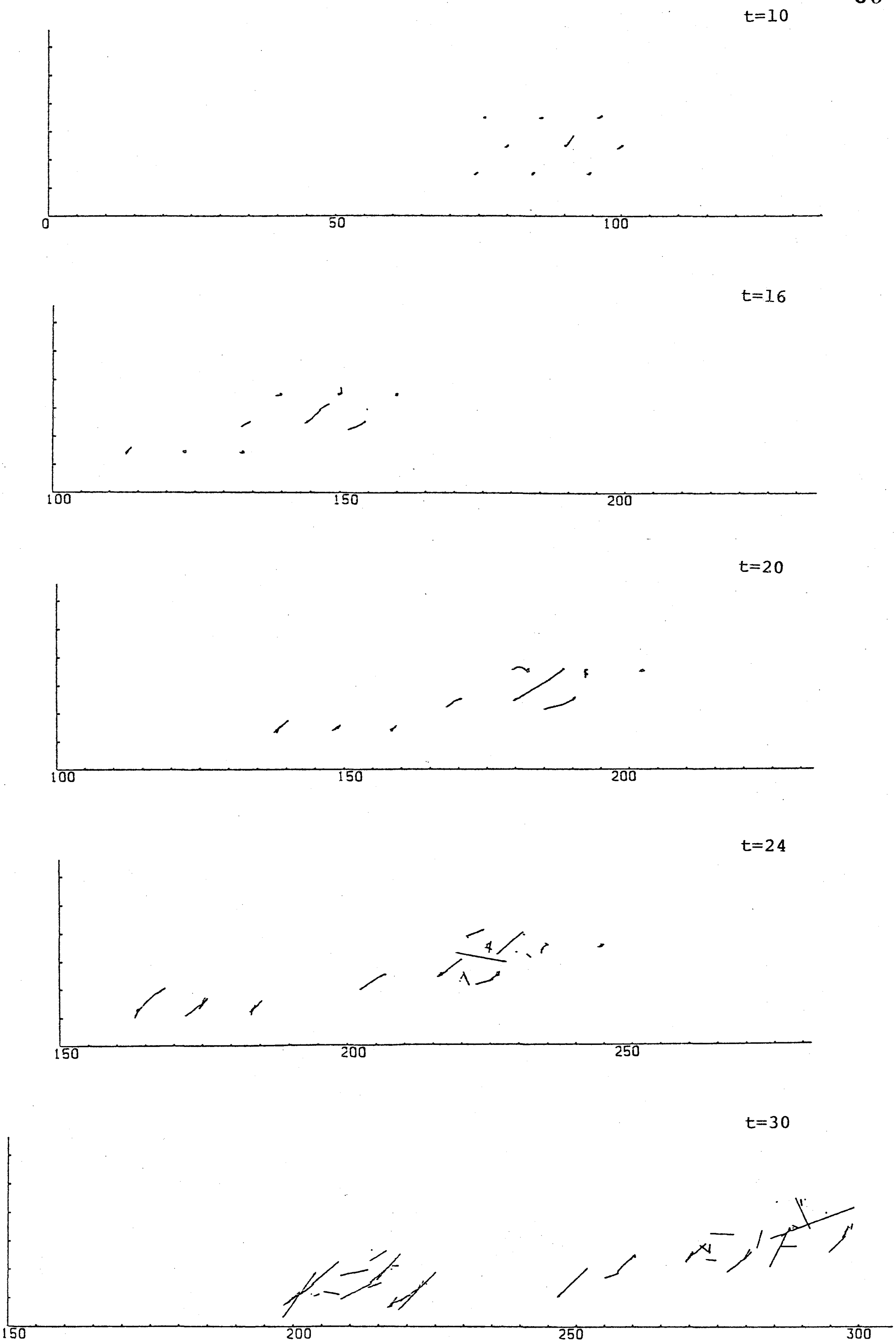
1) F. T. Beale & A. Majda: Math. Comp 39 (1982) I, 1-27: II, 29-52.
2) 桑原真二：日本流体力学会誌 2 (1983) 177-187.
3) E. A. Novikov: Sov. Phys. JETP 57 (1983) 566-569.
4) P. G. Saffman: Vortex interactions and coherent structures in turbulence, in Transition and Turbulence (1981, Academic Press) 149-165.



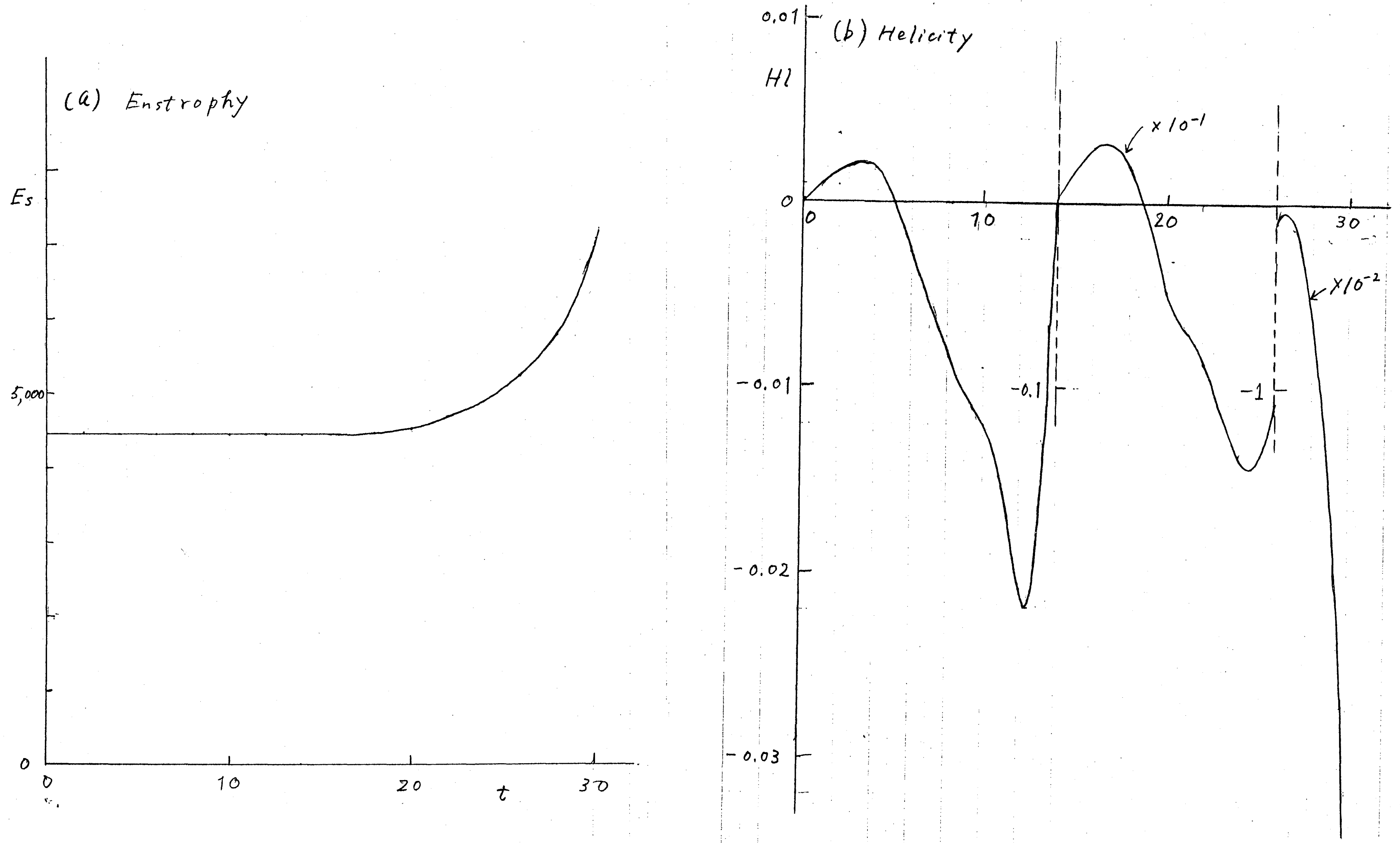
第1図 ヴォートンによるバーストの解析 (a) 立体図



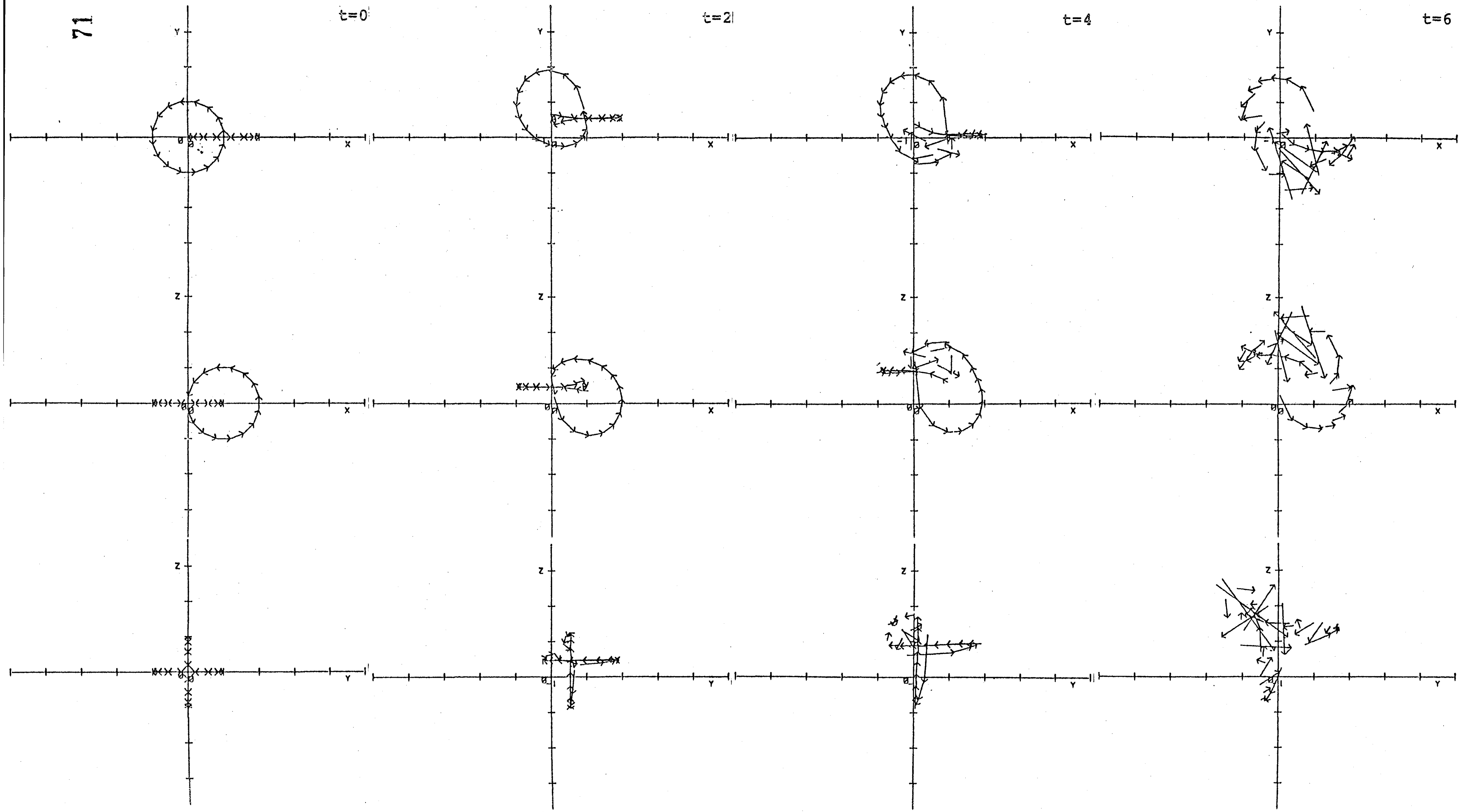
第1図 (a) 続き



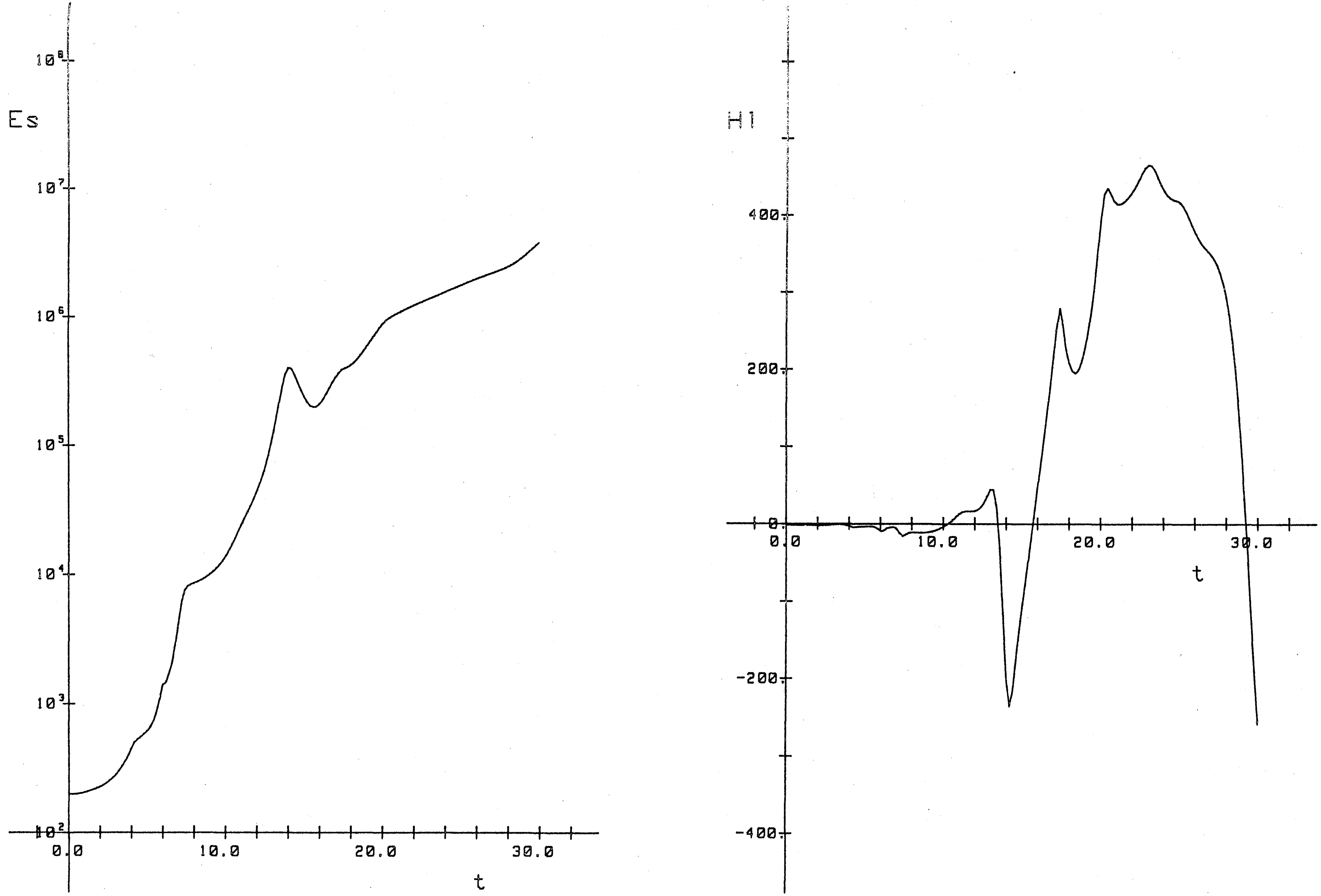
第1図　ヴォートンによるバーストの解析 (b) 側面図



第2図 バーストにおける (a) エンストロフィーと (b) ヘリシティーの時間的変化.



第3図. ヴォートンによる絡った2つの渦輪の解析



第4図．絡った2つの渦輪における(a)エンストロフィーと(b)ヘリシティーの時間的変化