数理解析研究所講究録
第 540 巻 1984 年 145-164

Boole値解析学と作用素環論

東工大・理　小澤　正直 (Masanaô Ozawa)

1. 序論

関数解析学には，無限次元の対象を扱い，その分類を目的とする理論がある。始めに，そのような分類に基数概念が果たしている役割を眺めてみよう。最も基本的なものはHilbert空間論である。Hilbert空間はその完全正規直交族が一意的な濃度をもち，その濃度，即ち，次元によって完全に分類される。von Neumannは，始めてHilbert空間論を定式化し，この事実を用いて，Heisenbergの行列力学とSchrödingerの波動力学の同値性を示した。次に現われるのは，Hilbert空間上の正規作用素に関するスペクトル重複度理論である。Hilbert空間が有限次元のユニタリ空間の拡張であるように，重複度理論は有限次元の正規行列のユニタリ同値の問題をHilbert空間上の正規作用素のユニタリ同値の問題に拡張する。有限次元の正規行列の完全な不変量が固有値とその重複度である

ように，正規作用素のユニタリ同値の完全な不変量はスペクトルと重複度関数である。この理論で重要な点は，重複度というものが基数を用いて完全に記述できるということである。連続スペクトルの場合に，重複度関数の定義はかなり複雑であるが，雑に言って，これはスペクトルの上で定義された，基数を値にとる階段関数で，その値は対応するスペクトルの点（固有値）の重複度を表わす。この理論は更に，可換な C^*ー環の表現のユニタリ同値の問題に容易に拡張される。その次に現われるのはⅠ型の von Neumann 環の構造理論である。中心が1次元である von Neumann 環は因子環とよばれる。von Neumann は射影元の上で定義される次元関数の存在を示して，その値域が $\{0,1,2,\cdots\}$ となるⅠ型，$[0,1]$ となる II_1 型，$[0,+\infty)$ となる II_∞ 型，$\{0,+\infty\}$ となるⅢ型の各型に因子環が分類される事を示した。これは，射影幾何学の無限次元への拡張とみなされ，特に，II_1 型の場合を一般化して，連続幾何学が構成された。Ⅰ型の因子環は次元関数の値域で構造が一意に決定される。値域が $\{0,1,\cdots,n\}$ の場合に，それは $n\times n$ 行列環と同型であり，一般に与えられた次元の Hilbert 空間上の有界作用素の全体と同型である。さて，中心が一般の場合のⅠ型の von Neumann 環は次のように分類される。先ず，Ⅰ型の von Neumann 環は，交換子環（与えられた作用素環のす

べての元と可換な作用素の全体）が可換になるようにHilbert空間上に表現することができる。そこで，この可換環に前述の重複度理論を適用すると，一様重複度をもつ中心的射影の直交族が得られる。この直交族を用いて，全体を直和分解すると，各直和因子がhomogeneous環であるような直和分解が得られ，homogeneous環は対応する射影の重複度から決まるdegreeとよばれる基数によって，構造が一意に決定されるので，この直和分解の一意性から全体の構造が決定される。つまり，I型のvon Neumann環は中心と中心のスペクトルに対して定義された重複度関数の組が分類のための不変量で，この不変量はhomogeneous環への直和分解の仕方を指定している。従って，ここでも不変量が基数を用いて記述される。このI型の構造理論は，Kaplanskyによって，純代数的に構成され，I型のAW^*-環の構造理論に発展する。ところが，この拡張には，一つの明らかな障害が現れてくる。KaplanskyはI型AW^*-環がhomogeneousなAW^*-環の直和に分解されることを示したが，この分解の一意性を示すことができなかった[5]。von Neumann環の場合にはhomogeneous環はdegreeによって構造が一意に決定されたが，AW^*-環の場合にはdegreeの一意性の問題が未解決の問題として残された。この問題は次の様に言い替えられる。λを基数として，可換von Neumann環を成分

とする $\lambda\times\lambda$ 行列環は λ が異なれば同型ではないが，可換 AW*-環を成分とすると λ が異なっても同型になりうるのではないかという事である。この事は，基数 λ が同型の不変量になりえない可能性を示唆し，ここにおいて始めて，不変量を基数を用いて記述することに挫折が起こるのである。

一方，集合論の世界では Cohen による forcing の発見と Boole 値 model の研究によって，基数に関する研究が飛躍的に進歩した。一言で言って，基数というものが非常に相対的な概念であって，普遍類の拡張によって簡単に変化しうるものである事が発見された。このようにして，今や連続体の濃度を全く任意に選べるように model を構成することができる。さて，基数に関するこの新しい知見から前述の I 型の構造理論を新しい見地から見直して，新たな前進を果たすことができるであろうか。以下の各節で，論を進めてみよう。前述の基数の一意性については，次の様な結論が得られる。基数 λ と K を collapse させる forcing condition から完備 Boole 代数 B をつくり，B を射影元の全体とする可換 AW*-環を構成すると，これを成分とする $\lambda\times\lambda$ 行列環と $K\times K$ 行列環は同型になる。これは，前述の基数が B を用いて構成された対象に対しては見かけの基数であって同型の不変量になり得ないことを示している。この様な対象に対して本質的な基数概念は $V^{(B)}$ におけ

る基数であって，同型の不変量を$V^{(B)}$の基数概念を用いて構成する必要を示している。それでは，これまでvon Neumann環の場合には何故$V^{(B)}$の基数を用いずに理論が成功したのであろうか。その解答は，von Neumann環の場合には対応するBがmeasure algebraであるので，$V^{(B)}$の基数概念は絶対的であり，だから，Vの基数概念で十分であったのである。

2. 重複度理論.

始めに，Bをmeasure algebraとして，$V^{(B)}$の基数について考えてみよう。この時，基数概念は絶対的であって，λを$V^{(B)}$の基数とすると，$\lambda = \sum \check{\alpha} b_\alpha$の形に表現される。ここで，$\alpha$は$V$の基数であり，$b_\alpha = [\![\lambda = \check{\alpha}]\!]$で，$\{b_\alpha\}$はBの単位の分解を構成する。ところで，$\sum \check{\alpha} b_\alpha$の形をした数学的対象は$V^{(B)}$の基数として始めて登場したわけではない。実は，重複度関数というものがこれと同じ形のものとして最初に数学に登場したものなのである。簡単のために，対角行列$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix}$の重複度というものを考えてみよう。スペクトルは$\{\lambda_1, \lambda_2\}$の2点集合であり，Bとしてその巾集合を考える。固有値λ_1の重複度が2でλ_2の重複度が1であるから，単位の分解$\{b_1, b_2\}$（但し，$b_1 = \{\lambda_1\}$, $b_2 = \{\lambda_2\}$）に対してこの行列のスペクトルの重複度は$2 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2$と表現できる。これは次の事を意味して

いる。与えられた対角行列は3次元ユニタリ空間に作用していると考えられるが、これは、固有値λ_1に対応する2次元部分空間と固有値λ_2に対応する1次元部分空間の直和に分解され、この行列の作用は各部分空間に対して、スカラーλ_iを掛ける作用と同値である。そこで、この行列の多項式の全体の作用を考えると、e_1の部分では2次元ユニタリ空間のスカラー倍と同値になり、e_2の部分では1次元ユニタリ空間のスカラー倍と同値になるような作用の全体と一致する。つまり、この様な作用は、部分的に2次元で部分的に1次元であるようなユニタリ空間のスカラーによる作用になっている。この様な解釈から、この行列の作用が、$D^{(B)}$の $\lambda = \check{2}\cdot e_1 + \check{1}\cdot e_2$ 次元ユニタリ空間におけるスカラー倍に対応している事が、直ちに見てとれるであろう。この解釈は、無限次元への移行に際してそのまま拡張される。結論として、Hilbert空間上の正規作用素の作用は、部分的にα次元のHilbert空間のスカラー倍と一致できるように分解され、その分解の指標が$\sum \alpha e_\alpha$の形で書ける。ここで、e_αはスペクトル射影からなる単位の分割とみなされる。従って、部分的に多様な次元をもつHilbert空間という概念が、このような正規作用素から生成される可換von Neumann環のHilbert空間への作用とみなされるようになるのである。我々が重複度理論を理解するために必

要な事のすべては，部分的に多様な次元をもつHilbert空間という概念を理解することに尽きるのであって，これがつまり，$V^{(B)}$におけるHilbert空間論に他ならないのである。

$V^{(B)}$におけるHilbert空間を最初に扱ったのはTakeuti [13]であるが，以下Ozawa [7]に従って，概観を与えよう。従来の重積度理論はHalmos [3]に詳しく展開されている。

(Ω,μ)を有限測度空間，Bをその測度代数とする。Hを$V^{(B)}$におけるHilbert空間としよう。Hの$V^{(B)}$における次元を$\dim(H)_B=\lambda$とする。$\lambda=\sum\check{\alpha}b_\alpha$と分解されたとすると，$H$は$b_\alpha$の部分が$\alpha$次元であるような部分的に多様な次元をもつHilbert空間である。$V^{(B)}$における複素数の全体$\mathbb{C}^{(B)}$は(Ω,μ)上の可測関数の全体とμ-a.e.の範囲で一対一に対応する。特にその有界なものの全体$\mathbb{C}^{(B)}_\infty=\{u\in\mathbb{C}^{(B)}\mid\exists r\in R\ [\![|u|<\check{r}]\!]=1\}$は有界可測関数の空間$L^\infty(\Omega,\mu)$と同型になり，これは可換von Neumann環である。次に，Hが$L^\infty(\Omega,\mu)$のあるHilbert空間への作用に対応している事を示そう。$H^{(B)}=\{u\in V^{(B)}\mid[\![u\in H]\!]=1\}$とすると，$H^{(B)}$は加群で，$\alpha\in\mathbb{C}$に対して，$\alpha$によるスカラー倍を$\check{\alpha}$による$V^{(B)}$でのスカラー倍とすれば，$\mathbb{C}$上の線形空間になる。また，$\xi,\eta\in H^{(B)}$ならば，$V^{(B)}$における内積，ノルムは$\mathbb{C}^{(B)}$の元，即ち，可測関数である。そこで，ノルムが$L^2(\Omega,\mu)$に属すものの全体を$H^{(B)}_2$としよう，i.e. $H^{(B)}_2=\{\xi\in H^{(B)}\mid$

$\|\xi\|_B \in L^2(\Omega,\mu)\}$. この時，$\mathcal{D}^{(B)}$ における Schwarz の不等式 $\langle\xi|\eta\rangle_B \leq \|\xi\|_B\|\eta\|_B$ から $\mathcal{D}^{(B)}$ における内積 $\langle\xi|\eta\rangle_B$ は $L^1(\Omega,\mu)$ に属す。従って，$\langle\xi|\eta\rangle = \int_\Omega \langle\xi|\eta\rangle_B\, d\mu$ によって，スカラー $\langle\xi|\eta\rangle$ が得られるが，これがちょうど内積となって，$H_2^{(B)}$ が Hilbert 空間になることが示される。この時，$\mathcal{D}^{(B)}$ のスカラー $\mathbb{C}^{(B)}$ の $H_2^{(B)}$ への作用は，正規作用素になっている事が示され，特に，$\mathbb{C}_\infty^{(B)}$ は $H_2^{(B)}$ 上の可換 von Neumann 環として作用していることがわかる。従って，$L^\infty(\Omega,\mu)$ は，$H_2^{(B)}$ 上の可換 von Neumann 環に表現された。そこで，問題は，その作用の仕方がどうなっているかを知る事で，これが，重複度理論の目的であった。ところで，この問題は，H の $\mathcal{D}^{(B)}$ における次元が $\sum \check{\alpha}\, e_\alpha$ であったという事実で完全に尽されている。e_α は測度代数 B の単位の分解であって，$H_2^{(B)}$ の射影で表現されているので，$\{e_\alpha\}$ に対応して，$H_2^{(B)}$ の $\mathbb{C}_\infty^{(B)}$ の作用に関する不変部分空間の直交族 $\{H_\alpha\}$ が得られ，各 H_α 上では，この作用は $L^\infty(\Omega,\mu)$ の一様重複度 α の表現になっている。従って，一様重複度 α の作用がどんなものかわかれば，全体はそれを $\{e_\alpha\}$ に従ってつなぎ合わせたものと理解される。ところで，これはつまり $\dim(H)=\check{\alpha}$ の場合がわかればよいという事である。最も簡単な場合である $\dim(H)=\check{1}$ の場合は，$L^\infty(\Omega,\mu)$ が $L^2(\Omega,\mu)$ 上に掛け算作用素として作用している作用の仕方と一致するり

同値である。$\dim(H)=\check{\alpha}$ はこの作用の α 個の直和になっている事がわかる。つまり，$\dim(H)=\check{\alpha}$ の時，Hilbert空間 $H_2^{(B)}$ は $\underbrace{L^2(\Omega,\mu)\oplus\cdots\oplus L^2(\Omega,\mu)}_{\alpha\text{個}}$ と同型で，$H_2^{(B)}$ における $\mathbb{C}_\infty^{(B)}$ の作用は各 $L^2(\Omega,\mu)$ に同じ可測関数を掛ける掛け算作用になっている。行列で表現すれば $\begin{bmatrix} f & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f \end{bmatrix}$ $(f\in L^\infty(\Omega,\mu))$ と表現される。この様な作用を一様重複度 α の表現とよぶ。以上の内容はつまり，$\mathbb{C}_\infty^{(B)}$ の $H_2^{(B)}$ に対する作用は，重複度関数が $\dim(H)_B$ で与えられる $L^\infty(\Omega,\mu)$ の作用とユニタリ同値であるという事である。

それでは，勝手に与えられた正規作用素の重複度理論を $V^{(B)}$ の次元論に帰着させる方法を考えよう。そのためには，その正規作用素の作用を $V^{(B)}$ の Hilbert空間のスカラー倍の作用で表現してやればよい。H を通常の Hilbert空間，A を H 上の一つの正規作用素とする。A のスペクトルを $Sp(A)$ として，その上の連続関数環 $C_0(Sp(A))$（無限遠で 0 になる連続関数の全体）の第二共役空間を Z とすると，Z は可換 von Neumann環の構造をもつ。Z はまた，$Sp(A)$ 上の有限測度全体のつくる Banach空間の共役空間で，Z の射影元の全体を B とすると，B は完備 Boole 代数で，$Sp(A)$ 上の有限測度の絶対連続性の同値類のつくるの完備 Boole環を稠密に含んでいる。（Halmos[3] では重複度関数の定義に後者を利用している。）この時，

Aから生成されるvon Neumann環はZの正規表現の像になっている。以下簡単のために、この両者を同一視して話を進めよう。Zのスペクトルを利用して、ある測度空間(Ω, μ)を構成して、$Z \cong L^\infty(\Omega, \mu)$とできる。この時、Bはこの測度代数と同型になる。このBを用いて、$V^{(B)}$を構成する。次に、Hを$V^{(B)}$の中の構造とみなせるようにする。$\mathbb{C}^{(B)}_\infty$とZは同型なので、Zは$V^{(B)}$の複素数体とみなせる。従って、Hは$V^{(B)}$の複素線型空間とみえる。次に、$V^{(B)}$における内積を構成する。Hが本来持っている内積は$\mathbb{C}$に対して線型であっても、$\mathbb{C}^{(B)}_\infty$に対して線形でないから新しく定義しなくてはならない。Hのベクトルξ, ηに対して、$\mu_{\xi,\eta}(b) = \langle b\xi | \eta \rangle$ $(b \in B)$という関数$\mu_{\xi,\eta}$を考えると、μに関して絶対連続なB上の符号付測度である。そこで、Radon-Nikodymの定理から
$\langle \xi | \eta \rangle_B = d\mu_{\xi,\eta} / d\mu$ とおくと $\langle \xi | \eta \rangle_B \in L^1(\Omega, \mu)$となっている。$\mathbb{C}^{(B)}$は$\Omega$上の可測関数からなっているので、$\langle \xi | \eta \rangle_B \in \mathbb{C}^{(B)}$である。この$\langle \xi | \eta \rangle_B$は$\mathbb{C}^{(B)}$-値の内積の性質をもつ事を示すことができる。但し、一つだけまずい所がある。それは、
$\langle \xi | \xi \rangle_B = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ という性質であるが、これは$V^{(B)}$で見ると $[\![\langle \xi | \xi \rangle_B = 0]\!] = [\![\xi = 0]\!]$ でなければならない。そのためには、Hのベクトルの間の相等関係を2-値からB-値に修正しなければならない。それには、上記の関係が成立するよ

うに定めればよいので、$[\![\xi=\eta]\!] = [\![\langle \xi-\eta|\xi-\eta\rangle_B=0]\!]$ によって $[\![\xi=\eta]\!]$ が定まればよい。ところが、$V^{(B)}$ の元の定義は直接には所属関係から定義して、相等関係は後から決まってくる。そこで、望みの相等関係を実現するために次のように考える。集合論で相等関係を所属関係に帰着する方法として同値類の考え方があるので、それを利用する。つまり、ξ, η を考える代りに、それぞれの同値類 $[\xi], [\eta]$ を考える。すると $[\xi]=[\eta] \Leftrightarrow \eta\in[\xi]$ が成立して、相等関係が所属関係に帰着される。つまり、$[\![[\check\xi]=[\check\eta]]\!] = [\![\langle\xi-\eta|\xi-\eta\rangle_B=0]\!]$ $= [\![\check\eta\in[\check\xi]]\!]$ となればよいから、H の元を $V^{(B)}$ の元として定義するには、各ベクトル $\xi\in H$ に対して、$\mathrm{dom}(\tilde\xi)=\{\check u \mid u\in H\}$, $\tilde\xi(\check\eta) = [\![\langle\xi-\eta|\xi-\eta\rangle_B=0]\!]$ と定義すればよい。
その上で、$\tilde H=\{\tilde\xi \mid \xi\in H\}\times\{1\}$ とすれば、H のレプリカで、望みの相等関係をもつ $V^{(B)}$ の元 $\tilde H$ を定義することができる。
このようにして、H から $V^{(B)}$ の Hilbert空間 $\tilde H$ が構成される。
あとは、$\tilde H$ に対して前述の $V^{(B)}$ における Hilbert空間論を適用すれば、A と H に関する重複度理論が得られる。何故ならば、構成の仕方から、$\mathcal{A}$ の H に対する作用は $\mathbb{C}^{(B)}_\infty$ の $\tilde H^{(B)}_2$ に対する作用とユニタリ同値であり、$\mathbb{C}^{(B)}_\infty$ の $\tilde H^{(B)}_2$ に対する作用は、$\tilde H$ の $V^{(B)}$ における次元 $\dim(\tilde H)_B$ で完全に記述されている。つまり、$\dim(\tilde H)_B$ が A の H 上の作用のスペクトル重複度関数で

あって，完全なユニタリ不変量になっている。この事は，次元がHilbert空間の完全な不変量であるという最も基本的な定理を$\mathcal{V}^{(n)}$で解釈することにより，重複度理論の基本定理が得られる事を示している。

3．Von Neumann環と因子環

Hを Hilbert空間とする。H上の有界作用素の集合$\mathcal{S}$に対して$\mathcal{S}$の交換子$\mathcal{S}'$とは，$\mathcal{S}$のすべての元と可換な有界作用素の全体である。H上の有界作用素からなる自己共役稠素線型環Mが$M''=M$をみたす時，H上のvon Neumann環とよばれる。$M'\cap M$をMの中心とよび，中心が1次元，i.e. $M'\cap M=\mathbb{C}1$の時，因子環とよばれる。von Neumann環Mの射影元p, qに対して，$pq=q$の時，$q\leq p$と定義する。また，$u^*u=p$ $uu^*=q$となるMの元uが存在する時，pとqは同値であるとよばれ$p\sim q$と書く。射影元$p\in M$が，任意の射影元qに対して，$p\sim q\leq p$ならば$p=q$となる時，pは有限であるとよばれる。MがH上の有界作用素の全体の時，pが有限である事は，pが有限次元の値域をもつ事と同等である。この時，$p\sim q$は，値域の間にユニタリ作用素が存在するので，pの値域とqの値域が等しい次元をもつ事を意味し，$q\leq p$はqの値域がpの値域の閉部分空間である事を意味する。従って，

qの値域の正規直交基底はpの値域の正規直交基底の等濃度の部分集合であるが，これから両者が等しいことが含意されるということは，pの値域の正規直交基底が有限集合であることを意味するからである。Mの射影元は，pMpが可換になる時，可換（abelian）とよばれる。可換射影はすべて有限である。可換射影をもつ因子環はI型とよばれ，可換射影をもたずに有限射影をもつ因子環はII型，有限射影をもたない因子環はIII型とよばれる。（但し，零射影は除いて考える。）

von Neumann環に対する型の定義はもう少し複雑である。von Neumann環Mの中心に属す射影元の全体をBとすると，Bは完備Boole代数である。Mは，任意の$p \in B$に対して，$q \leq p$となる可換射影qが存在する時，I型とよばれ，可換射影は存在しないが，任意の$p \in B$に対して，$q \leq p$となる有限射影qが存在する時，II型とよばれる。有限射影が存在しない時，III型とよばれる。この意味は，Bをforcing conditionの集まりと考えて，任意の$p \in B$が「I型である」という条件をforceする時MがI型であると定義しているのである（他の型も同様）。この様に，von Neumann環の理論は因子環の理論を中心に関するforcing languageで翻訳したものになっている。この事を$V^{(B)}$を用いて正確に記述しよう。詳しくは，Takeuti [13]を参照されたい。

Hを$V^{(B)}$における Hilbert 空間，Mを$V^{(B)}$におけるH上の因子環とする。Bは前節の様に測度代数として，Zも前節と同様とする。前節で示したように，HからVの Hilbert 空間$H_2^{(B)}$を構成することができる。また，Mの元はHに作用しているから$H_2^{(B)}$にも作用していると考えられる。そこで，$M_\infty^{(B)} = \{x \in M^{(B)} \mid \exists r \in R\ [\![\|x\|_B \leq \check{r}]\!] = 1\}$とすると，$x \in M_\infty^{(B)}$の$H_2^{(B)}$上の作用は有界作用素で，$M_\infty^{(B)}$は$H_2^{(B)}$上の von Neumann 環になっている。$M_\infty^{(B)}$が自己共役線型環であることは，$M$の$V^{(B)}$における対応する性質から得られ，また，$[\![M'' = M]\!] = 1$から，$M_\infty^{(B)\prime\prime} = M_\infty^{(B)}$が得られる。この時，$M$が$V^{(B)}$で因子環であったからその中心は$\mathbb{C}^{(B)}$であり，$Z = \mathbb{C}_\infty^{(B)}$であったから，$M_\infty^{(B)}$の中心は$Z$と同型になる。従って，$V^{(B)}$の因子環$M$に対して$M_\infty^{(B)}$は中心が$Z$の von Neumann 環になることが示される。

逆に，Mを Hilbert 空間H上のVにおける von Neumann 環で，中心がZ，Zの射影元の全体をBとする。前節の構成に従って，ZとBを用いて，$V^{(B)}$の Hilbert 空間$\tilde{H}$をつくり，$\mathbb{C}_\infty^{(B)} \cong Z$とすることができる。この時，$x \in M$に対して，その$V^{(B)}$での作用　$\tilde{x} : \tilde{\xi} \to \widetilde{x\xi}$を考えると，これは$\tilde{H}$上の有界線型作用素になっている。$\tilde{M} = \{\tilde{x} \mid x \in M\} \times \{1\}$とすると，$\tilde{M}$は$V^{(B)}$における$\tilde{H}$上の因子環である。そこで，前述の構成をくり返すと，$\tilde{M}_\infty^{(B)}$は$\tilde{H}_2^{(B)}$上の von Neumann 環になり，この時，

$\tilde{M}^{(B)}_{\omega}$ の $\tilde{H}^{(B)}_{2}$ 上の作用は M の H 上の作用とユニタリ同値になる。以上の事から，次の結論が得られる。M を Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環で，その中心の射影元の全体を B とすると，$V^{(B)}$ において，Hilbert 空間 $\tilde{H}$ と因子環 $\tilde{M}$ が存在して，M と $M^{(B)}_{\omega}$ の作用はユニタリ同値である。従って，任意の von Neumann 環は $V^{(B)}$ の因子環から得られるので，von Neumann 環に関する定理は因子環に関する定理の $V^{(B)}$ での解釈として得られる。この移行原理において，型の概念が絶対的である事は von Neumann 環の型の定義が一種の forcing language で述べられていることから示される。実際，von Neumann 環 M が I 型 $\Leftrightarrow \forall p \in B$ $[\![$因子環 $\tilde{M}$ が I 型$]\!] \geq p \Leftrightarrow [\![$因子環 $\tilde{M}$ が I 型$]\!] = 1$ が成立する。他の型についても勿論，同様である。

さて，この型の絶対性を用いて，I 型 von Neumann 環の構造定理を導くことができる。M を I 型 von Neumann 環とする。B を M の中心に属する射影の全体とする。M から $V^{(B)}$ の因子環 $\tilde{M}$ を構成すると，$[\![\tilde{M}$ は I 型$]\!] = 1$ である。一方，因子環論から，I 型の因子環はある Hilbert 空間 H 上の有界作用素の全体 $\mathcal{L}(H)$ と同型であるから，$\exists H \in V^{(B)}$ $[\![H$ は Hilbert 空間で $\tilde{M} \cong \mathcal{L}(H)]\!] = 1$ が成立する。よって，$M \cong \mathcal{L}(H)^{(B)}_{\omega}$ となる。そこで，$\dim(H)_B = \sum_\alpha \alpha\, b_\alpha$ と H の次元を $V^{(B)}$ で分解すると，この分解が M の構造を決定する。$\{b_\alpha\}$ は M の中心的射影

元からなる単位の分解なので，$b_\alpha M$ は M の直和因子であり，$M \cong \sum b_\alpha M$ と直和分解される。各直和因子 $b_\alpha M$ は，H の b_α の部分を不変にしていて，$[\![\dim(H)_B = \check{\alpha}]\!] = b_\alpha$ であるから，$H_\alpha = b_\alpha H$ とすれば，$b_\alpha M \cong \mathcal{L}(H_\alpha)^{(B)}_\infty$ で，H_α は前節で示した様に $b_\alpha Z$ が一様重複度 α で作用している。結局，$\mathcal{L}(H_\alpha)^{(B)}_\infty$ は $b_\alpha Z$ の $\alpha \times \alpha$ 行列環 $M_\alpha(b_\alpha Z)$ と同型であることを示すことができて，$M \cong \sum_\alpha M_\alpha(b_\alpha Z)$ が成立する。可換 von Neumann 環の $\alpha \times \alpha$ 行列環と同型な von Neumann 環を homogeneous 環とよび α をその degree とよぶ。従って，I 型 von Neumann 環は一意に定まる degree をもつ homogeneous 環に直和分解されることがわかる。ここで，homogeneous 環の degree の一意性は，$M_\alpha(Z) \cong M_\beta(Z) \Leftrightarrow [\![\mathcal{L}(\ell^2(\check{\alpha})) \cong \mathcal{L}(\ell^2(\check{\beta}))]\!] = 1$
$\Leftrightarrow [\![\ell^2(\check{\alpha}) \cong \ell^2(\check{\beta})]\!] = 1 \Leftrightarrow [\![\mathrm{card}(\check{\alpha}) = \mathrm{card}(\check{\beta})]\!] = 1$
$\Leftrightarrow [\![\check{\alpha} = \check{\beta}]\!] = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ から得られる。従って，この分解は一意であり，そこに現われる degree の組は同型の不変量になる。

4. I 型 AW*-環の構造

これまで，重複度理論と I 型 von Neumann 環の構造理論が，$V^{(B)}$ の Hilbert 空間の次元論とどうかかわっているかを見てきた。そこでは，V の基数概念が $V^{(B)}$ の基数を用いて，それら

の構造を表わす指標になる過程が明らかにされたであろう。これらの理論では，Bは常に測度代数であったから，$V^{(B)}$の基数は絶対的であり，従って，$V^{(B)}$の基数を考える代りに，Vの基数とBの単位の分解の組を考える事により全く同じ役割を果たすことができた。この事が，$V^{(B)}$が知られる以前にこれらの理論が成功した理由である。ところで，von Neumann環からAW^*-環へ移行すると，Bはもはや測度代数とは限らない。従って，$V^{(B)}$の基数概念を，Vの基数とBの単位の分解で代用する今までの理論には限界が現われる。$V^{(B)}$の基数には cardinal collapsing という現象が現われてくるので，Vの基数を不変量にすることができなくなるというのが，AW^*-環のI型理論の挫折の原因である。また，AW^*-環の場合には，VにおけるHilbert空間への都合の良い表現（$M''=M$となるような）が存在しなくなるので，事態は更にやっかいである。従って，これまでのやり方で$V^{(B)}$に対応物を構成することもできなくなるので新しい構成法が必要となる。しかし，事態の本質は変わらないのであって，I型AW^*-環は$V^{(B)}$のHilbert空間の上の有界作用素の全体として表現することができ，そのHilbert空間の次元である$V^{(B)}$の基数が同型の不変量を構成することがわかるのである。議論は，更に専門的になるので詳細はOzawa [9] に譲って，$V^{(B)}$の側から基数概念の破れ

を簡単に眺めることにしよう。

Bを任意の完備Boole代数として，Hを$V^{(B)}$のHilbert空間，$\mathcal{L}(H)$を$V^{(B)}$のH上の有界作用素の全体とする。まず，B上に測度が存在しない場合があるから，HからHilbert空間$H_2^{(B)}$を構成することはあきらめなくてはならない。一方，$C_\infty^{(B)}$は，BのStone表現空間上の連続関数の全体と同型で，可換AW^*-環になる。さて，$\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)}=\{x\in\mathcal{L}(H)^{(B)}\mid\exists r\in R,\ [\![\,\|x\|\leq\check{r}\,]\!]=1\}$を考えると，これはI型$AW^*$-環になっている。von Neumann環になるための必要十分条件は，B上に十分多くの測度が存在することである。Hの$V^{(B)}$での次元を$\dim(H)_B=\sum\check{\alpha}b_\alpha$とすると，前節と同様に，$\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)}\cong\sum M_\alpha(b_\alpha Z)$（但し，$Z\cong C_\infty^{(B)}$）が成立する。従って，I型$AW^*$-環はhomogeneous AW^*-環に直和分解される。問題は，この分解の仕方をVの基数概念で指定できるかということである。$\dim(H)_B=\check{\lambda}$という簡単な場合を考えてみよう。この時，$\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)}\cong M_\lambda(Z)$となる。ところが，この基数$\lambda$はI型$AW^*$-環$\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)}$の構造を示す指標にはならない場合がある。例えば，$\lambda=\aleph_\alpha$で$[\![\,\aleph_\beta=\check{\lambda}\,]\!]=1$だとしよう。$\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)}$は$\alpha$番目の同型類に属するのか，$\beta$番目の同型類に属するのかという問題が生じる。$\alpha$が有意味ならば，構造は$V$の基数で記述された事になるが，$\alpha$が無意味で$\beta$が有意味ならば，もはや，この構造は$V$の基数では記述できな

くて，$V^{(B)}$の基数で記述すべきものなのである。結論は，I型のAW*-環の構造を決定する指標は$V^{(B)}$の基数であって，Vの基数でないということである。Vの二つの無限基数κ, λに対して，forcingの議論で知られているように，ある完備Boole代数Bが存在して，$[\![\operatorname{card}(\check{\kappa}) = \operatorname{card}(\check{\lambda})]\!] = 1$となる。この$V^{(B)}$のHilbert空間$H_\lambda = \ell^2(\check{\lambda})$, $H_\kappa = \ell^2(\check{\kappa})$に対して，二つのI型AW*-環$\mathcal{L}(H_\lambda)^{(B)}_\omega$, $\mathcal{L}(H_\kappa)^{(B)}_\omega$をつくる。すると，$\mathcal{L}(H_\lambda)^{(B)}_\omega \cong M_\lambda(Z)$, $\mathcal{L}(H_\kappa)^{(B)}_\omega \cong M_\kappa(Z)$が示される。一方，$[\![\ell^2(\check{\kappa}) \cong \ell^2(\check{\lambda})]\!] = 1$が$[\![\dim(\ell^2(\check{\kappa})) = \operatorname{card}(\check{\kappa})]\!] = 1$等から得られるので，$\mathcal{L}(H_\lambda)^{(B)}_\omega \cong \mathcal{L}(H_\kappa)^{(B)}_\omega$である。従って，この$B$に対して，$Z = \mathbb{C}^{(B)}_\omega$とすると$Z$の$\lambda\times\lambda$行列環と$\kappa\times\kappa$行列環は同型である。つまり，$Z$の行列環の同型の指標は，$\operatorname{card}(\check{\lambda})$の方である。

それでは，$V^{(B)}$の基数を用いて，I型AW*-環の完全な不変量を構成するにはどうすればよいかという事については，Ozawa [9] を参照されたい。また，AW*-環の理論と$V^{(B)}$の因子環の理論の関係についてはOzawa [11] に詳しく述べられている。更に，理論の代数的展開については，Eda [2] に詳しく述べられている。そこでは，自己単射的正則環の次元論に，前述のAW*-環におけるものと同様の事態が起こる事が示されている。

References.

[1] Berberian, S. K., Baer *-rings, Springer, Berlin, 1972.

[2] Eda, K., Maximal quotient rings and Boolean extensions, preprint.

[3] Halmos, P. R., Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

[4] Jech, T., Set Theory, Academic Press, New York, 1978.

[5] Kaplansky, I., Algebras of type I, Ann. of Math., 56 (1952), 460-472.

[6] Kaplansky, I., Modules over operator algebras, Amer. J. Math., 75 (1953), 839-858.

[7] Ozawa, M., Boolean valued interpretation of Hilbert space theory, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 609-627.

[8] Ozawa, M., Boolean valued analysis and type I AW*-algebras, Proc. Japan Acad., 59 A (1983), 368-371.

[9] Ozawa, M., A classification of type I AW*-algebras and Boolean valued analysis, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[10] Ozawa, M., Non-uniqueness of the cardinality attached to homogeneous AW*-algebras, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[11] Ozawa. M., A transfer principle from von Neumann algebras to AW*-algebras, to appear in J. London Math. Soc.

[12] Takeuti, G., Two applications of logic to mathematics, Iwanami and Princeton University Press, Tokyo and Princeton, 1978.

[13] Takeuti, G., Von Neumann algebras and Boolean valued analysis, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 1-21.

[14] Takeuti, G. and Zaring, W. M., Axiomatic set theory, Springer, Heidelberg, 1973.

[15] Topping, D. M., Lectures on von Neumann algebras, Van Nostrand, London, 1971.