

二, 三の新しいタイプの Moffatt 渦

名大・工 金田行雄 (Yukio Kaneda)

§1. 固有の長さを持つ Moffatt 渦

くさび形領域で起きる粘性流として「Moffatt 渦」あるいは「Moffatt の流れ」と呼ばれるものがある。それは壁が静止しているにもかかわらず領域内で流れがあり、しかも閉じた流線(渦)が頂角に向かって無限個続くものである。

(Moffatt (1964), 今井 (1973))

この流れの特徴の一つはその自己相似性、すなわち無限個続く渦の形が互いに相似であることである。このことは流れの関数 ψ が $\psi \sim r^\lambda f(\theta)$ の形の相似解であることに対応している。ここで (r, θ) は頂角を原点とする平面極座標である。この相似性は方程式 ($\Delta^2 \psi = 0$) と境界条件が長さの変換に対して不変であることに由来しており、その不変性は方程式と境界条件に座標 r 以外に固有の長さが無いことに基づいている。

それでは方程式あるいは境界条件に座標以外の流れに固

有の長さを含む場合にも相似な渦列が存在し得るのであるか？ §2ではそのような固有の長さをもつ場合の最も簡単な例として (1) 振動流と (2) 多孔性媒質中の流れ について述べる。この場合容易に分かるように頂角 θ_0 が 0 でない場合 $\psi \sim r^\lambda f(\theta)$ の形の相似解は存在し得ない。しかし $\theta_0 \rightarrow 0$ の極限としての平行二平板間では相似な渦列が存在し得ることが分かる。§3では方程式が固有の長さをもつ場合の一つである回転円筒内の流れについて述べる。ここでは結び目のある相似な渦列が適当な条件下であり得ることが示される。

§ 2-1. 平行二平板間の振動流

$y = \pm a$ にある平行二平板間で周期 ω で振動している流れに対して $\psi \sim e^{i\omega t} \varphi(x, y)$ とおくと φ は

$$\nu \Delta^2 \varphi - i\omega \Delta \varphi = 0, \quad (1)$$

及び粘着の条件

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = \pm a, \quad (2)$$

を満足す。ここで x は平板に平行な座標である。この流れは ν, a 以外に流れに固有の長さ $\sqrt{\nu/\omega}$ を持っている。

$\varphi \sim e^{-k|x|} f(y)$ とおき対称性 $f(y) = f(-y)$ を仮定

すると, (1) を満たす f は d_1, d_2 を適当な定数として

$$f(y) = d_1 \cos ky + d_2 \cos \beta y \quad (3.a)$$

$$\beta^2 a^2 \equiv k^2 a^2 - i\omega', \quad (\omega' \equiv \omega a^2 / \nu) \quad (3.b)$$

で与えられ, これが (2) を満たす自明でない解を持つためには ka ($\equiv \zeta = \xi + i\eta$) は特性方程式

$$\Phi_\omega(ka) = \beta a \cdot \cos ka \cdot \sin \beta a - ka \cdot \sin ka \cdot \cos \beta a = 0, \quad (4)$$

を満たさなければならぬ。

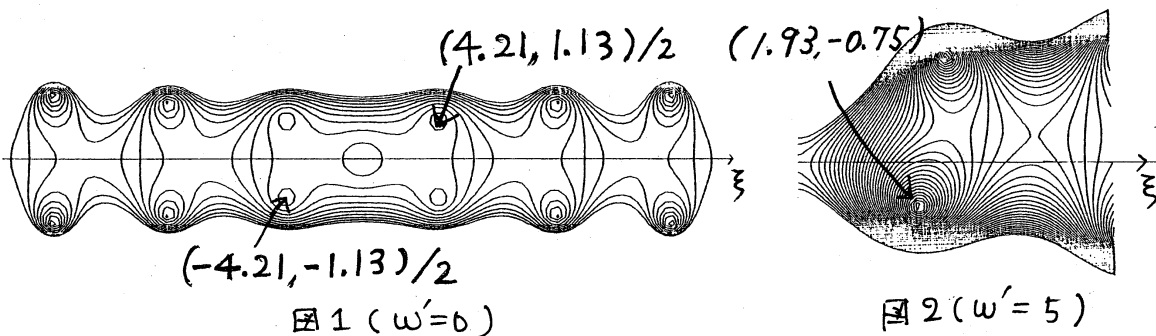
定常流 ($\omega = 0$) の場合には $ka \equiv \zeta$ は (4) の代りに

$$\Phi_0(ka) = 2ka + \sin 2ka, \quad (5)$$

を満たさなければならず, その根のうちで実部 ξ が正で最小のもの ζ_1 は $2\zeta_1 \doteq 4.21 + 2.26i$ であることが知られている。

(Moffatt (1964)). (4), (5) は超越方程式である。例として

$\omega' = 0$ (式(5)), と $\omega' = 5$ のときの Φ の絶対値 $|\Phi|$ の ζ 面での等高線を図示すると各々下図 1, 2 のようになる。



(図1, 2のスケールは同じではない。また等高線は原点について対称なので図2では右半面($\xi > 0$)のみを示した。) 図2でも分かるように $\omega \neq 0$ の場合, 根の分布は実軸(ξ 軸)に対して対称ではない。

ω' を 0 から増していくと ξ_1 は右図 A から図のように移動する。

$\omega \rightarrow \infty$ では skin depth $\sqrt{\nu/\omega} \rightarrow 0$ となり完全流体の解 ($\Delta\psi = 0, \psi = 0$ on $y = \pm a, \xi_1 \rightarrow \pi/2$) に近づく。

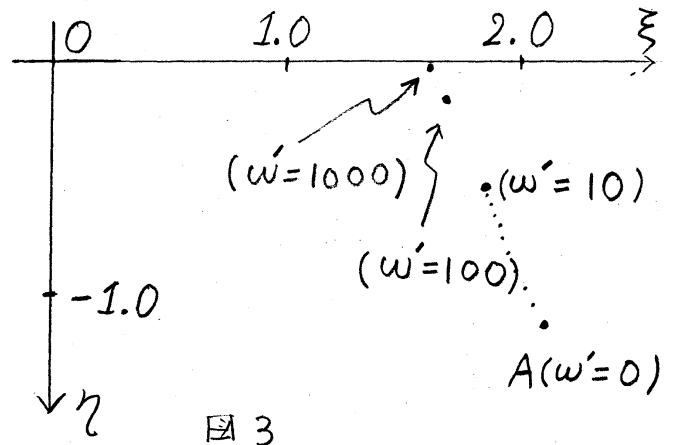


図3

§2-2. 二平板間の Brinkman の流れ

多孔性媒質中の流れの近似として Brinkman の近似

$$\nu \Delta \mathbf{v} - \nabla p - \alpha \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

が良く知られている。ここで α は媒質の抵抗を表わすパラメータであり, この流れは固有の長さ (shielding length) $\sqrt{\nu/\alpha}$ を持っている。流れの関数 ψ を $\psi \sim e^{-k|\xi|} f(y)$ とし, 対称性 $f(y) = f(-y)$ を仮定すると前節と同じ境界条件のもとで同じようにして $\xi = ka$ に対する特性方程式 (4)

を得る。ただし、ここで (3.6) の代りに

$$\beta^2 a^2 = k^2 a^2 - \alpha', \quad (\alpha' \equiv \alpha a^2 / \nu) \quad (7)$$

である。この場合根の分布は実軸に対して対称であり、 α' が 0 から増して行くとき、($\eta > 0$ とする) は右図の A から B のように移動して α' が 9.5 以前で実軸に達する。

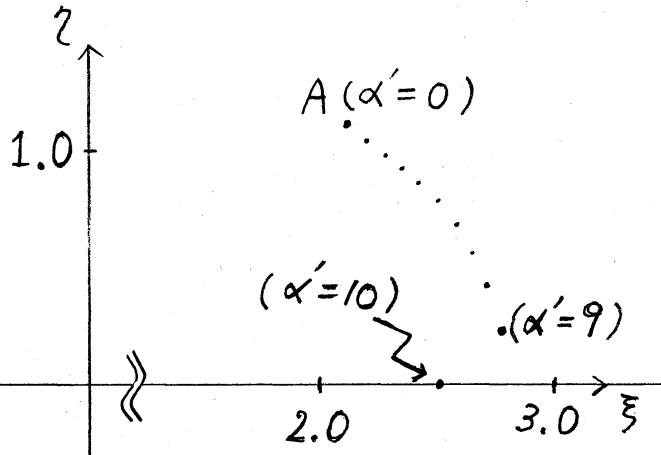


図 4

例として $\alpha' = 9.0$ と $\alpha' =$

9.5 の場合の $|z|$ の等高線 (右半面 ($\xi > 0$) のみ) を図示すると各々図 5, 6 のようになる。

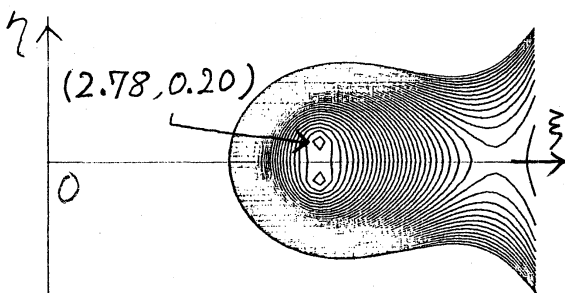


図 5 ($\alpha' = 9.0$)

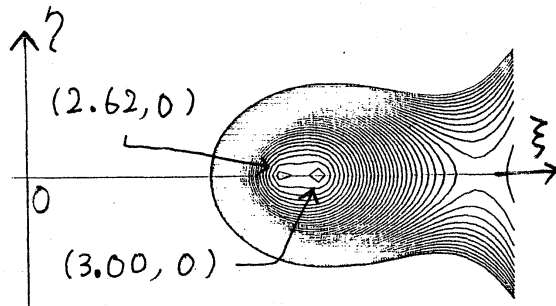
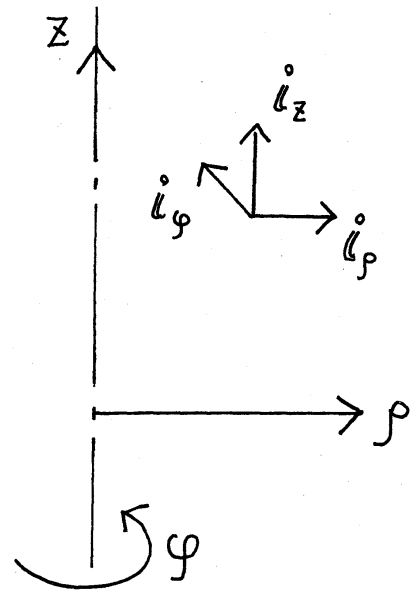


図 6 ($\alpha' = 9.5$)

§3. 回転円筒内の結び目のある流れ

軸対称な流れを考える。

対称軸を z 軸にとり、図のように円筒座標 (z, ρ, φ) をとる。又、 $(\hat{i}_z, \hat{i}_\rho, \hat{i}_\varphi)$ は各々 (z, ρ, φ) 方向の単位ベクトルとする。良く知られたように非圧縮な軸対称場 \mathcal{V} は一般に



$$\begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{V}_T + \mathcal{V}_P, & (8) \\ \mathcal{V}_T = \frac{B}{\rho} \hat{i}_\varphi, \\ \mathcal{V}_P = \nabla \times \left[\frac{A}{\rho} \hat{i}_\varphi \right] = \hat{i}_z \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho} \right] + \hat{i}_\rho \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial z} \right], \end{cases}$$

ここで $A = A(z, \rho)$, $B = B(z, \rho)$, のように表わされる。toroidal 成分 \mathcal{V}_T は φ 方向, poloidal 成分 \mathcal{V}_P は子午面内の方向を持ち, \mathcal{V} の流線は一般にらせん的に存る。

回転系での粘性流体の運動は慣性項を無視すると,

$$-\nabla p - \Omega \hat{i}_z \times \mathcal{V} + \nu \Delta \mathcal{V} = 0, \quad (9)$$

の形の式に従う。ここで Ω は回転の効果を表わすパラメータである。この流れは固有の長さ $\sqrt{\nu/\Omega}$ をもっている。

(9)式の curl をとって, 圧力を消去すると若干の計算

のち,

$$\begin{aligned}
 & -\Omega \times \left\{ u_\phi \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B}{\rho} \right) \right) + u_\rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{A}{\rho} \right) + u_z \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial z} A \right) \right\} \\
 & + \nu \left\{ u_\rho \left(-\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E} \left(\frac{B}{\rho} \right) \right) + u_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \tilde{E} \left(\frac{B}{\rho} \right) + u_\phi \left(-\tilde{E} \tilde{E} \left(\frac{A}{\rho} \right) \right) \right\} = 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \tilde{E} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \\
 &= \frac{1}{\rho} E \rho, \quad E \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho,
 \end{aligned}$$

を得る。

さて半径 a の回転円筒内の流れを考えよう。円筒とともに回転する系での境界条件は $\rho = a$ で $v = 0$, でありこれと (8), (10) から

$$\begin{cases} \nu E^2 A - \Omega \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \\ \nu E B + \Omega \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

を得るのは難しく存い。(11) で分かるように toroidal と poloidal 成分 v_T と v_p は本質的に couple しており, $\Omega = 0$ のときのみ互いに独立であり得る。 A, B は

$$A \sim e^{-n|z|} \rho \tilde{f}(\rho), \quad B \sim e^{-n|z|} \rho \tilde{g}(\rho), \tag{12}$$

$$n \rho \equiv r, \quad \rho \tilde{f}(\rho) \equiv r f(r),$$

とおくと

(11) は
$$\mathcal{L}^3 f = \alpha^3 f, \quad (13)$$

∴
$$\begin{cases} \mathcal{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (1 - \frac{1}{r^2}) \\ \alpha \equiv -\bar{\Omega}^2 / \eta^4, (\bar{\Omega} \equiv \Omega / \nu) \end{cases}$$

とす。境界条件 $v_T = 0, v_p = 0$ は各々

$$\begin{cases} \mathcal{L}^2 f = 0, \\ f = \frac{\partial}{\partial r} r f = 0, \end{cases} \quad \text{on } r = na \quad (14)$$

とす。 $\rho^3 = \alpha^3$ の 3 つの根を P_1, P_2, P_3 とし、

$C_i^2 = 1 - P_i, (i=1, 2, 3), d_1, d_2, d_3$ を適当な定数とすると

(13) の解は

$$f = \sum_{i=1}^3 d_i J_1(C_i r),$$

(∴ J_n は n 次のベッセル関数) と表わされる。これが

(14) を満たす自明でない解を持つためには $r = na$ は

$$\det M = 0, \quad (15)$$

∴
$$M_{ij} = \begin{bmatrix} J_1(\gamma_1), J_1(\gamma_2), J_1(\gamma_3) \\ \delta_1^2 J_1(\gamma_1), \delta_2^2 J_1(\gamma_2), \delta_3^2 J_1(\gamma_3) \\ \gamma_1 J_0(\gamma_1), \gamma_2 J_0(\gamma_2), \gamma_3 J_0(\gamma_3) \end{bmatrix},$$

$$\gamma_i = C_i n a, \quad \delta_i = P_i n a, \quad (i=1, 2, 3)$$

を満たさなければならぬ。 (15) の根の分布を見るために例として $\Omega' (\equiv \Omega a^2 / \nu)$ が 1.0 と 0.01 のときの $\Phi \equiv (\det M) / \zeta$ の絶対値 $|\Phi|$ の $\zeta (\equiv n a)$ 面での等高線を描くと下図 7, 8 のようになる。

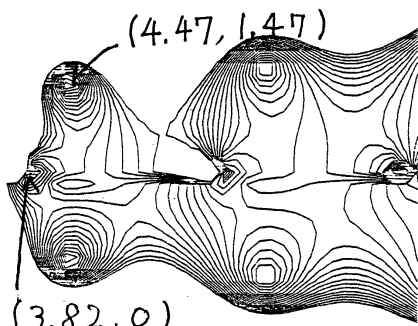


図 7 ($\Omega' = 1.0$)

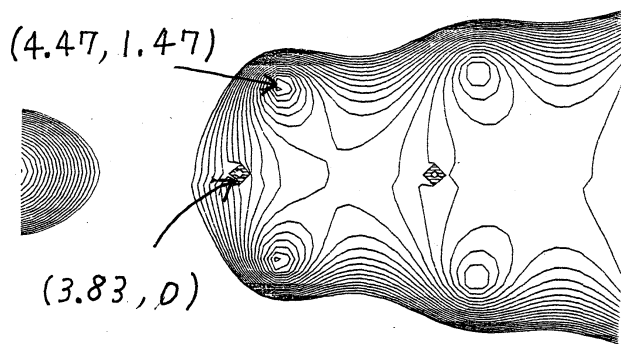


図 8 ($\Omega' = 0.01$)

(なお $\Omega' = 0$ の円筒内では $\zeta_1 \equiv 4.47 + 1.47i$ であることが知られてゐる。(Wakiya (1976)) この場合、 ψ は ψ_p 成分のみを持ち $\psi_T = 0$ である。) 上図 7, 8 や他の Ω' に対する等高線を見ると $\Omega' \rightarrow 0$ でも ~ 3.8 に実根があるようである。閉じた渦を作るためには (15) の根の虚部が 0 でない必要がある。実験的には何らかの方法 (虚方での制御など) でこの ~ 3.8 の根の影響を押えることができれば、たとえば Ω' の小さい時 $\zeta \sim 4.47 + 1.47i$ に対応する渦が観測される可能性がある。この場合 ψ_T と ψ_p が共存してゐることから、 ψ_p

の v_T に対するピッチ (v_T の流線が φ 方向に一周する間の v_p の流線の子午面内での回転の割合) の適当な値に対して閉じた結び目のある流線を作ることも分かる。(流体力学的ベクトル場の結び目 (knot) の意味や例については Moffatt (1978) を参照されたい。)

§4. まとめ, その他

- (1) 方程式に固有の長さ ($\sqrt{\nu/\omega}$, $\sqrt{\nu/\alpha}$, $\sqrt{\nu/\Omega}$) のある平板間あるいは円筒内の流れにも相似 (正確には形は合同で強さが違う) な渦列があり得て, その性質を調べた。
- (2) 隣り合う渦の強さの比は根 $\zeta = \xi + i\eta$ の実部と虚部の比 η/ξ が小さいほど大きい。すなわち減衰率は大きく実験的には観察しにくく。振動 (ω) や α がある場合 §2 の結果によると $\omega=0$ あるいは $\alpha=0$ の場合に比べてこの比は小さい。(図3, 4参照)
- (3) コリオリ力のもとでは toroidal 成分 v_T と poloidal 成分 v_p は couple していて, 結び目のある Moffatt 渦を作る可能性がある。(式(11)参照)
- (4) 多孔性媒質中の流れの Brinkman の近似は良く使われているが厳密に正当化されているものではない。多孔性媒質中での Moffatt 渦の実験ができて §2-2 の結果との

比較ができれば Brinkman の近似の良しテストになるであろう。

文献

今井 功 (1973) ; 「流体力学」 , 裳華房

Moffatt, K.H. (1964) ; J. Fluid Mech. 18, 1

Moffatt, K.H. (1978) ; 「Magnetic Field Generation in Electrically
Conducting Fluid」 , Cambridge Univ. Press

Wakiya, S. (1976) ; J. Fluid Mech. 78, 737