数理解析研究所講究録
第540巻 1984年 137-144

$\mathcal{P}(\omega)$/finite 上の limits

阪府大総 加茂静夫 (Shizuo Kamo)

$\mathcal{P}(\omega)$ 上の quasi-order $\leq^*$ を，$x \leq^* y$ となるのは $x \setminus y$ が finite のとき，で定める． $x <^* y$ は，$x \leq^* y$ かつ not $y \leq^* x$ を意味する．quasi-order $\leq^*$ による $\mathcal{P}(\omega)$ 上の同値関係を $\sim$ で表わす． ω の部分集合からなる κ-sequence $X = \langle x_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が，κ-limit であるとは，X が $<^*$-下降列であり，任意の ω の無限部分集合 y に対して，$\exists \alpha < \kappa$ (not $y <^* x_\alpha$) が成り立つこととする．定義からすぐわかるように，適当な cardinal κ について，κ-limit が存在する． そこで，連続体仮説の下で，ω_1 は，limit が存在する唯一の cardinal となる．更に，連続体の濃度が ω_2 ($2^\omega = \omega_2$) の場合には，次の (A)～(C) の可能性が考えられる． (A). $\exists\, \omega_1$-limit $+ \neg \exists\, \omega_2$-limit. (B) $\neg \exists\, \omega_1$-limit $+ \exists\, \omega_2$-limit. (C) $\exists\, \omega_1$-limit $+ \exists\, \omega_2$-limit. (A)～(C) のそれぞれが $2^\omega = \omega_2$ と整合することは，よく知られている． まず，(A) をみたす model は，連続体仮説の成り立つ universe に対して，

ω_2 個の Cohen real を加える generic extension により得られる．又，(B) はマルティンの公理と $2^\omega = \omega_2$ から導かれる．更に，(B) の model に ω_1 個の Cohen real を加える generic extension による model では (C) が成り立つ．では，連続体の濃度 ($= 2^\omega$) が大きい場合はどうなるか．この論文ではそれについて考えるが，$\exists\kappa$-limit なら，$\exists cf\kappa$-limit が成り立つから，regular cardinal の limit に制限して考察を行う．そして，次の結果を証明する．

<u>定理</u>（一般連続体仮説）　n を自然数とし，$\kappa_0, \cdots, \kappa_n$ と λ は regular cardinal で $\omega_1 \leqq \kappa_0 < \cdots < \kappa_n \leqq \lambda$ をみたすとする。このとき，poset $\mathbb{P}$ で，次の (i) から (iv) をみたすものが存在する．

(i)　$\mathbb{P}$ は countable chain condition をみたす，

(ii)　$\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $2^\omega = \check{\lambda}$ ",

(iii)　$m = 0, 1, \cdots, n$ に対して，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $\exists\check{\kappa}_m$-limit " となる．

(iv)　θ が $\kappa_0, \cdots, \kappa_n$ 以外の regular cardinal なら，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $\neg\exists\check{\theta}$-limit " となる．

以下，この定理の証明のため，一般連続体仮説を仮定し，

$$\kappa_0, \cdots, \kappa_n, \lambda : \text{regular cardinals} \ \& \ \omega_1 \leqq \kappa_0 < \cdots < \kappa_n \leqq \lambda$$

とする．　$\kappa = \kappa_n$，$\bar{\kappa} = \kappa_0$ と記す．

≪ poset $\mathbb{P}$ の構成 ≫　　T_ξ ($\xi < \kappa$) による κ-stage finite support iteration S_ξ ($\xi < \kappa$) を ξ に関する induction で次の様に

定める．ここで各$\xi<\kappa$に対して，$G|\xi$はV-generic on S_ξを，

G_ξは$V[G|\xi]$-generic on T_ξを表わす．

1)．$\xi=0$のとき．

$$T_0 = 2^{<\omega} \; (=\{ t \,;\, \exists k<\omega\,(t : k \to 2)\}),$$

$$a_0 = b_0 = \{ k<\omega \,;\, \exists t \in G_0\,(t(k)=1)\}$$

とする．

2)．$\xi=\eta+1$のとき．

$$T_\xi = 2^{<\omega},$$

$$b_\xi = \{ k<\omega \,;\, \exists t \in G_\xi\,(t(k)=1)\},$$

$$a_\xi = a_\eta \cap b_\xi$$

とする．

3)　ξが limit のとき．

$$T_\xi = (\mathcal{P}_{<\omega}(\omega) \times \mathcal{P}_{<\omega}(\xi), \leq),$$

(ただし，T_ξの order は，

$$(u,x) \leq (v,y) \iff u \supset v \;\&\; x \supset y \;\&\; u \setminus v \subset \bigcap_{\eta \in y} a_\eta\;)$$

$$a_\xi = b_\xi = \bigcup \{ u \,;\, \exists x\,((u,x) \in G_\xi)\}$$

とする．

$S_\xi(\xi\leq\kappa)$は，定理の(iii)を成り立たせるための poset である．次の補題1～2が成り立つ．

<u>補題1.</u>　$\xi<\eta<\kappa$とすると，

$$\Vdash_{\eta+1} \text{“} a_\eta \neq \phi \;\&\; a_\eta <^* a_\xi \text{”}$$

である．

補題2．$\forall \theta \leq \bar{\kappa}\ (\ \theta \geq \omega_1$: regular $\Rightarrow \Vdash_\theta$ "$\langle a_\xi \mid \xi < \check{\theta} \rangle$: $\check{\theta}$-limit" $)$

補題3．S_κ は countable chain condition をみたす．更に，

$\forall W \subset S_\kappa\ (\ |W| = \omega_1 \Rightarrow \exists W_1 \subset W\ (\ |W_1| = \omega_1\ \&\ W_1$: pairwise compatible $)\ )$ が成り立つ．

補題2より，poset $\bar{P}$ を，

$$\bar{P} = S_{\kappa_0} \times \cdots \times S_{\kappa_n} \times \{ f : \exists x \subset \lambda\ (\ |x| < \omega\ \&\ f : x \to 2\ ) \}$$

で定めれば，$\bar{P}$ は定理の (i)〜(iii) をみたす．そこで，以下，$\bar{P}$ を拡張して，(i)〜(iv) をみたす poset P をつくる．

directed set $I = (I, \leqslant)$ を，

$$I = \kappa_0 \times \cdots \times \kappa_n \times \mathcal{P}_{<\kappa}(\lambda)$$

$$(\xi_0, \cdots, \xi_n, A) \leqslant (\eta_0, \cdots, \eta_n, B) \Leftrightarrow \xi_0 \leqslant \eta_0\ \&\ \cdots\ \&\ \xi_n \leqslant \eta_n\ \&\ A \subset B$$

で定める．

$X \subset \mathcal{P}(\omega)$ が strong finite intersection property (sfip) を持つとき，poset $R_X = (\ \mathcal{P}_{<\omega}(\omega) \times \mathcal{P}_{<\omega}(X), \leqslant\ )$ を，

$$(u, x) \leqslant (v, y) \Leftrightarrow u \supset v\ \&\ x \supset y\ \&\ u \setminus v \subset \cap y$$

で定める．R_X は strong countable chain condition をみたす poset であり，G を V-generic on R_X とし，$a = \bigcup \{ u ; \exists x (\ (u, x) \in G\ ) \}$ とおくと，$a \subset \omega\ \&\ a \neq \phi\ \&\ \forall x \in X\ (\ a \leq^* x\ )$ が成り立つ．

各 $i = (\ \xi_0, \cdots, \xi_n, A\ ) \in I$ に対して，$Q_\alpha(i)\ (\alpha < \bar{\kappa})$ による $\bar{\kappa}$-stage finite support iteration $P_\alpha(i)\ (\alpha \leq \bar{\kappa})$ を次の induction により

定める．ここで，各$\alpha < \bar{\kappa}$に対して，$G|\alpha$はV-*generic on* $P_\alpha(i)$を表わす．まず，

$$Q_0(i) = S_{\xi_0} \times \cdots \times S_{\xi_n} \times \{ f ; \exists x \subset A (|x| < \omega \ \& \ f : x \to 2) \}$$

とし，$0 < \alpha < \bar{\kappa}$に対して，$V[G|\alpha]$において，

$$Q_\alpha(i) = \text{the finite product of } \langle R_X \mid X \in \Gamma_\alpha(i) \rangle,$$

（ただし，$\Gamma_\alpha(i) = \{ X \subset \mathcal{P}(\omega) ; |X| < \kappa \ \& \ X$ はsfipを持つ$\}$）

とする．　$P(i) = P_{\bar{\kappa}}(i)$ とおく．

各*stage* αで$Q_\alpha(i)$が*countable chain condition*をみたすから，$P(i)$も*countable chain condition*をみたす．又，$i \leq j$のとき，$Q_0(i)$が$Q_0(j)$の*complete*な*subposet*になることと，$Q_\alpha(i)$, $Q_\alpha(j)$ ($0 < \alpha < \bar{\kappa}$) の定め方から，$P(i)$は$P(j)$の*complete*な*subposet*になる．そこで，*poset* Pを，

$$P = \bigcup_{i \in I} P(i)$$

で定める．Pが定理で求める*poset*となることをみていく．

《 Pは*countable chain condition*をみたすこと 》

Iがσ-*closed*な*directed set*であることと，$P(i)$ $(i \in I)$が*countable chain condition*をみたすことから，容易に導かれる．

《 $\Vdash_P$ "$2^\omega = \check{\lambda}$" となること 》

まず，$|P| \leq \Sigma_{i \in I} |P(i)| \leq \kappa \cdot |I| = \lambda$ だから，

$$\Vdash_P \text{"} 2^\omega \leq \check{\lambda} \text{"}$$

である．

便宜のため，各 $p \in P$ に対して，$p(0) = (s_0^p, \cdots, s_n^p, f^p)$ と記す．今，$Q = \{p \in P ;\ \mathrm{supp}(p) = \{0\} \ \&\ \forall m \leq n (s_m^p = \phi)\}$ とおくと，$Q \cong \{f ;\ \exists \alpha < \lambda (|\alpha| < \omega \ \&\ f : \alpha \to 2)\}$ となるから，

$\Vdash_Q$ " $\check{\lambda}$ 個の Cohen real over V が存在する"

が成り立つ．これと，Q が P の complete subposet であることより，

$\Vdash_P$ " $\check{\lambda}$ 個の Cohen real over V が存在する"

が成り立つ．そこで，$\Vdash_P$ " $2^\omega \geq \check{\lambda}$ " である．

≪ $\forall m \leq n (\Vdash_P$ " $\exists \check{\kappa}_m$-limit ") について ≫

P が countable chain condition をみたすことと，I が σ-closed により次の補題が成り立つ．

<u>補題4</u>. x を P-name とし，$\Vdash_P$ " $x \subset \omega$ " とすると，適当な $i \in I$ と $P(i)$-name $\bar{x}$ で $\Vdash_P$ " $x = \bar{x}$ " となるものがある．

$\forall m \leq n (\Vdash_P$ " $\exists \check{\kappa}_m$-limit ") を示すため，

$m \leq n \ \&\ G : V$-generic on P

とする．$H = \{s_m^p ;\ p \in G\} \subset S_{\kappa_m}$ とおく．このとき，H は V-generic on S_{κ_m} となるから，$S_\xi (\xi \leq \kappa_m)$ と同時に定めた names $a_\xi, b_\xi (\xi < \kappa_m)$ の解釈がある．それ等を，a_ξ^H, $b_\xi^H (\xi < \kappa_m)$ とする．$X = \langle a_\xi^H \mid \xi < \kappa_m \rangle$ とおく．X が，$V[G]$ において，κ_m-limit となることを示すが，まず，補題1 より，X は 長さ κ_m の $<^*$-下降列である．そこで，

$V[G] \models$ " $\forall y \subset \omega (y \neq \phi \Rightarrow \exists \xi < \kappa_m (\text{not } y <^* a_\xi^H))$ "

を示せばよい．それを示すため，$y \in V[G]$ を，$y \subset \omega$ & $y \nsim \phi$ となる set とする．補題4により，

$$y \in V[G \cap P(i)]$$

となる $i = (\xi_0, \cdots, \xi_n, A) \in I$ が存在する．　$\delta = \kappa_m + 1$ とおく．このとき，b^H_δ は Cohen real over $V[G \cap P(i)]$ となるから，

$$y \setminus b^H_\delta \nsim \phi$$

である．これと，$a^H_\delta \subset b^H_\delta$ より，$y \setminus a^H_\delta \nsim \phi$.

$$\therefore \ \text{not } y \leq^* a^H_\delta$$

《 $\forall \theta$: regular ($\forall m \leq n (\theta \neq \kappa_m) \Rightarrow \Vdash_P$ "$\neg \exists \check{\theta}$-limit") 》

背理法で示すため，

(1) θ : regular & $\forall m \leq n (\theta \neq \kappa_m)$

(2) $\Vdash_P$ " $\langle y_\delta \mid \delta < \check{\theta} \rangle$: $\check{\theta}$-limit "

とする．　各 $\delta < \theta$ に対して，$i_\delta = (\xi^\delta_0, \cdots, \xi^\delta_n, A^\delta) \in I$ と $\alpha_\delta < \bar{\kappa}$ を，y_δ が $P_{\alpha_\delta}(i_\delta)$-name となるようにとっておく．このとき，(1) により，$(\xi_0, \cdots, \xi_n) \in \kappa_0 \times \cdots \times \kappa_n$，$\alpha < \bar{\kappa}$ で

$D = \{ \delta < \theta ; \xi^\delta_0 \leq \xi_0$ & $\cdots$ & $\xi^\delta_n \leq \xi_n$ & y_δ : $P_\alpha(i_\delta)$-name $\}$

が cofinal in θ となるものがとれる．

Case 1.　$\theta < \kappa$ のとき．

$A = \bigcup_{\delta \in D} A^\delta$ とおく．　$|A| \leq \Sigma_{\delta \in D} |A^\delta| < \kappa$ となる．そこで，$i = (\xi_0, \cdots, \xi_n, A)$ とおくと，

$$i \in I \ \& \ \forall \delta \in D (\ y_\delta : P_\alpha(i)\text{-name} \ )$$

となる．そこで，$P_\alpha(i)$-name X を，

$$\Vdash_{P_\alpha(i)} \text{"} X = \{ y_\delta ; \delta \in D \} \text{"}$$

で定めれば，$\Vdash_{P_\alpha(i)} \text{"} X \in \Gamma_\alpha(i) \text{"}$ となるから，$P_{\alpha+1}(i)$-name C で，

$$\Vdash_{P_{\alpha+1}(i)} \text{"} c \subset \omega \;\&\; c \neq \phi \;\&\; \forall x \in X \, (c \leq^* x) \text{"}$$

となるものが存在する． D は θ で cofinal だから，

$$\Vdash_P \text{"} c \subset \omega \;\&\; c \neq \phi \;\&\; \forall \delta < \theta^{\vee} (c \leq^* y_\delta) \text{"}$$

となる．これは，(2) と矛盾する．

Case 2. $\kappa < \theta$ のとき．

各 bijection $\varphi : \lambda \to \lambda$ に対して，φ を canonical に拡張した $\{ f : \exists x \subset \lambda (|x| < \omega \;\&\; f : x \to 2) \}$ 上の permutation $\hat{\varphi}$ が得られるが，それを更に，P 上の permutation にまで拡張できる．この事実と，Δ-system lemma によりこの場合は矛盾となる。