

二次元ジェット・ウェイフの非線形安定性

相模工大情報	水島二郎	(Jiro Mizushima)
日本原研	藤村 薫	(Kaoru Fujimura)
岡大工	柳瀬真一郎	(Shinichiro Yanase)
京大教理研	後藤金英	(Kanefusa Gotoh)

§ 1. Introduction

自由シア一流、ジェット、ウェイフなどの自由流はかなり低いレイノルズ数で定常流が不安定となり非定常な流れが出現する。自由流中の擾乱波の発達過程や相互作用は実験的によく調べられている。特に自由シア一流に関しては遷移の各段階にわたって詳細な研究が行なわれている。¹⁾⁻²⁾ Miksad²⁾ によれば最終的には乱流状態となるが、遷移は比較のおだやかな例えば円管ポアズイユ流などに見られる様なバースト等の激しい乱れが生じる様な事はない様である。ジェット、ウェイフについても多くの実験が行なわれている。³⁾⁻⁵⁾ 特に、佐藤らによる研究⁵⁾では二次元ウェイフ中の遷移の初期段階における擾乱波の非線形相互作用がくわしく調べられていて、成長抑

制効果など興味深い現象が報告されている。色々な実験結果を見ると自由流は一般的に非線形性の急激な発達は少く、弱非線形理論を含む擾動展開で取り扱いの可能な現象を多く有していると考えられる。

ところが自由流の理論的取り扱いには深刻な困難が存在する。第一は定常解が厳密には求まらない点であって、近似解しか得られない。さらに定常流が非平行であるためその線形安定性の計算すら非常に困難で未だ決定的な結果が得られていない⁶⁾。従って非線形段階の理論的取り扱いには多くの仮定が必要で、ほとんどの解析が平行流近似に基づいている。自由シア一流については Schade⁷⁾ 以来かなり多くの研究が行われてきているが、ジェット、ウエイクについてはゲータ面上の計算があるだけである⁸⁾。一般的に非平行、非線形な流れを取り扱うためには元のナビエ・ストークス方程式を直接積分するしかないので、特に非平行流の安定性はこの方法によっても決して容易ではない。

本研究は、平行主流を仮定し弱非線形理論を使って二次元ジェットとウエイクを調べたものであって、臨界点だけでなく超臨界の状態についても計算を行った。

§ 2. 臨界点近傍での弱非線形理論

2-1. 線形理論

x 方向に流れる二次元平行流を考え主流を $U(y)$ とする。

$U(y)$ は無次元形で

$$\left. \begin{aligned} U(y) &= \operatorname{sech}^2 y && ; \text{ジェット} \\ U(y) &= 1 - e^{-y^2} && ; \text{ウェイフ} \end{aligned} \right\} (1)$$

であるとする。二次元擾乱の流れ関数を $\hat{\psi}(x, y, t)$ とすると $\hat{\psi}$ を支配する式は次の様になる。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{R} \Delta^2 - \left(U \frac{\partial}{\partial x} \Delta - U'' \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \Delta \right] \hat{\psi} \\ & = \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta \hat{\psi}, \end{aligned} \quad (2)$$

Δ は二次元ラプラシアン、 R はレイノルズ数である。境界条件は

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} = 0, \quad y \rightarrow \pm \infty \quad (3)$$

である。(2) 式 of 非線形項を無視して得られた線形擾乱方程式から線形安定性が計算される。結果を図 1 に示すが、臨界値は偶擾乱 $\hat{\psi}$ によって与えられる。中心の曲線は増幅率最大を示す。超臨界状態の最大増幅率を与える波数が臨界波数となり異なる点が注目される。臨界値は次の様である。

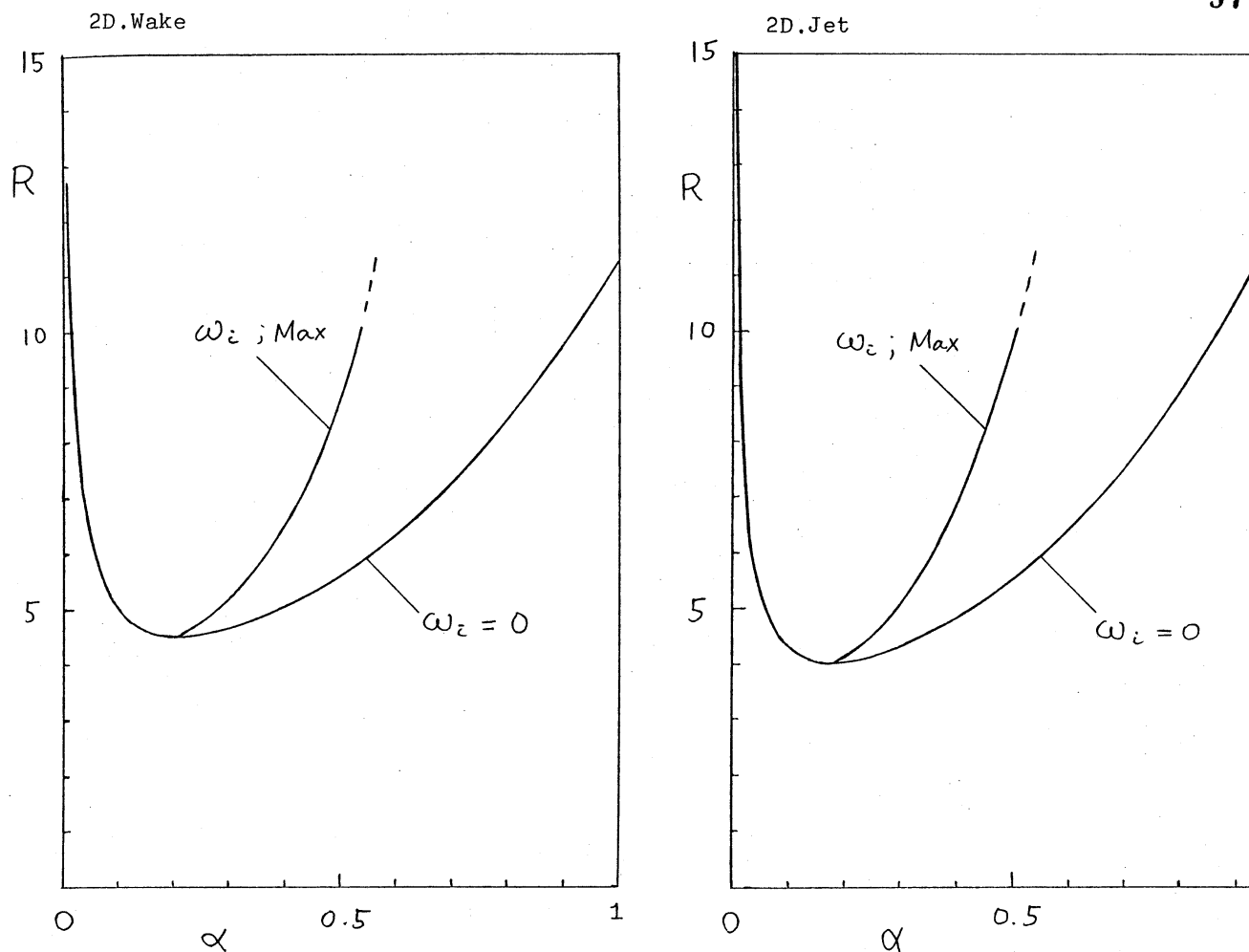


図 1

2D.ジェット $R_c = 4.017$, $\alpha_c = 0.174$, $C_r = 4.382 \times 10^{-2}$

2D.ウェイフ $R_c = 4.512$, $\alpha_c = 0.212$, $C_r = -4.808 \times 10^{-2}$

ここで α_c は臨界波数、 C_r はその波の位相速度である。

2-2. 弱非線形理論

次に臨界点付近での擾乱の基本波の複素振幅 A を定める方程式を求めるため、よく知られた弱非線形理論⁹⁾を利用する。

ψ_1 を流れ関数の基本波、 ψ_2 を倍波数の擾乱、 ψ_0 を主流の変形とし、 ψ_2 、 ψ_0 が非線形相互作用により基本波から作られると考え、さらに $\alpha = \alpha_c$ の近傍に波数の分布を取り入れると次

の様に展開される。

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \epsilon A \{ f^{(0)} + (\alpha - \alpha_c) f^{(1)} + \dots \} + \dots + \epsilon^3 A |A|^2 R^{(0)} + \dots, \\ \psi_2 &= \epsilon^2 A^2 f_2, \\ \psi_0 &= \epsilon^2 |A|^2 f_0. \end{aligned} \right\} (4)$$

ϵ は微小パラメータで $\sqrt{\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R}}$ に比例する。また $\alpha - \alpha_c \sim O(\epsilon)$ と仮定する。 $g^{(0)}$ を $f^{(0)}$ の随伴関数とすると、 $f^{(0)}$ 、 $g^{(0)}$ 、 f_2 、 f_0 、 $f^{(1)}$ の満たす方程式は次の様になる。

$$[(D^2 - \alpha_c^2)(D^2 - \beta_c^2) - i\alpha_c R_c \{ U(D^2 - \alpha_c^2) - U' \}] f^{(0)} = 0 \quad (5)$$

$$[(D^2 - \alpha_c^2)(D^2 - \beta_c^2) - i\alpha_c R_c \{ U(D^2 - \alpha_c^2) + 2U'D \}] g^{(0)} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [(D^2 - 4\alpha_c^2)(D^2 - \tilde{\beta}_c^2) - 2i\alpha_c R_c \{ U(D^2 - 4\alpha_c^2) - U'' \}] f_2 \\ = i\alpha_c R_c (f^{(0)'} f^{(0)''} - f^{(0)} f^{(0)'''}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$D^4 f_0 = i\alpha_c R_c (f^{(0)*} f^{(0)'} - f^{(0)} f^{(0)*'})'' \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [(D^2 - \alpha_c^2)(D^2 - \beta_c^2) - i\alpha_c R_c \{ U(D^2 - \alpha_c^2) - U'' \}] f^{(1)} \\ = iR_c \{ M_1 [f^{(0)}] - \Omega_1 (D^2 - \alpha_c^2) f^{(0)} \} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{E.L. } D = ' = \frac{d}{dy} \tau'$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_c &= \sqrt{\alpha_c^2 - i\omega_r R_c}, \quad \tilde{\beta}_c = \sqrt{4\alpha_c^2 - 2i\omega_r R_c} \\ \omega_r &= \alpha_c C_r \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \left(U + \frac{4\alpha_c}{iR_c} \right) (D^2 - \alpha_c^2) - 2\alpha_c^2 (U - C_r) - U'' \\ M_2 &= \left\{ 2 / (i\alpha_c R_c) \right\} (D^2 - 3\alpha_c^2) - (3U - C_r - 2\Omega_1) \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\Omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g^{(\omega)}(y) M_1[f^{(\omega)}] dy / \int_{-\infty}^{\infty} g^{(\omega)}(y) (D^2 - \alpha_c^2) f^{(\omega)}(y) dy \quad \left. \vphantom{\int_{-\infty}^{\infty}} \right\}$$

である。また、 $\tau = \epsilon^2 t$ 、 $\xi = \epsilon(x - \Omega_1 t)$ とすると A は次の方程式で支配される。

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \sigma A + i \Omega_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \lambda |A|^2 A, \quad (12)$$

係数 Ω_2 , λ は可解条件を用いて次の様に計算される。

$$\Omega_2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g_0(y) \{ \alpha_c M_2[f^{(\omega)}] + M_1[f^{(\omega)}] - \Omega_1 (D^2 - \alpha_c^2) f^{(\omega)} \} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} g_0(y) (D^2 - \alpha_c^2) f^{(\omega)}(y) dy} \quad (13-1)$$

$$\lambda = - \frac{i \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g_0(y) F(y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} g_0(y) (D^2 - \alpha_c^2) f^{(\omega)}(y) dy} \quad (13-2)$$

$$F(y) = f^{(\omega)*} (D^2 - 3\alpha_c^2) f_2' + 2 f^{(\omega)*} (D^2 - 3\alpha_c^2) f_2 - 2 f_2 f^{(\omega)*''''} - f_2' f^{(\omega)*''} - f^{(\omega)} f_0''' + f_0' (D^2 - \alpha_c^2) f^{(\omega)} \quad (13-3)$$

λ はランダウ定数で $\text{Re}(\lambda) < 0$ なら弱非線形問題が超臨界型、 $\text{Re}(\lambda) > 0$ なら亜臨界型である。

半領域の問題では (5) ~ (9) の解は問題なく求まるが、自由シラ一流に対しては (8) 式を解く時に $y = \pm \infty$ での境界条件を満たす解があることを Maslowe⁽¹⁰⁾ が示した。これは $U(\infty)$ キ $U(-\infty)$ であることに起因している。一方、ジェット、ウエ

イクでは $U(\infty) = U(-\infty)$ であるので困難は生じない。(8)より

$$\left. \begin{aligned} f_0(y) &= \int_0^y k(y) dy \\ k(y) &= \frac{1}{2\alpha R} \int_{-\infty}^y (f^{(\omega)+} f^{(\omega)'} - f^{(\omega)} f^{(\omega)+'}) dy \end{aligned} \right\} (14)$$

でこれから

$$f_0(\infty) - f_0(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} k(y) dy \quad (15)$$

となり、一般には $f_0(\infty) \neq f_0(-\infty)$ で主流の変形は有限の流量を持つ。方程式(7)、(9)を解く方法は2通りあり(Ⅰ)積分法、(Ⅱ)差分法と呼ぶことにし(7)式について説明する。

(Ⅰ)積分法

まず(5)式の解 $f^{(0)}$ の $y \rightarrow -\infty$ での漸近形を(7)式の右辺へ代入し、非同次解の漸近形を求める。得られた漸近形を使って $y = -Y_0$ から 0 まで積分を行ない非同次解 f_{2N} を求める。次に斉次解 f_{hom} を $y \rightarrow -\infty$ での漸近形

$$f_{hom}(y) \sim c_1 e^{2\alpha c y} + c_2 e^{\beta c y} \quad (16)$$

を利用して求める。 c_1, c_2 は $y = 0$ での条件

$$f_2(\infty) = f_2'(\infty) = 0 \quad (17)$$

から決定される。

(Ⅱ)差分法 (Maslowe¹⁰⁾ 1977)

領域を $-Y_0 < y < Y_0$ に限定して(7)式を差分形に直す。境界条件は $y = \pm Y_0$ で $f_2 = 0$ と置く。

計算結果は表1に示されている。積分法では $Y_0 = 50$ 、差

分法は $\gamma_0 = 60$ を採用した*。両者がよく一致する量もあれば、あまり一致のよくないものもあるが、両者の差は $\gamma_0 \rightarrow \infty$ でなくなると考えている。表1によると、ジェットもウエイクも $\text{Re}(\lambda) < 0$ で超臨界型であることがわかる。また表には載

表1.

	Integration Method	Finite Difference Method
2D. Jet		
Ω_1	1.14847(-1) -2.59453(-4)i	1.15247(-1) +2.57732(-4)i
Ω_2	5.21501(-1) -1.10189(-1)i	5.664056(-1) -8.74126(-2)i
λ	-4.30009(-2) +1.44389(-2)i	-4.29568(-2) +1.43574(-2)i
Wake		
Ω_1	-1.153683(-1) +2.191236(-3)i	-1.153452(-1) +2.187612(-3)i
Ω_2	-4.707086(-1) -7.454511(-2)i	-4.709581(-1) -7.457627(-2)i
λ	-6.278276(-2) -1.831739(-2)i	-6.261669(-2) -1.818468(-2)i

せているのがランダウ定数に対する寄与は主流の変形が約9割を占め、倍波数のそれはわずかである。

2-3. 側帯波不安定

ジェットもウエイクも $\text{Re}(\lambda) < 0$ だから (12) 式は $A = A_0 e^{i\lambda t}$ の解を持ち、これは超臨界の平衡状態として平面変調波解が存在することを示している。しかしこの解は変調波の側帯波

*ウエイクに対する計算は $R = 4.5148$, $\alpha = 0.20$ で行った。

の擾乱に対し不安定となる場合がある。これは Side Band Instability と呼ばれる波の不安定現象の一例であって、Newell¹¹⁾, Stuart & DiPrima¹²⁾ らによつて流体の超臨界状態に適用された。この安定性は2つのパラメーター

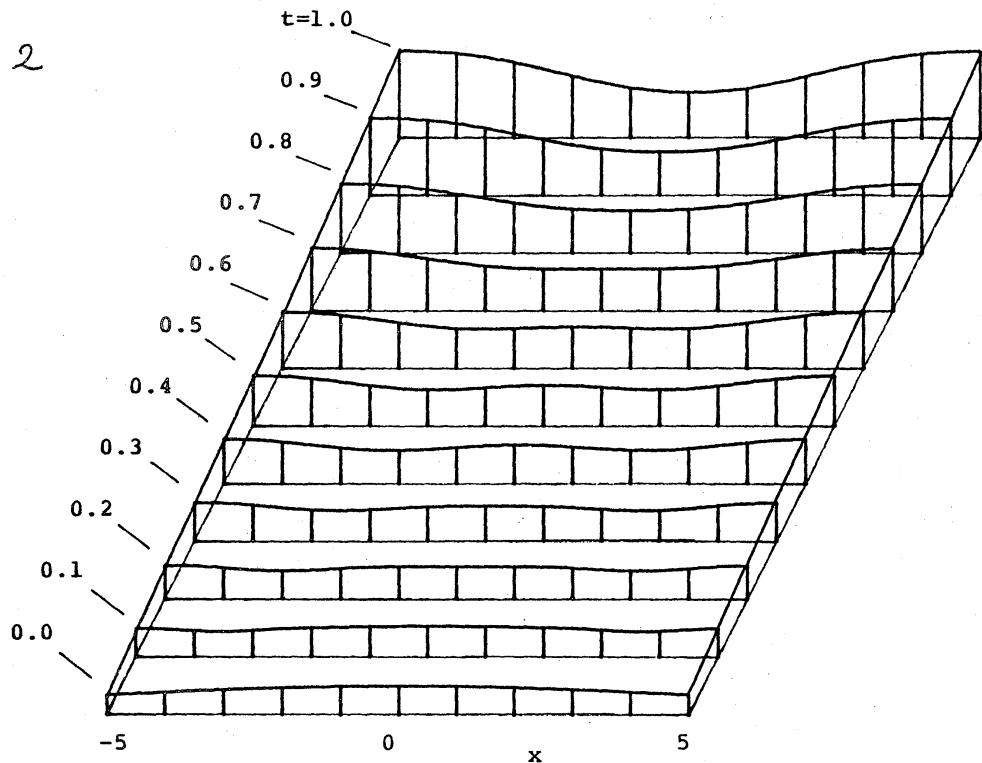
$$d = \text{Im}(\lambda) / \text{Re}(\lambda), \quad \ell = -\text{Re}(\Omega_2) / \text{Im}(\Omega_2) \quad (18)$$

で決定され

$$d\ell < -1 \quad (19)$$

の時不安定であることが知られている¹²⁾。表1のデータから、ジェット、ウェイクともに Side Band Instability を生じることがわかる。(12)式とよく似た非線形シュレディンガー方

図2



程式が Side Band Instability を起こすと突っ立ち現象を起
こすことが知られている。そこでこの場合についての (12) 式
の教値積分をジェットの臨界点で行った。境界条件は周期境
界条件で、初期条件は一つの例として

$$A(\xi, 0) = \exp(-0.2\xi^2 / (1 + \delta_a)), \quad \delta_a = -0.3309$$

である。t=0 から 1 まで |A| の変化を図 2 に示した。この
計算内では急激な突っ立ちは起こらない様に思われるが、最
終的な状態は未だ確定できない。最近この方程式に対する厳
密解が得られていて、¹³⁾ それの占める位置が注目される。

§ 3. 超臨界状態の考察

前節の結果は $(R - R_c) / R_c$ による展開を基にしたものである
が、R が R_c に近くなる時は正当化されない。異、た近似法と
して藤本、¹⁴⁾ 角谷による中立点からの展開、Mizushima & Gotsh
¹⁵⁾ による増幅率による展開もあるが、今回は Herbert ¹⁶⁾ によ
て整理された振幅展開法に従って計算を行う。

流れ角教の境乱 $\hat{\psi}(x, y, t)$ を次の様に展開する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi}(x, y, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(\xi, y, t) E^n \\ E &= e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad \psi_{-n} = \psi_n^* \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\psi_1 = A \phi_{11} + \frac{\partial A}{\partial \xi} \phi_{12} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \phi_{13} + A|A|^2 \phi_{14} + \dots \quad \left. \right\} (21)$$

$$\psi_0 = |A|^2 \phi_0, \quad \psi_2 = A^2 \phi_2 \quad \left. \vphantom{\psi_0} \right\} (21)$$

ただし、 ξ は v を波束の群速度として

$$\xi = x - vt \quad (22)$$

で与えられる。さらに A の変化を

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sigma A + \lambda_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \lambda_3 |A|^2 A \quad (23)$$

と仮定して、(20) ~ (21) を (2) に代入する。

$\phi_1 \rightarrow f^{(\omega)}$, $\phi_2 \rightarrow f^{(\omega)}$, $\phi_0 \rightarrow f_0$, $\phi_2 \rightarrow f_2$ とすると、 $f^{(\omega)}$, $f^{(\omega)}$, f_2 の満たす式はそれぞれ (5), (9), (7) 式の C_r を、 $C_r + iC_i$, $\alpha_c \leq \alpha$, $R_c \leq R$, $\beta_c \leq \beta$, $\tilde{\beta}_c$ を $\tilde{\beta}$ に変更した式になる。ただし

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{\alpha^2 - i\omega R}, & \tilde{\beta} &= \sqrt{4\alpha^2 - 2i\omega R} \\ \omega &= \omega_r + i\omega_i = \alpha(C_r + iC_i) \end{aligned} \right\} (24)$$

である。 f_0 は次の式により決定される。

$$(D^2 - 2\omega_i R) Df_0 = i\alpha R (f^{(\omega)*} f^{(\omega)'} - f^{(\omega)} f^{(\omega)*'})', \quad (25)$$

(23) 式の係数は

$$\lambda_2 = iR_2, \quad \lambda_3 = \lambda$$

で、 R_2 は (B-1) 式で $\alpha_c \rightarrow \alpha$, $C_r \rightarrow C_r + iC_i$ とした式で計算される。一方、ランダウ定数 λ_3 は ϕ_{14} の満たす式から求まる。 ϕ_{14} の式は次の様になる。

$$\begin{aligned}
 & [(D^2 - \alpha^2)(D^2 - \tilde{\beta}^2) - i\alpha R \{U(D^2 - \alpha^2) - U''\}] \phi_{14} \\
 & = \lambda_3 R (D^2 - \alpha^2) f^{(0)} + i\alpha R F(y) \quad - (26) \\
 & \tilde{\beta} = \sqrt{\alpha^2 - i(\omega + 2i\omega_c)R}
 \end{aligned}$$

== \tau'

$$\phi_{14} = -\frac{\lambda_3}{2\omega_c} f^{(0)} + \chi \quad (27)$$

表2

2D, Jet

R	7	10
α	0.40	0.50
$c_r + ic_i$	0.15206 +5.5970(-2)i	0.2092 +8.92547(-2)i
Ω_2	0.38477 -0.34373i	0.30022 -0.33328i
λ	-0.24474 -6.4960(-3)i	-0.41717 -1.1321(-2)i
d	0.02654	0.02714
l	1.119	0.9008

2D, Wake

R	7	10
α	0.43	0.54
$c_r + ic_i$	-0.14140 +4.7269(-2)i	-0.19856 +8.5062(-2)i
Ω_2	-0.36918 -0.30894i	-0.27726 -0.31456i
λ	-0.29680 +1.8734(-3)i	-0.50457 +2.4483(-3)i
d	-0.006312	-0.004852
l	-1.195	-0.8814

と置くこ

$$\phi_{14}(0) = 0, \quad f^{(0)}(0) = 1$$

より

$$\lambda_3 = 2\omega = \chi(0) \quad (28)$$

が得られる。ジェット、ウェイワの起臨界状態の $R=7, 10$ の場合の増幅率最大の点において Ω_2, λ を求めると表2の様になった。結果は平衡振幅が存在することを示している。さらに平面変調波解の Side Band に対する安定性は表2の d, λ を見ればわかる様にジェット、ウェイワともに安定となった。これには最大増幅率を与える波数が臨界波数とかなり異なり、この点の影響も考えられるが詳細は今後の研究の課題である。

References

- 1) F. K. Browand: 1966, J. Fluid Mech. 26, 281.
- 2) R. W. Miksad: 1972, J. Fluid Mech. 56, 695.
- 3) H. Sato: 1960, J. Fluid Mech. 7, 53.
- 4) H. Sato: 1971, J. Fluid Mech. 44, 741.
- 5) 佐藤浩、斎藤博之助、本橋龍郎: 1975, 数理研講究録 NO.244.
- 6) 藤村薫: 1984, 「なが水」3, 94.
- 7) H. Schade: 1964, Phys. Fluids 7, 623.
- 8) H. Niino: 1982, J. Meteor. Soc. Jpn. 60, 1001.

- 9) K. Stewartson and J. T. Stuart: 1971, J. Fluid Mech. 48, 529.
- 10) S. A. Maslowe: 1977, J. Fluid Mech. 79, 689.
- 11) A. C. Newell: 1974, Lect appl. Math. 15, 157.
- 12) J. T. Stuart and R. C. DiPrima: 1978, Proc. Roy. Soc. Lond. A.362, 27.
- 13) K. Nozaki and N. Bekki: 1984, J. Phys. Soc. Jpn. 53, 1581.
- 14) 藤本悟、角谷典彦: 1977, 教理研講究録 NO.298.
- 15) J. Mizushima and K. Gotoh: 1983, J. Phys. Soc. Jpn. 52, 1206.
- 16) T. Herbert: 1983, J. Fluid Mech. 126, 167.