数理解析研究所講究録
第 540 巻 1984 年 165-177

Strongly compacts についての二つの定理

福島高専　阿部吉弘（Yoshihiro Abe）

Strong compactness と supercompactness の関係について二つの視点から考察する。$\mathcal{U}$を$P_\kappa\lambda$上のκ-complete ultrafilter とする時

(1) $\mathcal{U}$ is fine $\longleftrightarrow \forall\alpha<\lambda(\{x\in P_\kappa\lambda \mid \alpha\in x\}\in\mathcal{U})$

(2) $\mathcal{U}$ is normal $\longleftrightarrow \forall f: P_\kappa\lambda\to\lambda\ (\forall x\in P_\kappa\lambda\,(f(x)\in x)\longrightarrow$
$\longrightarrow \exists\gamma<\lambda(\{x\in P_\kappa\lambda \mid f(x)=\gamma\}\in\mathcal{U}))$

(3) κ is λ-compact $\longleftrightarrow \exists\mathcal{U}$: fine ultrafilter on $P_\kappa\lambda$

(4) κ is λ-supercompact $\longleftrightarrow \exists\mathcal{U}$: normal ultrafilter on $P_\kappa\lambda$

(5) κ is strongly compact $\longleftrightarrow \forall\lambda\geq\kappa$($\kappa$ is λ-compact)

(6) κ is supercompact $\longleftrightarrow \forall\lambda\geq\kappa$($\kappa$ is λ-supercompact)

である。（Large cardinal については [7] を参照）

§1. ある種の fine ultrafilter とその normality

κを strongly compact cardinals の limit になってい

るような measurable cardinal とする.（このような κ の存在は. extendible cardinal の仮定より得られる）T. K. Me--nas はこのような κ について以下の結果を出している。

$\alpha<\kappa$ で α が strongly compact の時, $\mathcal{U}_\alpha$ を $P_\alpha\lambda$ 上の fine ultrafilter とする。$\mathcal{D}$ を κ-complete ultrafilter on κ で $\{\alpha<\kappa \mid \alpha \text{ is strongly compact}\}\in\mathcal{D}$ を満たすものとする.（これらは κ についての仮定から存在が保証される） $\mathcal{U}$ を次のように定める.

$$X\in\mathcal{U} \longleftrightarrow X\subset P_\kappa\lambda \wedge \{\alpha<\kappa \mid X\cap P_\alpha\lambda\in\mathcal{U}_\alpha\}\in\mathcal{D}$$

定理（Menas） （Ref. [5]）

(i) $\mathcal{U}$ は fine ultrafilter.（従って κ は strongly compact）

(ii) κ が仮定を満たすような最小のものならば，κ は 2^κ-supercompact でない.

(iii) λ が regular で $\{\alpha<\kappa \mid \mathcal{U}_\alpha \text{ is minimal}\}\in\mathcal{D}$ ならば $\mathcal{U}$ は normal でない。

ただし，$\mathcal{U}_\alpha$ が minimal とは.

$\forall g: P_\alpha\lambda \to P_\alpha\lambda$ s.t. $\{X\subset P_\alpha\lambda \mid g^{-1}(X)\in\mathcal{U}_\alpha\}$ が fine ultrafilter on $P_\alpha\lambda$ $\exists A\in\mathcal{U}_\alpha$ (g is injective on A) ということで、

$(\lambda:\text{regular or } cf(\lambda)<\alpha) \wedge \mathcal{U}_\alpha:\text{normal} \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha:\text{minimal}$

ということが証明される。

我々はこの結果を拡張し、上のように定められた $\mathcal{U}$ はどのような条件でも normal にはならないことを示す.

定理 1. $\mathcal{U}$ は normal でない。

(証明) $x\in P_\kappa\lambda$ に対し、α_x = the least strongly compact cardinal $>|x|$ とする.

(1) $x\in P_\alpha\lambda \wedge \alpha:\text{strongly compact} \longrightarrow \alpha_x\leq\alpha$

次に, $f: P_\kappa\lambda \longrightarrow P_\kappa\lambda$ を $f(x)=x\cap\alpha_x$ で定める。

α : strongly compact $<\kappa$ とする。$\alpha<\beta<\kappa$ とすると, $\beta<\kappa\leq\lambda$ で $\mathcal{U}_\alpha$ は fine だから、

$$A=\{x\in P_\alpha\lambda \mid \beta\in x\}\in\mathcal{U}_\alpha .$$

$x\in A$ に対し, (1) を用いて

$$x\cap\alpha_x\subseteq x\cap\alpha\subsetneq x\cap\kappa$$

($\beta\notin x\cap\alpha$, $\beta\in x\cap\kappa$ に注意)

ゆえに

$$\{x\in P_\alpha\lambda \mid x\cap\alpha_x\subsetneq x\cap\kappa\}\in\mathcal{U}_\alpha .$$

結局 $\{x\in P_\kappa\lambda \mid x\cap\alpha_x\subsetneq x\cap\kappa\}\in\mathcal{U}$ となる。

これは, $[f]_{\mathcal{U}}\subsetneq[\langle x\cap\kappa \mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_{\mathcal{U}}$ を示している。

(2) $[f]_{\mathcal{U}}\subsetneq[\langle x\cap\kappa \mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_{\mathcal{U}}$

$j: V \longrightarrow M \simeq V^{P_\kappa\lambda}/\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}$ から induce される cannonical な elementary embedding とすると

(3) $M \models$ "$j(\kappa)$ is strongly compact $> \lambda$"

(4) $M \models$ "$[\langle \alpha_x \mid x \in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}$ is the least strongly compact $> [\langle |x| \mid x \in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}$"

$\mathcal{U}$ は fine だから $\forall\alpha<\lambda(\{x\in P_\kappa\lambda \mid \alpha\in x\}\in\mathcal{U})$ である.

(5) $M \models$ "$\forall\alpha<\lambda(j(\alpha)\in[\langle x\mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U})$"

また, ultrapower の Løs の定理より

(6) $M \models$ "$|[\langle x\mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}| = [\langle |x| \mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}$"

(5) と (6) より

(7) $$\underset{\displaystyle [\langle |x| \mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}}{\underset{\parallel}{|[\langle x\mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}|^M}} \geq |[\langle x\mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}| \geq \lambda$$

(3), (4), (7) より

(8) $M \models$ "$\lambda < [\langle\alpha_x\mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U} \leq j(\kappa)$"

したがって

$\kappa = j''\kappa\cap\kappa \subset [\langle x\cap\alpha_x \mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}$ つまり

(9) $\kappa \subset [f]_\mathcal{U}$

(2) と (9) から

(10) $\kappa < [f]_\mathcal{U} \subsetneq [\langle x\cap\kappa\mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U}$

しかし, もし $\mathcal{U}$ が normal なら

(11) $[\langle x\cap\kappa \mid x\in P_\kappa\lambda\rangle]_\mathcal{U} = \kappa$ である.

ゆえに $\mathcal{U}$ は normal でない. Q.E.D.

このように $\mathcal{U}$ は normal になり得ないのだが, ある条件が整えば, 弱い normality を持つ.

Definition. $\mathcal{U}$ is weakly normal iff
$$\forall f : P_\kappa\lambda \to \lambda\ (\forall x \in P_\kappa\lambda\ (f(x) \in x) \to \exists \gamma < \lambda\ (\{x \in P_\kappa\lambda \mid f(x) \leq \gamma\} \in \mathcal{U}))$$

定理 2 $\{\alpha < \kappa \mid \mathcal{U}_\alpha \text{ is weakly normal}\} \in \mathcal{D}$ で $\lambda > 2^\kappa$ が 次のいずれかを満たすとする.

(i) $\lambda = (2^\kappa)^+$

(ii) $\lambda = \xi^{++}$ for some ξ

(iii) λ : limit cardinal で $cf(\lambda) \neq \kappa$

(iv) $\lambda = \xi^+$ で ξ が(iii) を満たす.

この時, $\mathcal{U}$ は weakly normal.

補題 1. (Ref. [1], [3])

ν を strongly compact cardinal, W を fine ultrafilter on $P_\nu\eta$ とする. $\zeta > 2^{\eta^{<\nu}}$ が 次の (i)~(iii) を満たすなら $j(\zeta) = \zeta$. ($j : V \to M \simeq V^{P_\nu\eta}/W$)

(i) $\zeta = \xi^{++}$ for some ξ

(ii) ζ is a limit cardinal $\wedge$ $(cf(\zeta) < \nu \vee cf(\zeta) > \eta^{<\nu})$

(iii) $\zeta = \xi^{+}$ for some ξ で ξは(ii)を満たす.

(iv) $\zeta = (2^{\eta^{<\nu}})^{+}$

補題 2

(i) Wを fine ultrafilter on $P_\kappa \kappa$ で Dを

$X \in D$ iff $X \subset \kappa \wedge \exists Y \in W (X = Y \cap \kappa)$

で定める。この時、Dは κ-complete ultrafilter on κ.

(ii) Dを κ-complete ultrafilter on κ とし, Wを

$X \in W$ iff $X \subset P_\kappa \kappa \wedge X \cap \kappa \in D$

で定めると, Wは fine ultrafilter on $P_\kappa \kappa$.

(定理 2 の証明) $\{x \in P_\kappa \lambda \mid f(x) \in x\} \in \mathcal{U}$ だから.

$\{\alpha < \kappa \mid \{x \in P_\alpha \lambda \mid f(x) \in x\} \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{V}$. $\mathcal{U}_\alpha$ の weakly normal という性質から.

(1) $\{\alpha < \kappa \mid \{x \in P_\alpha \lambda \mid f(x) \leq \gamma_\alpha\} \in \mathcal{U}_\alpha$ for some $\gamma_\alpha < \lambda\} \in \mathcal{V}$.

$j_{\mathcal{V}} : V \longrightarrow M \simeq V^\kappa / \mathcal{V}$, $[\langle \gamma_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle]_{\mathcal{V}} = \gamma$ とする.

$\gamma_\alpha < \lambda$ より

(2) $\gamma < j_{\mathcal{V}}(\lambda)$.

補題 1, 2 で η, νを κとすると.

(3) $j_U(\lambda) = \lambda.$

(2) と (3) から

(4) $\gamma < \lambda.$

$\gamma \leq j_U(\gamma)$ は明らかだから

(5) $\{\alpha < \kappa \mid \gamma_\alpha \leq \gamma\} \in U$

(1) と (5) より

(6) $\{\alpha < \kappa \mid \{x \in P_\alpha\lambda \mid f(x) \leq \gamma\} \in \mathcal{U}_\alpha\} \in U$

ゆえに

$$\{x \in P_\kappa\lambda \mid f(x) \leq \gamma\} \in \mathcal{U} \quad \text{and} \quad \gamma < \lambda.$$

Q. E. D.

§2. The least strongly compact cardinal について.
以下の一連の結果がある.

(A) Magidor ([4]): Con (ZFC + κ is strongly compact)
→ Con (ZFC + κ is strongly compact + κ is the least measurable)

(B) Magidor ([4]): Con (ZFC + κ is supercompact) →
→ Con (ZFC + κ is supercompact + κ is the least strongly compact)

(C) Apter ([2]): Con (ZFC + κ is a supercompact limit of supercompact cardinals) → Con (ZFC +

$+ \kappa$ is the least strongly compact $+ \kappa$ is $\phi(\kappa)$-
-supercompact $+ \forall\alpha<\kappa$ (α is not $\phi(\alpha)$-supercompact)).

ただし, $\phi: On \to On$ Σ_2-increasing function で, (1), (2) を満たす.

(1) $|P| = \kappa \wedge \alpha > \kappa \longrightarrow \phi^{V}(\alpha) = \phi^{V[G]}(\alpha)$

(2) $\alpha<\beta \wedge \alpha$ is $\phi(\alpha)$-supercompact $\wedge\ \beta$ is $\phi(\beta)$-super-
-compact $\longrightarrow \phi(\alpha)<\beta$.

ここでは, Apter の結果が, もっと弱い仮定から得られることを示す。

定理 3. $V \vDash$ "ZFC $+ \kappa$ is supercompact" とする. $\phi: On \to On$ increasing function が, 次の条件を満たすとする.

(a) $\alpha > |Q| \to \phi^{V}(\alpha) = \phi^{V[G]}(\alpha)$

(b) ある formula ψ が存在して

(1) $\forall\alpha\,(\phi(\alpha) < \psi(\alpha))$

(2) $\alpha<\beta \wedge \beta$ is $\phi(\beta)$-supercompact $\longrightarrow \psi(\alpha)<\beta$

(3) M, N: ZFC の models で $R(\psi^{M}(\alpha)) \cap M =$
$= R(\psi^{M}(\alpha)) \cap N$ ならば $\phi^{M}(\alpha) = \phi^{N}(\alpha)$.

このとき $\exists P$ s.t. $V[G] \vDash$ "κ is the first strongly compact + κ is $\phi(\kappa)$- supercompact + $\forall\alpha<\kappa$ (α is not $\phi(\alpha)$- supercompact)"

(証明) Forcing notion P は Apter のものと同じ。

$P_0=\{\phi\}$. λ_0 = the least cardinal λ that is $\phi(\lambda)$- supercompact.

P_α = the iterated Prikry ordering on $\{\lambda_\beta \mid \beta<\alpha\}$

λ_α = the least ordinal λ s.t. $\exists p\in P_\alpha$ ($p\Vdash$"λ is $\phi(\lambda)$- supercompact")

$P=P_\kappa$.

以下の議論は, iterated Prikry ordering について standard なものなので, [4], [2] を参照されたい。なぜ, Apter の仮定を弱めることができるのかだけ記述し, 他の証明は省略する。([6] より $V\models$"$2^\kappa=\kappa^{++}$" としてよい)

補題 1.

(1) $\alpha<\beta \rightarrow \lambda_\alpha<\lambda_\beta$

(2) $\{\lambda_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ は unbounded in κ.

(3) $\lambda_\kappa \geq \kappa$.

補題 2.

$V[G]\models$"κ is the first strongly compact + $\forall\alpha<\kappa$ (α is not $\phi(\alpha)$- supercompact)"

$A = \{\alpha \in On \mid \exists p \in P (p \Vdash \text{“}\alpha = \psi(\kappa)\text{”})\}$ とすると，
$|P| \leq 2^\kappa$ より $|A| \leq 2^\kappa$．$\delta = \sup A + 1$ とする．したがって，

(1) $\forall p \in P \ (p \Vdash \text{“}\delta > \psi(\kappa)\text{”})$

$j : V \longrightarrow M$ を κを critical point とし，
${}^{|R(\delta)|}M \subset M$ を満たすものとする．$j(P)_\kappa = P$ で
$|R(\delta)| > 2^\kappa$ が成立する。

補題 3. $G \subset P$ に対し
G is V-generic $\longleftrightarrow$ G is M-generic.

補題 4

(1) G: V-generic on $P \wedge x \in V[G] \wedge x \subset M[G] \wedge$
$\wedge\ V[G] \models \text{“}|x| \leq |R(\delta)|\text{”} \longrightarrow x \in M[G]$

(2) $\phi^{V[G]}(\kappa) = \phi^{M[G]}(\kappa)$

（証明） (1) $x \subset On$ としてよい．$\underset{\sim}{x}$ を x の term とする．
Pは κ^+-c.c. を満たすので，

$\exists D \in V \ (|D| \leq |R(\delta)| \wedge \forall p \in P \ (p \Vdash \text{“}\underset{\sim}{x} \subset \check{D}\text{”}))$

$\alpha \in D$ に対し，A_α = a maximal disjoint subset of
$\{p \in P \mid p \Vdash \text{“}\check{\alpha} \in \underset{\sim}{x}\text{”}\}$ とする．

$|A_\alpha| \leq \kappa$ ，$|D| \leq |R(\delta)|$ ，${}^{|R(\delta)|}M \subset M$ より

$\langle A_\alpha \mid \alpha \in D \rangle \in M$ を得る.

ここで, $x = \{\alpha \in D \mid A_\alpha \cap G \neq \phi\}$ だから $x \in M[G]$

(2) (1)により

$$R(\delta) \cap V[G] = R(\delta) \cap M[G].$$

$\psi^{V[G]}(\kappa) < \delta$ だから

$$R(\psi^{V[G]}(\kappa)) \cap V[G] = R(\psi^{V[G]}(\kappa)) \cap M[G].$$

ゆえに $\phi^{V[G]}(\kappa) = \phi^{M[G]}(\kappa)$. ((b)-(3) による)

Q. E. D.

補題5

$V[G] \models$ "κ is $\phi(\kappa)$-supercompact" for some G.

(証明) $(\lambda_\kappa)^M > \kappa$ の時は, Apter と同じく

$$p \Vdash \text{“}\tau \in \underset{\sim}{U}\text{”} \longleftrightarrow p \Vdash \text{“}\tau \subset P_\kappa \phi(\kappa)\text{”} \wedge \exists q \leq j(p)$$

$$(|q - j(p)| = 0 \wedge q \Vdash \text{“}j\text{''}\phi(\kappa) \in j(\tau)\text{”})$$

と $\underset{\sim}{U}$ を定義すればよい.

$(\lambda_\kappa)^M = \kappa$ の時。 この時 Apter は $M[G] \models$ "κ is strongly compact" を必要と思ったのであるが, 実は, $V[G]$ でも κ は $\phi(\kappa)$-supercompact であることに気づかなかったようである。 $V[G] \models$ "κ is strongly compact" は当然だから, supercompact の仮定でよかったわけである. (M で κ が strongly compact とは限らない.)

$(\lambda_x)^M = \kappa$ とする

$\exists p \in P$ ($M \models$ " $p \Vdash$ " κ is $\phi(x)$-supercompact" ")

Gを M-generic filter on P で $p \in G$ とすると

$M[G] \models$ " κ is $\phi(x)$-supercompact"

補題 3.4 を使うと, Gは V-generic on Pで

$$\phi^{V[G]}(x) = \phi^{M[G]}(x).$$

$V[G] \models$ " $|P_\kappa \phi(x)| \leq 2^{\phi(x)} \leq 2^{\psi(x)} \leq |R(\delta)|$ " だから.

補題 4 より.

$$PP_\kappa \phi^{V[G]}(x) \cap V[G] = PP_\kappa \phi^{M[G]}(x) \cap M[G].$$

したがって, $\mathcal{U}$を normal ultrafilter on $P_\kappa \phi^{M[G]}(x)$ in $M[G]$ とすれば, $\mathcal{U}$は normal ultrafilter on $P_\kappa \phi^{V[G]}(x)$ in $V[G]$ である。すなわち.

$V[G] \models$ " κ is $\phi(x)$-supercompact"

Q. E. D.

References.

[1] Y. Abe, Strongly compact cardinals, elementary embeddings and fixed points. (to appear.)

[2] A.W. Apter, On the least strongly compact cardinal, Israel J. Math. 35 (1980)

[3] J. B. Barbanel, Supercompact cardinals, element-
-ary embeddings, and fixed points, J. Symbolic
Logic 47 (1982)

[4]. M. Magidor, How large is the first
strongly compact cardinal, Ann. Math. Logic 10
(1976)

[5] T. K. Menas, On strong compactness and
supercompactness, Ann. Math. Logic 7 (1974)

[6]. T. K. Menas, Consistency results concerning
supercompactness, Trans. Amer. Math. Soc. 223
(1976)

[7] R. M. Solovay, W. N. Reinhardt, A. Kanamori,
Strong axioms of infinity and elementary embedd-
-ings, Ann. Math. Logic 13 (1978)