数理解析研究所講究録
第539巻 1984年 108-118

平面 Poiseuille 流における攪乱の増幅・減衰過程の数値計算

京都工繊大・機械　徳永　宏
(Hiroshi TOKUNAGA)
宮川　浩
(Hiroshi MIYAGAWA)

§1. 緒言

平行二平板間の乱流の Large Eddy Simulation は、Deardorff[1] の先駆的研究を受けついで、Moin & Kim[2] により大規模な数値計算が遂行され、大きな成果を挙げている。日本においても Horiuti & Kuwahara[3] 及び Kawamura et al.[4] により、乱流の Large Eddy Simulation が実行されている。しかし、精度の高い数値計算は、未だ報告されていない。本研究は、正確な乱流の数値計算の前段階として、平行二平板間の Poiseuille 流に加えられた、攪乱の増幅・減衰過程を直接数値計算で研究し、数値計算方法の有効性を検討する目的でなされた。

平行二平板間の Poiseuille 流の攪乱に対する安定性の研究

は，対象を固有値問題に帰着して解く方法が Shen[5] 及び Thomas[6] により実行され，直接数値計算により研究する方法が George & Hellmus[7]，Orszag & Kells[8] により行なわれている。 また，Nishioka et al[9] の実験，Itoh[10] による理論研究もある。

本研究では，流れ方向にはスペクトル法，スパン方向には修正微分求積法（MDQ 法）を用い，時間積分には四次精度の Runge-Kutta-Gill 法を採用し[11]，Poisson 方程式は，直接解法で解き、高精度の平面 Poiseuille 流の線型及び非線型安定性の直接数値計算を行った。

§2. 数値計算方法

２Ｄの無次元化した Navier-Stokes 方程式において，流速及び圧力分布を

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\approx}{v}(x,y,t) &= U(y)\,\underset{\approx}{i} + \sum_{n=-N}^{N} \hat{\underset{\approx}{v}}_n(y,t)\exp[in\alpha x]\,,\\
p(x,y,t) &= P(x) + \sum_{n=-N}^{N} \hat{p}_n(y,t)\exp[in\alpha x]\,,\\
U(y) &= 1 - y^2,
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

とし，線型安定性の計算には，第１及び第２式の第２項で，

$n=\pm1$ のみをとり、非線型の安定性の場合には、(2.1) をそのまま用いる。 境界条件は

$$\hat{\underset{\approx}{v}}_n(\pm1) = 0, \tag{2.2}$$

であり，圧力に対する Poisson 方程式及び境界条件は，Navier-Stokes 方程式から決定される。 なお、壁付近 ($y=\pm1$) に格子を集中させるために、座標変換

$$y = \tanh[\eta\tanh^{-1}a] , \tag{2.3}$$

を行なった。 格子の分布は、格子数32の場合が図1に示されている。

y 方向の離散化には，MDQ法を採用した。 ただし，MDQ法の次数は5であり，精度は4次である。 また，時間積分には，RKG法を用いた[1]。 圧力に対するPoisson方程式の解法は，2次精度で行なったが，現在は4次精度のものを使っている。

§3. 線型安定性の直接計算

数値計算方法の有効性を検討するために，先ず線型安定性の直接数値計算を行なった。 撹乱が減衰する場合の例として，Reynolds数 Re が 2,000 で撹乱の波数 α が 0.84 の場

合を選んだ。 なお、座標変換(2.3)のため、計算パラメータ Re 及び α は、実際の値より大きく取られている。

図2は、横軸に αx、縦軸に y をとり、加えられた攪乱の x 軸方向の流速分布を、時刻 $t=0$、10及び30で示している。初期に与えられた攪乱が、遷移状態を経て、減衰振動の分布に発達する様子が良く示されている。

図3は、$t=0$ で攪乱の x 軸方向の速度が最大の値となる y の位置での、$x=0$ における流速の値を時間的に追跡した結果を示す。 遷移状態を通過して、完全な減衰振動に発達する様子が正確に示されている。

次に、攪乱が増幅する場合の例として、Reynolds 数が 10,000 で、攪乱の波数が 1 の場合の計算を行った。図4及び図5は、その結果を示す。 図2及び図3の時と同様に、座標変換(2.3)を考慮して、Re 及び α の値が決められている。

図4は、時刻 $t=10$ 及び 80 での、x 軸方向の攪乱の流速分布を示しているが、$t=10$ に示される遷移状態を通過して、$t=80$ に見られる、完全な増幅振動の速度分布が実現される。

図5は、図3と同じく、攪乱の $x=0$ での振幅を横軸に時間をとって、その変化を描いている。 攪乱が、増幅振動

の形に発達する様子が正確に示されている。

図6は、Thomas[6]の数値計算の結果を、著者が独自に図に示したものであるが、図4の $t=80$ での分布と、位相差を除いて、正確な一致を示す。

表1は、本研究と他の研究を比較したものである。振動数は、非常に精度よく一致するが、増幅率及び減衰率については、未だ誤差が見られるようである。

§4. 非線型安定性の直接数値計算

非線型安定性の数値計算は、現在迄の所、$N=2$ のときの計算が遂行された。攪乱が減衰する場合の例として、Reynolds 数が 2,000 で攪乱の波数が 1、振幅が 0.1 の場合の計算を行った。結果が、図7及び図8に示されている。図7は、攪乱の $x=0$ での振幅を描いたものであるが、減衰振動の様子が見られる。比較的初期の段階は、攪乱が非線型であることを反映して、減衰がゆるやかになっているようである。図8には、攪乱の最大振幅の時間変化を、波数1の Primary Mode と、2倍の波数の Harmonic Mode に分けて、描いた。Harmonic Mode は、$t=50$ 付近で減衰してなくなり、以後、攪乱は線型の振る舞いをすることになる。

次に、Orszag & Kells[8] と同一の計算を実行した。即ち、Reynolds 数は、2935 で、攪乱の波数は、1.3231 とし、攪乱の振幅は、0.108 に取り、非線型安定性の直接数値計算を行った。図9及び図10が、計算結果である。図9から、わずかに攪乱が増幅しながら振動する様子がうかがわれるが、未だ決定的な結果ではない。図10は、Primary Mode と Harmonic Mode の時間変化を描いたものである。ただし、各 Mode の最大振幅をその対象とした。前者はゆるやかな増幅傾向を示し、後者は、少し波うちながら、一定の値を維持している。

§5. 結論

平面 Poiseuille 流に加えられた攪乱の安定性の新しい、高精度の直接数値計算方法を提案し、線型及び非線型の安定性の問題にこの方法を適用したところ、線型の場合には、その有効性が確認され、非線型の場合にも、有効性が認められた。この方法を拡張して、乱流の Large Eddy Simulation を実行する研究が、現在進行中である。

謝辞

本研究の遂行にあたり、ご援助いただいた、京工繊大・機械の里深信行教授に感謝の意を表します。 また、貴重な助言とご援助をいただいた、京大・理の巽友正教授、京大・数理解析研究所の後藤金英助教授にも感謝の意を表します。

参考文献

1) Deardorff, J.W., J. Fluid Mech. **41**(1970), 453.
2) Moin, P. & Kim, J., J. Fluid Mech. **118**(1982), 341.
3) Horiuti, K. & Kuwahara, K., Proc. 8-th Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.(1982).
4) Kawamura, T., Takami, H. & Kuwahara, K., Proc. 9-th Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.(1984).
5) Shen, S.F., J. Aero. Sci. **21**(1954), 62.
6) Thomas, L.H., Phys. Rev. **91**(1953), 780.
7) George, W.D. & Hellumus, J.D., J. Fluid Mech. **51**(1972), 687.
8) Orszag, S.A. & Kells, L.C., J. Fluid Mech. **96**(1980), 159.
9) Nishioka, M., Iida, S. & Ichikawa, Y., J. Fluid Mech. **72** (1975), 731.
10) Itoh, N., J. Fluid Mech. **82**(1977), 455.
11) Satofuka, N., Proc. Int. Symp. Appl. Math. Inf. Sci., Kyoto Univ., (1982).

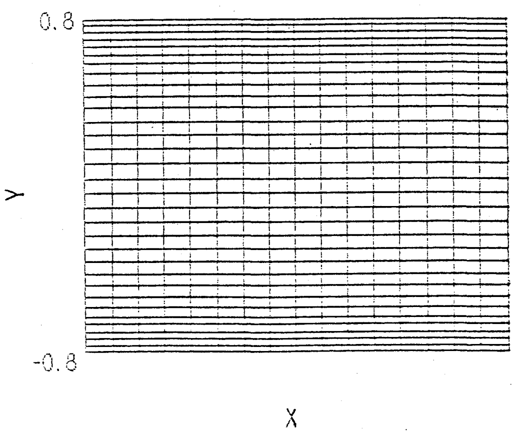
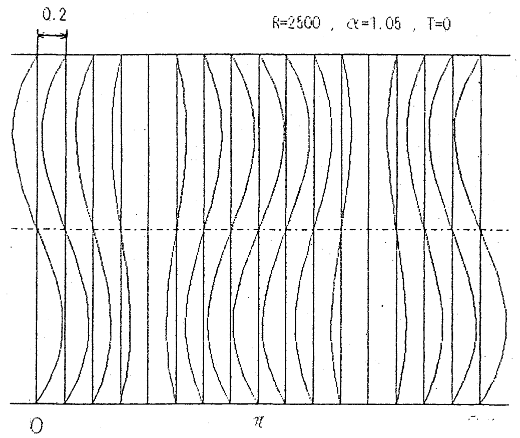


図1. 座標格子



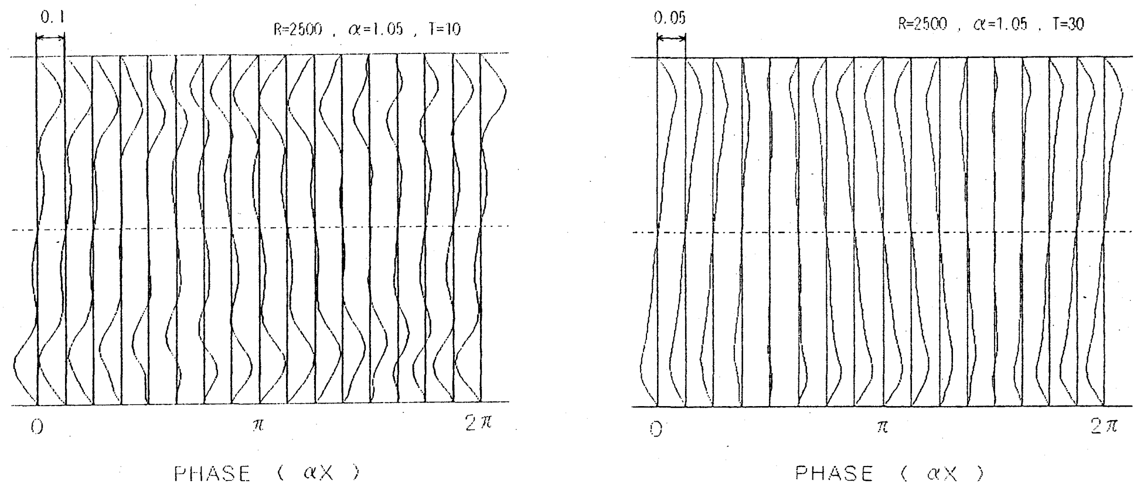


図2. 減衰擾乱の流速分布

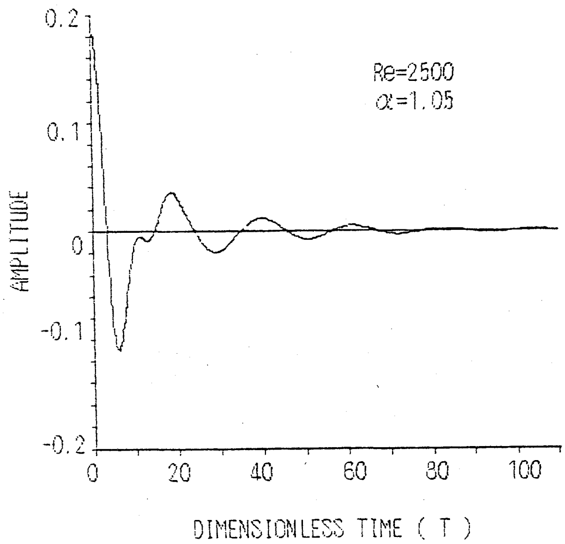


図3. 減衰擾乱の振幅の時間変化

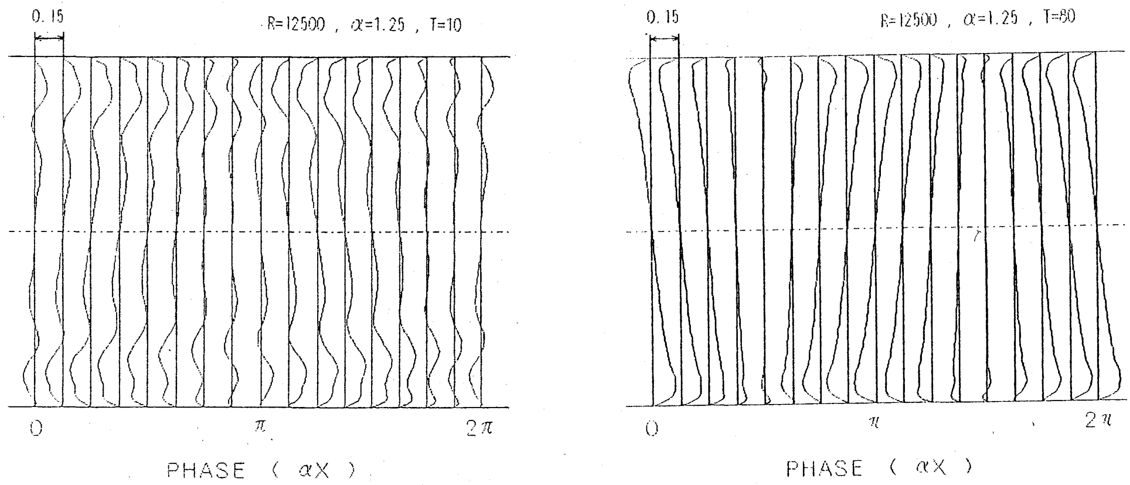
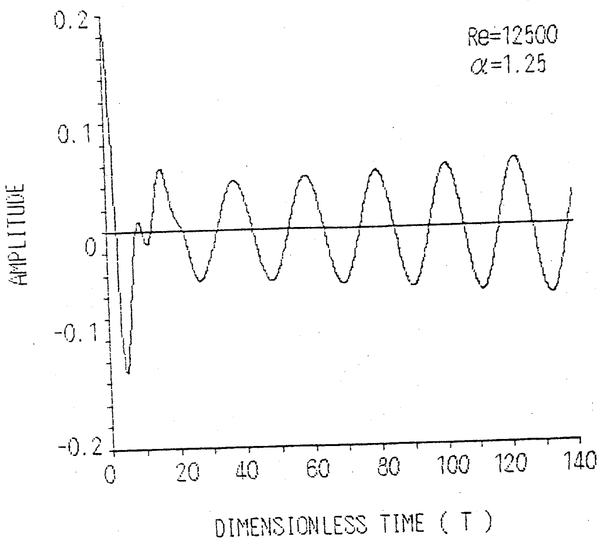


図4. 増幅攪乱の流速分布



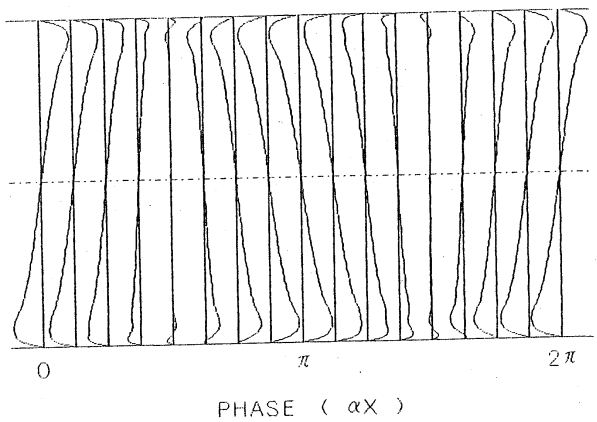


図6. Thomas の結果

図5. 増幅攪乱の振幅の時間変化

	R	α	c_i	c_r
本研究	2000	0.84	-0.036	0.2345
THOMAS	2500	0.9	-0.0212	0.2857

	c_i	c_r
本研究	0.00289	0.23738
THOMAS	0.0037	0.2375
GEORGE, HELLUMS	0.003758	0.2374

表1. 本研究と他の研究の比較

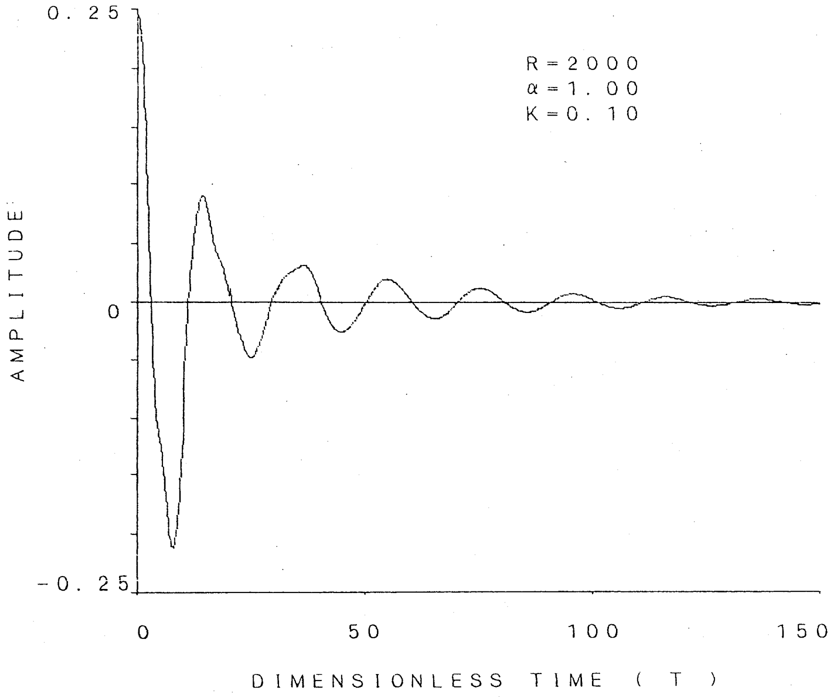


図7. 非線型減衰撹乱の振幅の時間変化

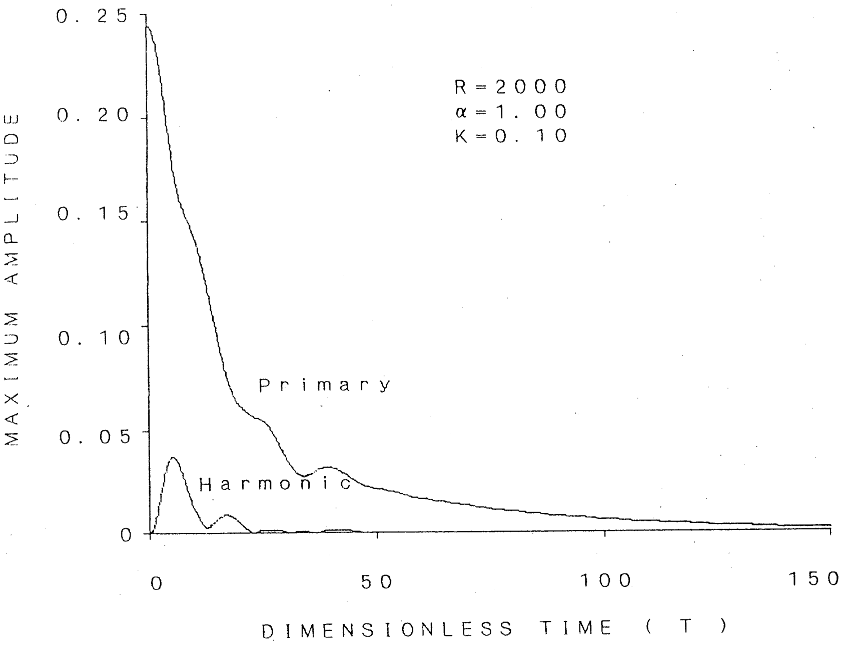


図8. 非線型減衰撹乱の最大振幅の時間変化

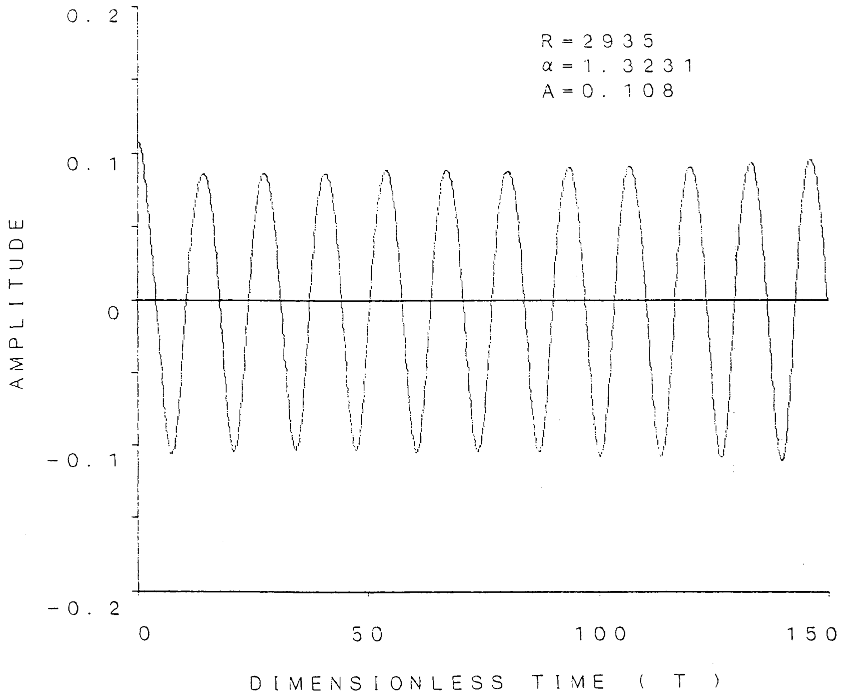


図9. 非線型攪乱の振幅の時間変化

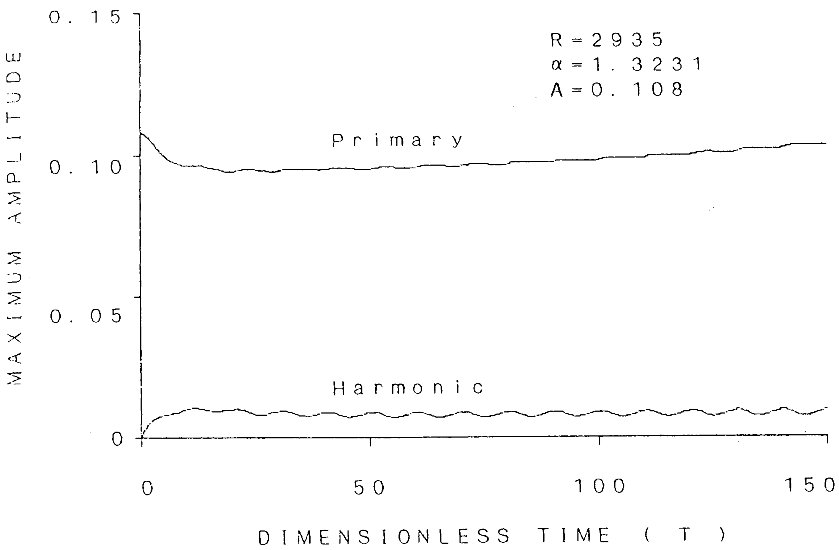


図10. 非線型攪乱の最大振幅の時間変化