数理解析研究所講究録
第 540 巻 1984 年 91-107

Paris Harrington 原理とその周辺

九大工学部　倉田令二朗 (Reijiro Kurata)

以下では Paris Harrington 原理 PH とその拡張 PH_n とその周辺を論ずる。周辺とは Reflection Principle および ε_0-帰納法のことである。ただし考察の範囲は 1st order logic 内に限定される。

I　Paris Harrington 原理

1. <u>定義</u>　$M, e \in \omega$, M は $\{0, 1, \cdots M-1\}$ と同一視される。

$[M]^e = \{ X ;\ X \subseteq M,\ \bar{\bar{X}} = e \}$

Partition とは map $P : [M]^e \longrightarrow r \ (= \{0, 1, 2 \cdots r-1\})$ のこと。

$X \subseteq M$; homogeneous for a Partition P とは $P \restriction [X]^e = \mathrm{const}$ のことである。

$M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$　$k, e, r \in \omega \ (k > e)$ とはすべての $P : [M]^e \longrightarrow r$ に対し、次のような $X \subseteq M$ が存在することである。

(i) X is homogeneous for P, (ii) $\bar{\bar{X}} \geq k$, (iii) $\bar{\bar{X}} \geq \min X$.

PH (Paris Harrington Principle) とは次の命題を意味する。

$$\forall e\, r\, k\, \exists M (M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r)$$

PH^e ;　$\forall r \forall k \exists M (M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r)$

同様に $[a,b]^e \xrightarrow[*]{} (k)^e_r$ $(k>e)$ は $\forall P:[a,b]^e \to r,\ \exists X \subseteq [a,b]$

s.t (i) X is P-homo (ii) $\bar{\bar{X}} \geq k$ (iii) $\bar{\bar{X}} \geq \min X$.

命題 PH と次の(1), (2) (3)の各は互に同値である.

(1) $\forall a k r e \exists b\ ([a,b] \xrightarrow[*]{} (k)^e_r)$

(2) $\forall x z \exists y\ ([x,y] \xrightarrow[*]{} (z+1)^2_2)$

(3) $\forall z \exists y\ ([0,y] \xrightarrow[*]{} (z+1)^2_2)$

2. PH は真である.

命題 (i) PH は真である. (ii) 各 e に対し $PA \vdash PH^e$ である.

(iii) $PA, RFN_{\Sigma_1}(PA) \vdash PH$ ((iii)に関しては[17]参照)

説明. (i) は König lemma と Infinite Ramsey theorem を用いている (c.f. 2 in [1]) (ii) (i) の証明から各 e に対して $PA_2 \vdash PH^e$ が得られる. ここに PA_2 は PA の 2階述語拡大, これから各 e に対して $PA \vdash PH^e$, これを PA の中で形式化して (iii) を得る.

3. Lemma

PH から導かれる諸定理のために次の補題をおくのが便利である. (von den Tweer [2]) PH を仮定する.

与えられた a, e $p, k\ (>e)$ および primitive recursive function g に対し次のような b が存在する; 任意の $P:[a\ b]^e \to 2$ に対し $X \subseteq [a,b]$ が存在して次をみたす (i) X is P-homo, (ii) $\bar{\bar{X}} \geq k$ (iii) $\min X \geq p$, iv) $\bar{\bar{X}} \geq g(\min X)$, (v) $x, y \in X, x<y \Rightarrow g(x)<y$

4. Theory T

Tの言語： 0, 1, +, ·, <, および無限個の constants $c_0, c_1, \cdots$

Tの公理 (i) 0, 1, +, ·, < の定義式と limited formula に対する induction (ii) $c_i^2 < c_{i+1}$

(iii) 任意の limited formula $\varphi(y_1 \cdots y_m, z_1, \cdots, z_e)$ と $i < k_1 < \cdots < k_e$, $i < k_1' < \cdots < k_e'$ に対し $\forall y < c_i[\varphi(y, c_{k_1} \cdots c_{k_e}) \leftrightarrow \varphi(y, c_{k_1'} \cdots c_{k_e'})]$

Theory T は Harrington によって導入されたがこれによって PH 原理の証明論的扱いが可能となった.

<u>定義</u> $\varphi := Q_0 x_0 \cdots Q_{n-1} x_{n-1} \psi(x_0 \cdots x_{n-1})$ を PA の Σ_n または Π_n formula とする. ψ は PR-formula ([6]) である. このとき φ^* を定義する; $\varphi^*(z_0 \cdots z_{n-1}) := Q_0 x_0 < z_0 \cdots Q_{n-1} x_{n-1} < z_{n-1} \psi(x_0 \cdots x_{n-1})$

ただし $z_0 \cdots z_{n-1}$ は φ にない variable とする.

<u>命題</u>(Uesu) $\theta(y) := \theta(y_1 \cdots y_m)$ は Π_n 又は Σ_n-formula とし $y_1, \cdots, y_m$ 以外の自由変項はあらわれないとする

$PA \vdash \theta(y)$ $i < k_1 < \cdots < k_n$ ならば $T \vdash y < c_i \to \theta^*(y, c_{k_1} \cdots c_{k_n})$

これは[1]の2.4に対応するが証明論的証明は上江洲による(奥村[5] 2.2 にある).

<u>系</u> $PA \vdash \mathrm{Con}\,T \to \mathrm{Con}\,PA$

5. $PA \vdash \mathrm{Con}\,PA \to \mathrm{Con}\,T$ $\quad PA \nvdash PH$

[1]では PA, PH ⇒ $\vdash \mathrm{Con}\,T$ を導き上の系から $PA \nvdash PH$ を導いているがもう少し精密な結果が得られる

<u>定義</u> $S = S(c_0 \cdots c_{k-1})$ は T の文で T の constants は $\{c_0 \cdots c_{k-1}\}$

にあらわれるとする。 $\hat{S} := \exists x_0 \cdots \exists x_{n-1} S(x_0 \cdots x_{n-1})$ とおく。

$FS_T(x)$ は "x は T の有限個の公理の conjunction のゲーデル数である" をあらわす formula, $FC_\omega(T)$ は " T のすべてのすべての有限部分集合は ω 上 satisfiable である" をあらわす formula とする。

すなわち $FC_\omega(T) := \forall x(FS_T(x) \to Tr_{\Sigma_2}(\hat{x}))$ (T の公理は Σ_2-型)

Lemma (1) $S = S(c_0 \cdots c_{n-1})$ は T の有限部分集合とする。

このときある d があって $PH^d \Rightarrow \hat{S}$ は真

(2) 上の S に対し $PA \vdash \hat{S}$

(3) $PA \vdash PH \to FC_\omega(T)$

<u>Theorem</u> (1) $PA \nvdash PH$, (2) $PA \vdash Con\, PA \to Con\, T$ ($\because Con\, PA \leftrightarrow Con\, T$)

(1) が [1] の主要結果の一つである。 $PA \vdash PH \xrightarrow{\text{lemma 3}} FC_\omega(T) \to Con\, T \xrightarrow{\text{prop 4}} Con$

PA より出る。 (2) は Lemma (2) から出る。

6. $PH \leftrightarrow RFN_{\Sigma_1}(PA)$ 等

<u>定義</u> $PA(n) := PA + Th_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ ($= \{\text{true } \Pi_n\text{-sentences}\}$)

<u>Theorem</u> PH, $FC_\omega(T)$, $Con(PA(1))$, RFN_{Σ_1} は PA で同値である。

[証明] $PH \xrightarrow{(1)} FC_\omega(T) \xrightarrow{(2)} Con(PA(1)) \xrightarrow{(3)} RFN_{\Sigma_1}^{G} \xrightarrow{(4)} RFN_{\Sigma_1} \xrightarrow{(5)} PH$

(1) は lemma 4.(3), (3)(4) は次章, (5) は Prop. 2 (iii)

(2) は informal には次のようにしてわかる。 $FC_\omega(T)$ と仮定し

$PA \vdash \theta_1 \cdots \theta_n \to \curlywedge$ (θ_i は true Π_1 sentences) とする。 このとき $T \vdash \theta_1^*, \cdots \theta_n^* \to \curlywedge$

(Prop 4) $\theta_1^* \cdots \theta_n^*$ は satisfiable on ω ($\theta_i = \forall x\, \psi_i(x)$ なら $\theta_i^* := \forall x < c_0\, \psi_i(x)$)

これは $FC_\omega(T)$ に矛盾する。

系 $PA(1) \nvdash PH$

7. モデル論的方法

[2], [3]等のモデル論的方法では基本的に次のlemmaを必要にする。

Lemma M を countable nonstandard model of PA とする。

$c > \mathbb{N}$ に対し $M \models [a,b] \underset{*}{\rightarrow} (c+1)^c_c$ なる sequence $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $e_i \in [a,b]$ が存在して $(M,(e_i)_{i\in\mathbb{N}}) \models T$.　$a<I<b$

$I = \{d\in M \,;\, \exists i\in\mathbb{N}\ d<e_i\}$ とおけば $I \subseteq_e M$ (end extension) かつ $I \models PA$, また この場合 $I \subseteq_{\Sigma_0} M$, すなわち Σ_0-formula φ と $\vec{a} \in I$ に対し $I \models \varphi(\vec{a}) \Longleftrightarrow M \models \varphi(\vec{a})$ (2,3(ii) [2])

$PA(1) \nvdash PH$ のモデル論的証明; $M \models Th(\mathbb{N})$ とする。$a \in M \setminus \mathbb{N}$. $\mathbb{N} \models PH$ だから $M \models [a,b] \underset{*}{\rightarrow} (a+1)^a_a$ となる最小の $b \in M$ がある。上の lemma によって $I \subseteq_e M$ を作る。$I \models PA$, $I \models Th_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ $a<I<b$. もし $PA(1) \vdash PH$ なら $b' \in I$ があって $I \models [a,b'] \underset{*}{\rightarrow} (a+1)^a_a$ このときは $M \models [a,b'] \underset{*}{\rightarrow} (a+1)^a_a$ $(I \subseteq_{\Sigma_0} M)$ これは b の最小性に矛盾する。

8 Provably recursive function

$f(a) = \mu b\left([a,b] \underset{*}{\rightarrow} (a+1)^a_a\right)$ とおけばこれは recursive

<u>Theorem</u> g が provably recursive in PA ならば f は g を dominate する。すなわち $\exists n\in\mathbb{N}\ \forall m\in\mathbb{N}\ (m \geq n \rightarrow f(m) > g(m))$

この model 論的証明はきわめて簡単である (c.f [2]). [1] にも

あるが命題1のPH↔(2)を明確にしてないのであいまいである。証明論的証明はむつかしい。これは事実上Ketonen Solovay [16]にある。

von der Twer は[2]の序で「PAにおける証明の概念を完全に抹殺した」と述べているが、奥村[5]，小野角田[17]倉田[4]はいずれも「モデルの概念を完全に抹殺した」と述べている。

9. T_m, T_∞ についての注意

<u>定義</u> Theory T_m ($m=0,1\cdots$) ないし T_∞ は T の公理 (i) (iii) の limited formula を Π_m-formula ないしは任意の formula でおきかえて得られるものとする。 $FC_\omega(T_m)$ はPAの文になるが次が成立つ。

(1) T_∞ は PA の conservative extension である。

(2) $PA \vdash Con\, PA \leftrightarrow Con\, T_m \leftrightarrow Con\, T_\infty$

(3) $PA \vdash PH \leftrightarrow FC_\omega(T_m)$

したがって $\{Con(T_m)\}_{m\in\omega}$ や $\{FC_\omega(T_m)\}_{m\in\omega}$ で $RFN_{\Sigma_n}(PA)$ ($n=1,2\cdots$) に対応する hierarchy を得ることはできない。

II Reflection Principle と PH の拡張 PH_n

10. Reflection principle

$Rfn(PA)$ (local reflection principle) $Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)\to\varphi$, φ は文 (PAの).

$RFN(PA)$ (uniform reflection P.) $\forall x Pr_{PA}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner)\to\forall x\,\varphi(x)$

$RFN'(PA)$ (second uniform r. P.) $\forall x\,[Pr_{PA}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner)\to\varphi(x)]$

ここに φ は x のみを free にもつ。$\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner$ は $\ulcorner\varphi(\bar{z})\urcorner$ すなわち $s(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ の formal expression.

$Rfn_{\Sigma_k(\Pi_k)}(PA)$, $RFN_{\Sigma_k(\Pi_k)}(PA)$, $RFN'_{\Sigma_k(\Pi_k)}(PA)$ は Rfn, RFN, RFN' の φ を $\Sigma_k(\Pi_k)$-sentence or formula に制限したもの.

$RFN^G_{\Sigma_k(\Pi_k)}$ (Global Reflection Principle) :=

$$\forall x\,(St_{\Sigma_k(\Pi_k)}(x) \wedge Pr_{PA}(x) \to Tr_{\Sigma_k(\Pi_k)}(x))$$

<u>Prop</u> (1) $PA \vdash RFN^G_{\Sigma_k(\Pi_k)} \to RFN'_{\Sigma_k(\Pi_k)}$

(2) $PA \vdash RFN^G_{\Sigma_k} \leftrightarrow Con(PA(k))$

$$PA(k) = PA + Th_{\Pi_k}(N)$$

(2) $RFN^G_{\Sigma_k}(PA) \Longleftrightarrow \forall\varphi\in\Sigma_k(Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to Tr_{\Sigma_k}(\ulcorner\varphi\urcorner))$

$\Longleftrightarrow \forall\varphi\in\Sigma_k(\neg Tr_{\Sigma_k}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner))$

$\Longleftrightarrow \forall\varphi\in\Pi_k(Tr_{\Pi_k}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg Pr_{PA}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)) \Longleftrightarrow Con(PA(k))$

<u>Theorem</u> ([6]) (i) $PA \vdash Con_{PA} \leftrightarrow RFN_{\Pi_1}(PA)$

(ii) $PA \vdash RFN_{\Sigma_k(\Pi_k)} \leftrightarrow RFN'_{\Sigma_k(\Pi_k)}$

(iii) $PA \vdash RFN_{\Pi_{k+1}}(PA) \leftrightarrow RFN_{\Sigma_k}(PA)$ $k \geqslant 0$

(iv) $PA + RFN_{\Pi_k} \nvdash RFN_{\Sigma_k}$ $k \geqslant 1$

($PA + RFN_{\Pi_k}$ の consistent を仮定に

(iii) (iv) によって RFN_{Σ_k} ($k = 1, 2 \cdots$) は hierarchy を作る.

$PH \leftrightarrow RFN_{\Sigma_1}$ in PA だったから $PH_n \leftrightarrow RFN_{\Sigma_n}$ in PA となるような PH の拡張 PH_n が問題になる.

11 PH_n の定義

(1) φ を Π_n-sentence $\forall v_0 \exists v_1 \cdots Q v_{n-1} \psi(v_0 \cdots v_{n-1})$ — ψ は PR-formula — に対し, $\varphi^*(u_0 \cdots, u_{n-1})$ は $\forall v_0 < u_0 \exists v_1 < u_1 \cdots Q v_{n-1} < u_{n-1} \psi(v_0 \cdots v_{n-1})$ であった. ただし $u_0 \cdots u_{n-1}$ は φ にあらわれない variable とする.

$X = \{x_0\ x_1 \cdots\}$ $(x_0 < x_1 < \cdots\ )$ と $\bar{\bar{X}} \geqq n$ なる ω の有限部分集合とする.

$X \models_0 \varphi^* \Longleftrightarrow \varphi^*(x_0, \cdots, x_{n-1})$ is true

$X \models \varphi^* \Longleftrightarrow \varphi^*(x_{i_0} \cdots x_{i_{n-1}})$ is true for all $i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1} < \bar{\bar{X}}$

(2) $M \xrightarrow[*]{\varphi} (k)^e_r$ $(k \geqq n)$ φ は Π_n-sentence が次のことを意味するものとする 任意の partition $P: [M]^e \longrightarrow r$ に対し $X \subseteq M$ が存在して次をみたす. i) X is homogeneous for P, ii) $\bar{\bar{X}} \geqq k$ iii) $\bar{\bar{X}} \geqq \min X$ iv) $X \models_0 \varphi^*$

(3) PH_n $\forall k \geqq n$ e, r and for all true Π_n-sentence φ, M が存在して $M \xrightarrow[*]{\varphi} (k)^e_r$

Prop 1 PH_n は Π_{n+1}-sentence である.

Π_n-formula $\tau_n(x)$ が存在し任意の Π_n-sentence φ に対し数 p が存在して $\tau_n(p) \Longleftrightarrow \varphi$ となる. この $\tau_n(p)$ を用いて

PH_n は $\forall k \geqq n \forall r \forall e \forall p [\tau_n(p) \longrightarrow \exists M (M \xrightarrow[*]{\tau_n(p)} (k)^e_r]$

Prop 2 PH_n は次の(1)(2)(3)の各と同値である.

(1) $\forall$ true Π_n-φ $\forall a \forall k\ r, e \exists b([a, b] \xrightarrow[*]{\varphi} (k)^e_r)$

(2) $\forall$ true Π_n-φ $\forall a\ c \exists b([a\ b] \xrightarrow[*]{\varphi} (c+1)^c_c$

(3) $\forall$ true Π_n-φ $\forall a \exists b\left([0,b] \underset{*}{\xrightarrow{\varphi}} (a+1)^a_a\right)$

12 PH_n is true

Prop (i) PH_n is true

(ii) 各 e に対し $PA \vdash PH^e_n$

(iii) $PA + RFN_{\Sigma_n}(PA) \to PH_n$

ここで PH^e_n は $\forall k \geq n \forall r \forall P[\tau_n(P) \to \exists M(M \underset{*}{\xrightarrow{\tau_n(P)}} (k)^e_r)]$

13 Lemma

PH_n を仮定する. すこうれを $a, e, p, k \geq n$, primitive recursive function g, true Π_n-sentence φ, に対し b が存在して

$\forall P : [a\ b]^e \longrightarrow 2$, $\exists X \subseteq [a, b]$ s.t. i) X is P-homo, ii) $\min X \geq p$, iii) $\overline{\overline{X}} \geq k$, (iv) $g(\min X) \leq \overline{\overline{X}}$ v) $x, y, x<y \Rightarrow g(x)<y$

vi) $X \models_0 \varphi^*$

14 Theory $T(n)$

$T(n)$ は 4 の T に true Π_n-sentence φ に対する $\varphi^*(c_0 \cdots c_{n-1})$ を axiom として加えたもの

15 $FC_\omega(T(n))$

$FC_\omega(T(n))$ は $T(n)$ の有限部分集合は ω 上 satisfiable であることを表明する formula (PA の formula として書ける).

Lemma $S = S(c_0 \cdots c_{k-1})$ は T の finite axioms の conjunction とし, constants は $c_0 \cdots c_{k-1}$ の中にあらわれるとする. φ はある true Π_n-sentence とする.

そのとき(1) eが存在して

$$PH^e_n \Longrightarrow \exists x_0 \cdots \exists x_{k-1}(S(x_0 \cdots x_{k-1}) \wedge \varphi^*(x_0 \cdots x_{n-1}))$$

(2) $PA \vdash \exists x_0 \cdots \exists x_{k-1}(S(x_0 \cdots x_{k-1}) \wedge \varphi^*(x_0, \cdots, x_{n-1}))$

(3) $PA \vdash PH_n \longrightarrow FC_\omega(T(n))$.

16 <u>Theorem</u> PH_n, $FC_\omega(T(n))$, $Con(T(n))$, $Con(PA(n))$, $RFN^{\Sigma_2}_{\Sigma_n}$, RFN_{Σ_n} はすべてPAにおいて同値である.

<u>系</u> $PA(n) \nvdash PH_n$

17 Simple form of PH_n (van der Twer, Uesu)

$k \geq m$, e, r, $M \in \omega$, $f: \omega \to \omega$ とする.

$M \xrightarrow[*]{f} (k)^e_r$ は次のことを意味するとする. $\forall P:[M]^e \to r$ $\exists X \subseteq M$ s.t. (i) X is homo for P, ii) $\bar{\bar{X}} \geq k$, iii) $\bar{\bar{X}} \geq f(\min X)$

$PH(f) := \forall k\, e\, r\, \exists M(M \xrightarrow[*]{f} (k)^e_r$

<u>Theorem</u> f_n は単調増大Δ_n-functionですべてのΔ_n-functionをdominateするとする($n \geq 1$). そのとき

$$PA \vdash PH(f_n) \longleftrightarrow PH_n \quad (\text{cf. [4]})$$

系1. f_nは上と同じとするとき $PA(n) \nvdash PH(f_n)$

(van der Twer [2], 4.5

PHをPH(f_n)に拡張し系1を証明した最初の人はvan der Twerであった. 倉田は独立にPH_nを見出しTheorem 16を証明した(van der TwerにはRFNと関連づける意図がなかったようである) 上江州は[2]を知らずにPH_nが上記のPH(f_n)

と同値であることを倉田に示唆した。

系2 RFN(PA) $\Longleftrightarrow$ すべての単調増大算術的関数 f に対し PH(f) が成立つ

III RFN(PA) と ε_0-Induction

18 RFN $\to$ Ind ε_0

定義 $Ind(n,\varphi)$: ω_n までの transfinite induction が PA の formula φ に対して成立つことを言明する PA の formula. すなわち

$\forall x(\forall y \underset{n}{\leq} x\, \varphi(y) \to \varphi(x)) \to \forall x \varphi(x)$ (cf. [8]

$Ind(\varepsilon_0, \varphi) := \forall x\, Ind(x, \varphi)$, $Ind\,\varepsilon_0$; $Ind(\varepsilon_0 \varphi)$ for every φ.

Prop PA $\vdash$ RFN $\to$ Ind ε_0

実際.. PA の任意の formula $\varphi(x)$ と任意の n に対し

$PA \vdash Ind(n, \varphi)$ ([7], [8], [9] [10])

このことを PA で形式化して $PA \vdash \forall x Pr_{PA}(\ulcorner Ind(\dot{x} \varphi)\urcorner)$.

19 Ind ε_0 $\to$ RFN (1st proof)

PA^ω: axiom は true quantifier free formula of PA inference rule は LK のそれ + ω-rule とする.

$\varphi(x)$ と x以外 free var. をもたない PA の formula とする.

$PA \vdash \varphi(\bar{x}) \Rightarrow PA^\omega \vdash \varphi(\bar{x}) \Rightarrow PA^\omega \vdash \varphi(\bar{x})$ (カットなし, ここで Ind ε_0 を用いる) $\Rightarrow \varphi(\bar{x})$ is true, これを PA で形式化して

$PA + Ind\,\varepsilon_0 \vdash Pr_{PA}(\ulcorner \varphi(\dot{x})\urcorner) \to Tr_p(\ulcorner \varphi(\dot{x})\urcorner)$

〃 $\vdash Pr_{PA}(\ulcorner \varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(x)$

ここで p は $\varphi(x)$ の unbounded quantifier の数.

(cf. Schwichtenberg [15])

<u>20</u> $\mathrm{Ind}_{\varepsilon_0} \to \mathrm{RFN}(PA)$ (2nd Proof)

$\varphi(x) := \exists x_1 \forall y_1 \cdots \exists x_n \forall y_n \psi(x, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$ $\psi \in \Sigma_0$

とします. 次のように $\varphi_H(x)$ を定義すれば $\varphi(x) \to \varphi_H(x)$ in LK である.

$\varphi_H(x) := \exists x_1 \cdots \exists x_n \psi(x, x_1 \cdots x_n, f_1(x_1) \cdots f_n(x_1 \cdots x_n))$

No counter example interpretation by functional $F_1 \cdots F_n$ を

$\varphi^N(x) := \varphi^N(x, F_1 \cdots F_n)$

$= \psi(x, \overline{F_1} \cdots \overline{F_n}, f_1(\overline{F_1}) \cdots f_n(\overline{F_1} \cdots \overline{F_n}))$ で定める.

ここに $\overline{F_i} = F_i(x, f_1 \cdots f_n)$ (Kreisel [11]).

さて $PA \vdash \varphi(\bar{x})$ (このときは $PA \vdash \varphi_H(\bar{x})$)

Hilbert's Substitution method によって $\varphi_H(\bar{x})$ の証明から functional $F_1 \cdots F_n$ を構成することができて $\varphi^N(x, F_1 \cdots F_n)$ が成立つことが ε_0-induction を用いて証明される (Ackermann [12] Tait [13])

このことを形式化すると

Prop (1) x のみを free にもつ任意の formula $\varphi(x)$ と $\varphi(\bar{x})$ の証明 p に対し. Functional $F_1, \cdots F_n$ ($\overline{F_1} \cdots \overline{F_n}$ は PA' の term) が存在して $PA' + \mathrm{Ind}'\varepsilon_0 \vdash \mathrm{Prf}_{PA}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner, p) \to \varphi^N(x, F_1 \cdots F_n)$ (*)

ここで PA' は PA に free function $f_1, \cdots, f_n$ と μ-symbol を付加したもの

$\mathrm{Ind}'\varepsilon_0$ は PA' の formula に対する ε_0-induction

prop (2) PA' の term $e_1 \cdots e_n$ があって

$PA' \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \psi(x_1 \cdots x_n, e_1(x_1) \cdots e_n(x_1 \cdots x_n)) \to \varphi(x)$

たとえば $e_1(x_1) = \mu y_1 \neg \exists x_2 \forall y_2 \cdots \exists x_n \forall y_n \psi(x, x_1 \cdots x_n\, y_1 \cdots y_n)$

$e_2(x_1\, x_2) = \mu y_2 \neg \exists x_3 \forall y_3 \cdots \exists x_n \forall y_n\ \psi(x, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$

…… とすればよい。

(*) における $\varphi^N(x, F_1 \cdots F_n)$ の $f_1 \cdots f_n$ を $e_1 \cdots e_n$ でおきかえ

prop (2) を用いれば

$PA' + Ind'\varepsilon_0 \vdash Pr_{PA}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \varphi(x)$

を得るが $PA' + Ind'\varepsilon_0$ は $PA + Ind\,\varepsilon_0$ の conservative extension だから

$PA + Ind\,\varepsilon_0 \vdash Pr_{PA}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \varphi(x)$

以上は Kreisel-Lévy [14] の証明である。

Theorem $PA \vdash RFN(PA) \leftrightarrow Ind\,\varepsilon_0$

IV $PH_n\ n=1,2\cdots$ と $Ind\,\varepsilon_0$

PH_n は RFN から証明され RFN は $Ind\,\varepsilon_0$ から証明されるのであるから PH_n は $Ind\,\varepsilon_0$ から証明される筈である。この直接証明は事実上 Ketonen-Solovay ([17]) にある。以下それを整理しよう。

1. $\lambda \leq \varepsilon_0$, $n \in \omega$ に対する $\{\lambda\}(n)$

$\lambda < \varepsilon_0$ に対し $\lambda = \omega^{\alpha_1} m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} m_k$ を λ の Cantor normal form とする。ここに $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$ m_i は正整数。

$\lambda = \omega^{\alpha}(\beta+1)$ と書ける

(1) $\lambda = \omega^{\alpha+1}(\beta+1)$ なら $\{\lambda\}(n) = \omega^{\alpha+1} \cdot \beta + \omega^{\alpha} \cdot n$

(2) $\lambda = \omega^{\gamma}(\beta+1)$ $\gamma<\lambda$ が limit なら $\{\lambda\}(n) = \omega^{\gamma}\cdot\beta + \omega^{\{\gamma\}(n)}$

(3) $\lambda = \varepsilon_0$ なら $\{\varepsilon_0\}(0) = \omega$ $\{\varepsilon_0\}(n+1) = \omega^{\{\varepsilon_0\}(n)}$

(4) $\{\beta+1\}(n) = \beta$, $\{0\}(n) = 0$

次が成立つ. $0<\alpha\leq\varepsilon_0 \Rightarrow \{\alpha\}(n)<\alpha$, $\lim_{n\to\infty}\{\alpha\}(n) = \alpha$.

2. α- large set

$\alpha \leq \varepsilon_0$ $S=\langle s_0 \cdots s_{k-1}\rangle$ を ω の finite sequence とする.

$\{\alpha\}\langle S\rangle$ を次のように定義する. $\{\alpha\}\langle\phi\rangle = \alpha$ (ϕ は空列)

$\{\alpha\}\langle s_0 \cdots s_{k-1}\rangle = \{\{\alpha\}\langle s_0,\cdots,s_{k-2}\rangle\}(s_{k-1})$

ω の finite set X に対しては

$\{\alpha\}\langle X\rangle = \{\alpha\}\langle x_0\, x_1 \cdots x_{k-1}\rangle$

ここに $X=\{x_0\ x_1 \cdots x_{k-1}\}$ $x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}$ とする.

定義 X が α-large とは $\{\alpha\}\langle X\rangle = 0$ のこと

命題 次の性質が成立つ.

(i) X が ω の無限集合ならば ある X の有限部分集合が α-large となる.

(ii) X が n-large $(n\in\omega) \Longleftrightarrow \bar{\bar{X}} \geq n$

(iii) X が ω-large $\Longleftrightarrow \bar{\bar{X}} > \min X$

(iv) X が $\omega+n$-large $\Longleftrightarrow$ X は relatively large かつ $\bar{\bar{X}} \geq n$

(v) $A\subset B$, A が α-large $\Rightarrow$ B も α-large

$F: X \to r$ があり X が $\alpha\cdot r$-large $\Rightarrow \exists j\in r$, $f^{-1}(j)$ が α-large

3 Ketonen Solovay's Lemma

$\alpha \geq \omega$ $2 \leq n$ $r < \omega$ に対し.

$$\theta_r(\alpha) = \omega^{\alpha} + \omega^{3} + \max(r, \|\alpha\|) + 3 \text{ とおく.}$$

ここに $\|\alpha\|$ は $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} n_k$ (Cantor normal form) のとき $\|\alpha\| = \sum_{j=1}^{k} \|\alpha_j + 1\| \cdot n_j$ によって定義される.

Lemma, X が $\theta_r(\alpha)$-large set で $P : [X]^{n+1} \to r$ のとき

$\exists Y \subseteq X$; Y is a α-large prehomogeneous set, すなわち

すべての $x_0 < \cdots < x_{n-1} < y$, $x_0 < \cdots < x_{n-1} < z$ from Y に対し

$$P(x_0 x_1 \ldots x_{n-1} y) = P(x_0 x_1 \ldots x_{n-1} z)$$

$\theta_r^1 = \alpha \cdot r$, $\theta_r^{n+1}(\alpha) = \theta_r(\theta_r^n(\alpha))$ $n \geq 1$ とおく. そのとき.

Theorem X が $\theta_r^n(\alpha)$-large とする そのとき任意の partition $P : [X]^n \to r$ は α-large homogeneous set for P をもつ.

Corollary M が $\theta_r^n(\omega + n + 1)$-large $\Rightarrow M \underset{*}{\longrightarrow} (n+1)^n_r$

f を狭義単調増大関数 : $\omega \to \omega$ とする.

ω の有限集合 X が α-large(f) とは $f(X)$ が α-large のことをいう.

<u>Corollary 2</u> M が $\theta_r^n(\omega + n + 1)$-large$(f)$ $\Longrightarrow$

$$M \xrightarrow[*]{f} (n+1)^n_r$$

Ind ε_0 を PH_n $n = 1, 2, \ldots$ から直接証明する方法は筆者にはまだわかっていない. 1984 8.30.

Reference

[1] Paris, J and Harrington, L : A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic, in Handbook of Mathematical Logic, North Holland (1977).

[2] T. von der Twer : Some remarks on the mathematical incompleteness of Peano's arithmetic founded by Paris and Harrington, in Set Theory and Model Theory, M.L.N. 872 (1979).

[3] Paris, J : Some independence Results for Peano Arithmetic, in Journal of Sym. Logic vol. 43, No. 4 (1978).

[4] Kurata, R : Paris Harrington Theory and Reflection Principles, in Saitama Journal of Math. to appear.

[5] 奥村薫 : Paris Harrington 定理に関する証明論的考察 (修論).

[6] Smorynski, C : The incompleteness theorems, in Handbook of Mathematical Logic, D1, North Holland (1977)

[7] Gentzen, G : Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. Math. Annalen 119 (1943).

[8] Hilbert, D, and Bernays P : Grundlagen der Mathematik Berlin vol. II (1939).

[9] Schütte, K : Beweistheorie, Berlin (1960).

[10] Shirai, K: A relation between transfinite induction and mathematical induction in elementary number theory; in Tsukuba J. Math. vol 1 (1977).

[11] Kreisel, G: On the interpretation of non finitist proofs, J. Sym. Logic 16 (1951) and 17 (1952).

[12] Ackermann, W: Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Math. Annalen 117 (1940)

[13] Tait, W.W: The substitution method, J. Sym. Logic 30 (1965)

[14] Kreisel, G and Lévy, A: Reflection Principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, in Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 14 (1968).

[15] Schwichtenberg, H: Proof theory, Some applications of cut elimination, D2 in Handbook of Math. Logic, North Holland (1977)

[16] Ketonen, J. and Solovay, R: Rapidly growing Ramsey functions. Annals of Math. vol 113 (1981).

[17] Ono, H and Kadota, N: Provably recursive functions in fragments of Peano arithmetic. to appear.