数理解析研究所講究録
第 541 巻 1984 年 1-17

A system of parabolic variational inequalities associated with a stochastic switching game

神戸大理 山田直記 (Naoki YAMADA)

1、問題とその由来

両側から制限条件を持つ放物型変分不等式からなる次の系に対し, 解 $u^1, \cdots, u^m$ の存在と一意性を考察する:

$$
(1.1)\quad
\begin{cases}
u^{p+1}(x,t) - k \leq u^p(x,t) \leq u^{p+1}(x,t) + K \quad \text{in } Q, \\
-\dfrac{\partial u^p}{\partial t} + A^p(t)u^p = f^p \qquad \text{if} \quad u^{p+1} - k < u^p < u^{p+1} + K, \\
-\dfrac{\partial u^p}{\partial t} + A^p(t)u^p \leq f^p \qquad \text{if} \quad u^p = u^{p+1} + K, \\
-\dfrac{\partial u^p}{\partial t} + A^p(t)u^p \geq f^p \qquad \text{if} \quad u^p = u^{p+1} - k, \\
u^p|_\Sigma = 0, \qquad u^p(x,T) = \bar{u}^p(x) \quad x \in \Omega, \\
p = 1, \cdots, m, \quad \text{ここで} \quad u^{m+1} = u^1.
\end{cases}
$$

ここに $Q = \Omega \times (0,T)$ は有界なシリンダー領域で Σ はそ

の側面,

$$A^p(t)v = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^p(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^p(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i} + c^p(x,t)v \tag{1.2}$$

は2階楕円型作用素, f^p, $\bar{u}^p$ は与えられた関数で k, K は正定数とする. (1.1)の各変分不等式において, u^p に対する制限条件は別の未知関数 u^{p+1} に依存するから, その解の存在・一意性は従来の変分不等式の理論からは導かれない.

(1.1)は, L.C. Evans and A. Friedman [2] による Bellman 方程式の解析的な研究から示唆されたものである. [2]では楕円型 Bellman 方程式の Dirichlet 問題;

$$\begin{cases} \sup_{p=1,2,\cdots}\{L^p u - f^p\} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

に対する $W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)$ での解の存在を解析的に証明している. L^p は(1.2)と同じ形の作用素で t に依らないものである. 証明の大まかな方針は, まずパラメータ p が有限個の場合について変分不等式系;

$$\begin{cases} L^p u^p \leq f^p, \quad u^p \leq u^{p+1}, \\ (L^p u^p - f^p)(u^p - u^{p+1}) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u^p|_{\partial\Omega} = 0, \quad p = 1, \cdots, m, \quad u^{m+1} = u^1 \end{cases} \tag{1.4}$$

を考えると

$$u^1 \leqq u^2 \leqq \cdots \leqq u^m \leqq u^1$$

であるから，p に無関な関数

$$u = u^1 = u^2 = \cdots = u^m$$

が定まる．この u が

$$\sup_{p=1,\cdots,m} \{ L^p u - f^p \} = 0 \tag{1.5}$$

の解であることを示し，次に $m \to \infty$ とする．

(1.4) の解の存在を示すに当っては

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & L^p u_\varepsilon^p + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^p - u_\varepsilon^{p+1}) = f^p \quad a.e.\ in\ \Omega, \\ & u_\varepsilon^p|_{\partial\Omega} = 0, \quad p = 1, \cdots, m, \quad u_\varepsilon^{m+1} = u_\varepsilon^1 \end{aligned}$$

なる近似方程式系を考える．ここで $\beta_\varepsilon(t)$ は，$\varepsilon \to 0$ のとき maximal monotone graph；$\beta(t) = 0$ $(t < 0)$，$= [0, \infty[$ $(t = 0)$，$= \phi$ $(t > 0)$ を近似する滑らかで凸な penalty 関数である．近似解の収束を示すために，比較定理を用いて u_ε^p の a priori 評価を求める．$\varepsilon \to 0$ とした時に極限関数が Ω の殆んど至る所で (1.5) を満足することを示したいから，$W_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$ での a priori 評価が必要である．その際 β_ε の凸性が本質的な役割りを果す．

また，[2] では近似解の $W_{loc}^{2,\infty}(\Omega)$ での評価を得るために

$a^p_{ij}=$定数　と仮定しているが，P.L.Lions [5] においては十分大なる $\lambda_0>0$ に対して $c^p(x)\geqq\lambda_0$ ならば a^p_{ij} が変数の場合にも近似解の $W^{2,\infty}(\Omega)$ での評価が得られ，L.C.Evans et P.L.Lions [4] においては λ_0 の大きさに関する仮定も除けることが示されている．いずれも巧妙な比較関数の構成がキーポイントである．

さらに [2] では，(1.6) と同様の近似方程式系を用いて

$$
\begin{aligned}
&L^p u^p \leqq f^p, \quad u^p \leqq u^{p+1} + K^p,\\
&(L^p u^p - f^p)(u^p - u^{p+1} - K^p) = 0 \qquad \text{in } \Omega,\\
&u^p|_{\partial\Omega} = 0, \quad p=1,\cdots,m, \quad u^{m+1} = u^1
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

に対する解の存在が証明されている．ここに K^p は正定数である．しかも，*Bellman* 方程式が確率制御理論から導かれることに対応して，(1.7) の解 u^p も適当な確率論的最適制御問題の *cost function* として特徴づけられる．

放物型 *Bellman* 方程式に対しても類似の結果が得られている（L.C.Evans and S.Lenhart [3]，P.L.Lions [6]）．

[7] においては，(1.7) の制限条件を両側からの制限条件に拡張して考察したが，(1.1) は放物型 *Bellman* 方程式から上と同様の考察で導かれるものである．

(1.7) のような片側制限条件を持つ変分不等式系が *Bellman*

方程式と対応するのに対し，(1.1)のような両側制限条件を持つ変分不等式系がどのような方程式と対応しているかについては，形式的にではあるが，次の例が参考となる．

例1．　片側制限条件を持つ変分不等式；

$$Lu \leqq f\,,\quad u \leqq \varphi\,,\quad (Lu-f)(u-\varphi)=0$$

は，（退化した）Bellman 方程式；

$$\sup\{Lu-f,\ u-\varphi\}=0$$

と同値である．

例2．　$\varphi_2 \leqq \varphi_1$ とする．両側制限条件を持つ変分不等式；

$$\varphi_2 \leqq u \leqq \varphi_1\,,$$

$$Lu = f \quad \text{if} \quad \varphi_2 < u < \varphi_1\,,$$

$$Lu \leqq f \quad \text{if} \quad u = \varphi_1$$

$$Lu \geqq f \quad \text{if} \quad u = \varphi_2$$

は次の方程式；

$$\sup_{p=1,2}\ \inf_{q=1,2}\ \{L^{p,q}u - f^{p,q}\} = 0$$

と同値である．ただし

$$L^{1,1}v = Lv,\quad L^{1,2}v = L^{2,1}v = v,\quad L^{2,2}v = 0,$$
$$f^{1,1} = f,\quad f^{1,2} = \varphi_2,\quad f^{2,1} = \varphi_1,\quad f^{2,2} = 0$$

とする．実際，

$$\sup_{p=1,2}\inf_{q=1,2}\{L^{p,q}u - f^{p,q}\} = L^{p_0,q_0}u - f^{p_0,q_0} = 0$$

とすると，すべての p, q に対して

$$L^{p,q_0}u - f^{p,q_0} \leqq 0 \leqq L^{p_0,q}u - f^{p_0,q}$$

であるから，p_0, q_0 が 1, 2 をとる各々の場合を考えればよい．

一般に方程式；

$$\text{(1.8)}\qquad \sup_p \inf_q \{L^{p,q}u - f^{p,q}\} = 0$$

は Isaacs 方程式と呼ばれ，確率微分ゲームの value が満たすべき方程式である．Bellman 方程式 (1.3) では左辺は D^2u に関して凸であるが，Isaacs 方程式では D^2u に関する凸性が失われている．このことが対応する変分不等式系にも影響して，(1.1) を近似する方程式系では penalty 関数の凸性が失われる ((3.1) を参照)．

2. 仮定と結果

Ωを滑らかな境界を持つ$\mathbb{R}^N$の有界領域，$T>0$，$Q=\Omega\times(0,T)$，$\Sigma=\partial\Omega\times(0,T)$とする．$1\leq r\leq\infty$に対して$W^{2,1,r}(\Omega)$は

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},\ \frac{\partial u}{\partial t}\in L^r(\Omega)$$

となるuの全体，$C^{2,1}(\Omega)$はxについて2階，tについて1階まで連続的微分可能な関数の全体とする．$m>1$を与えられた整数とし，$p=1,\cdots,m$に対して

$$A^p(t)v=-\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^p(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^N b_i^p(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}+c^p(x,t)v,$$

$$a^p(t;u,v)=\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^N\tilde{b}_i^p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}v+c^p(x,t)uv\Big)dx$$

ただし　$$\tilde{b}_i^p(x,t)=b_i^p(x,t)+\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}^p(x,t)$$

とおく．

次の条件を仮定する．

(A.1)　正数$\alpha>0$が存在して

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^p(x,t)\xi_i\xi_j\geq\alpha|\xi|^2$$

がすべての $p=1,\cdots,m$, $(x,t)\in Q$, $\xi\in \mathbb{R}^N$ について成立する.

(A.2) $\psi = a^p_{ij},\ b^p_i,\ c^p,\ f^p$, $p=1,\cdots,m$, $i,j=1,\cdots,N$ とすると $\psi\in C^{1,1}(\overline{Q})$ かつ正数 $M>0$ が存在して

$$|\psi(x,t)|,\ \left|\frac{\partial}{\partial x_\ell}\psi(x,t)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right| \leqq M$$

が $\ell=1,\cdots,N$, $(x,t)\in\overline{Q}$ に対して成立する. さらに, $c^p(x,t)\geqq 0$ とする.

(A.3) k, K は正定数, $\overline{u}^p$ は $\overline{\Omega}$ 上の関数とする. $\overline{u}^p\in C^2_0(\overline{\Omega})$ であり, 正数 $M>0$ に対して

$$|\overline{u}^p(x)|,\ \left|\frac{\partial}{\partial x_\ell}\overline{u}^p(x)\right|,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x_\ell\partial x_{\ell'}}\overline{u}^p(x)\right| \leqq M$$

が $p=1,\cdots,m$, $\ell,\ell'=1,\cdots,N$, $x\in\overline{\Omega}$ について成立し

$$\overline{u}^{p+1}(x)-k\leqq\overline{u}^p(x)\leqq\overline{u}^{p+1}(x)+K,\quad \overline{u}^{m+1}=\overline{u}^1$$

を満たす.

(A.4) $\dfrac{k}{K}\neq\dfrac{m-q}{q}$, $\quad q=1,\cdots,m-1$.

$\psi\in H^1_0(\Omega)$ に対して

$$\mathcal{K}(\psi) = \{ v \in H_0^1(\Omega) ; \psi(x) - k \leqq v(x) \leqq \psi(x) + K \quad a.e.\ \Omega \}$$

とおき, $\mathcal{K}(\psi)$ を用いて (1.1) を定式化する.

Bilinear problem: 次を満たす u^p, $p=1, \cdots, m$ を求めよ.

$$u^p \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial u^p}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),$$

$$\langle -\frac{\partial u^p}{\partial t}(t), v - u^p(t) \rangle + a^p(t; u^p(t), v - u^p(t))$$

$$\geqq \langle f^p(t), v - u^p(t) \rangle \quad a.a.\ t \in (0,T), \ all\ v \in \mathcal{K}(u^{p+1}(t)),$$

$$u^p(x,T) = \bar{u}^p(x) \quad x \in \Omega, \quad p=1, \cdots, m, \quad u^{m+1} = u^1.$$

これに対して, (1.1) を Q の殆んど至る所で満たすような $u^p \in W^{2,1,\ell}(Q)$, $1 \leqq \ell < \infty$, $p=1, \cdots, m$ を求める問題を strong problem と呼ぶ.

次の結果が得られる.

定理. (A.1) - (A.4) の仮定の下で, 各々が

$$W^{2,1,\ell}(Q) \cap W^{1,1,\infty}(Q), \quad 1 \leqq \ell < \infty$$

に属する (1.1) の strong problem の解が唯一組存在する.

3. 証明のあらすじ ──存在について──

解の存在を証明するための Lemmas を順に挙げる. 基本的な方針は [7] と同様であるので証明は省略する ([8] を参照).

penalty 関数 β を次の様に選ぶ: $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\beta'(t) \geqq 0$, $\beta''(t) \geqq 0$, $t \leqq 0$ ならば $\beta(t) = 0$, さらに $\beta_\varepsilon(t) = \beta(t/\varepsilon)$ とするとき $-1 \leqq \beta_\varepsilon(t) - t\beta_\varepsilon'(t) \leqq 0$ が成立する. $\varepsilon > 0$ に対し近似方程式系;

$$
(3.1)\quad
\begin{aligned}
& u_\varepsilon^p \in W^{2,1,\ell}(Q), \quad 1 \leqq \ell < \infty, \\
& -\frac{\partial u_\varepsilon^p}{\partial t} + A^p(t) u_\varepsilon^p + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^p - u_\varepsilon^{p+1} - K) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^{p+1} - k - u_\varepsilon^p) = f^p, \\
& u_\varepsilon^p|_\Sigma = 0, \quad u_\varepsilon^p(x,T) = \overline{u}^p(x) \quad x \in \Omega, \\
& p = 1, \cdots, m, \quad u_\varepsilon^{m+1} = u_\varepsilon^1
\end{aligned}
$$

を考える. 近似解の存在は逐次近似により示すことができる. この近似解に対して次の a priori 評価が成立する.

Lemma 1.

$$
\| u_\varepsilon^p \|_{L^\infty(Q)} \leqq \max_{1 \leqq p \leqq m} \left\{ e^{C_0 T} \| f^p \|_{L^\infty(Q)} / C_0 ,\ e^{C_0 T} \| \overline{u}^p \|_{L^\infty(\Omega)} \right\}
$$

ここで C_0 は $a^p(t; u, v)$ から定まる定数である.

Lemma 2. (i) $y \in \partial\Omega$, $t \in (0,T)$, $p=1,\cdots,m$ に対して

$$|\operatorname{grad} u_\varepsilon^p(y,t)| \leqq \text{Const.}$$

(ii) $x \in \Omega$, $p=1,\cdots,m$ に対して

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon^p}{\partial t}(x,T)\right| \leqq \text{Const.}$$

Lemma 3. $\|u_\varepsilon^p\|_{W^{1,1,\infty}(Q)} \leqq \text{Const.}$

以上より u_ε^p の部分列の極限関数として $u^p \in W^{1,1,\infty}(Q)$ の存在が示される. この u^p が (1.1) の *bilinear problem* の解であることが示されるので次の *proposition* が成立する.

Proposition 1. (A.1) − (A.3) の仮定の下で, 各々が $W^{1,1,\infty}(Q)$ に属する (1.1) の *bilinear problem* の解が少くとも 1 組存在する.

このようにして得られた解は, 仮定 (A.4) の下で, 次の性質を持つ: 各 (x_0,t_0) に対して

$$u^{p+1}(x_0,t_0) - k < u^p(x_0,t_0) < u^{p+1}(x_0,t_0) + K$$

となるパラメータ p が存在する. 従って (x_0,t_0) の近傍で u^p は線型方程式を満たすから $W^{2,1,\nu}$ の滑らかさを持つ.

次に u^{p-1} を考えると，u^{p-1} に対する制限条件は $W^{2,1,r}$ の滑らかさを持つから，変分不等式の理論で知られた論法によって u^{p-1} も $W^{2,1,r}$ の滑らかさを持つことがわかる．これを繰り返して，先の u^p が strong problem の解であることを述べる次の proposition が証明できる．

Proposition 2. (A.1) - (A.4) の仮定の下で，proposition 1 で得られた解 u^p, $p=1,\cdots,m$ は $W^{2,1,r}(Q)$, $1 \leq r < \infty$ に属する．

4．証明のあらすじ ── 一意性について ──

解 u^p の属すべき制限集合が別の未知関数 u^{p+1} に依存するから，2つの解の差を評価するという通常の手法では一意性を証明することはできない．そこで (1.1) の解を確率微分ゲームの value として表現する．以下に述べる解の表現は，それから解の一意性が導かれる事実とともに，その表現自身が両側制限条件を持つ単独の変分不等式の解を stopping times を用いた確率微分ゲームの value として表現する A. Bensoussan et J. L. Lions の結果 ([1], Chapter 3, Théorème 5.2, p. 425) の自然な拡張にもなっていて興味深いものである．

$(\hat{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $W(t)$ を N 次元 Brown 運動とし, $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s), 0 \leqq s \leqq t)$ とする. $\sigma^p = [\sigma^p_{ij}(x,t)]$ を $a^p = (1/2)\sigma^p \cdot (\sigma^p)^*$ を満たす非負行列とする, ただし $a^p = [a^p_{ij}(x,t)]$. また $b^p = (b^p_1(x,t), \cdots, b^p_N(x,t))$ とする.

各 $p = 1, \cdots, m$ に対して確率微分方程式

$$d\xi^p(t) = -b^p(\xi^p(t), t)\,dt + \sigma^p(\xi^p(t), t)\,dW(t) \tag{4.1}$$

を考える. 以下では簡単のために $u^1(x,t)$ を表現する確率微分ゲームのみを構成する.

$(x,t) \in Q$ を固定する. $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$ は $\mathcal{F}_t$-stopping times の列で, 条件;

$$\begin{aligned} &t \leqq \eta_1 \leqq \eta_2 \leqq \cdots \leqq \eta_n \leqq \cdots, \\ &\text{a.s. } \omega \in \hat{\Omega} \text{ に対し } \eta_n(\omega) > T \text{ となる } n \text{ が存在する}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

を満たすものとする. 確率過程 $\xi(s)$ を次の様に構成する: 整数 $l \geqq 0$ と $p = 1, \cdots, m$ に対して, $\eta_{lm+p-1} \leqq s \leqq \eta_{lm+p}$ ならば $\xi(s) = \xi^p(s)$, ただし $\xi^p(s)$ は初期条件 $\xi^p(\eta_{lm+p-1}) = \xi^{p-1}(\eta_{lm+p-1})$ を満たす (4.1) の解であり, $\xi^0 = \xi^m$, $\eta_0 = t$ である.

$\xi(s) = \xi^p(s)$ の時に $f(\xi(s), s) = f^p(\xi^p(s), s)$, $c(\xi(s), s) = c^p(\xi^p(s), s)$ と書く. τ を $\xi(s)$ の Q からの脱出時刻とし,

$\xi(\bar{T}) = \xi^{\delta(\bar{T})}(\bar{T})$ とする.

(4.2) を満たす２つの *stopping times* の列 $\theta = (\theta_n)$, $\tau = (\tau_n)$ に対して $\eta = (\eta_n)$ を $\eta_n = \theta_n \wedge \tau_n$ と定義し, 上のように構成される $\xi(s)$ を用いて次の *cost function* を考える:

$$J_x^1(t;\theta,\tau) = E_x\Big[\int_t^{T\wedge\bar{T}} \exp\Big(-\int_t^s c(\xi(r),r)\,dr\Big) f(\xi(s),s)\,ds$$

$$+ K\sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(-\int_t^{\eta_n\wedge T\wedge\bar{T}} c(\xi(r),r)\,dr\Big)\chi\{\eta_n\wedge T\wedge\bar{T} = \tau_n\}$$

$$- k\sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(-\int_t^{\eta_n\wedge T\wedge\bar{T}} c(\xi(r),r)\,dr\Big)\chi\{\eta_n\wedge T\wedge\bar{T} = \theta_n\}$$

$$+ \bar{u}^{\delta(\bar{T})}(\xi(\bar{T}))\exp\Big(-\int_t^{\bar{T}} c(\xi(r),r)\,dr\Big)\chi\{\bar{T} \geq T\}\Big].$$

ここで $\chi\{A\}$ は, 集合 A の定義関数である.

$u^p \in W^{2,1,r}(Q) \cap C(\bar{Q})$, $p = 1, \cdots, m$ を (1.1) の *strong problem* の解とする. 各 $p = 1, \cdots, m$ に対し

$$\hat{S}^p(s) = \{x \in \bar{\Omega};\ u^p(x,s) = u^{p+1}(x,s) - k\},$$

$$\hat{T}^p(s) = \{x \in \bar{\Omega};\ u^p(x,s) = u^{p+1}(x,s) + K\}$$

とおき, *stopping times* の列 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_n)$, $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_n)$ を次の様に定義する:

$$
(4.3)\quad
\begin{aligned}
\hat{\theta}_{\ell m+p} &= \inf\{s \geq \hat{\theta}_{\ell m+p-1};\ \xi^{p}(s) \in \hat{S}^{p}(s),\\
&\qquad \xi^{p}\text{の初期条件は }\ \xi^{p}(\hat{\theta}_{\ell m+p-1}) = \xi^{p-1}(\hat{\theta}_{\ell m+p-1})\},\\
\hat{\tau}_{\ell m+p} &= \inf\{s \geq \hat{\tau}_{\ell m+p-1};\ \xi^{p}(s) \in \hat{T}^{p}(s),\\
&\qquad \xi^{p}\text{の初期条件は }\ \xi^{p}(\hat{\tau}_{\ell m+p-1}) = \xi^{p-1}(\quad_{\ell m+p-1})\}.
\end{aligned}
$$

Stopping times の列 $\eta = (\eta_n)$ から構成される確率過程 $\xi(s)$ は，時刻 t に x を ξ^1 の path に乗って出発し，η_1 の時点で ξ^2 の path に乗り換える．以下順次，stopping time ごとに path を巡回的に乗り換えてゆく．今，2人の競技者が各々 stopping times の列 $\theta = (\theta_n)$，$\tau = (\tau_n)$ を操作するとき，それに応じて $J_x^1(t;\theta,\tau)$ の値が定まるが，競技者の一方が θ を操作して $J_x^1(t;\theta,\tau)$ の値を最大に，他方が τ を操作して $J_x^1(t;\theta,\tau)$ の値を最小にしようとするものとすれば，一種のゲームが成立する．両者がともに最適の操作 $\hat{\theta}$，$\hat{\tau}$ を行ったとすると

$$
(4.4)\qquad J_x^1(t;\hat{\theta},\hat{\tau}) = \sup_{\theta}\ \inf_{\tau}\ J_x^1(t;\theta,\tau)
$$

となる．このゲームを stochastic switching game と呼び (4.4) で得られる値をこのゲームの value と呼ぶ．

次の proposition は，(1.1) の解 u^p が上で構成したゲームの value として表現され，2人の競技者の最適の操作は (4.3)

で与えられることを示している.

Proposition 3.　(A.1) - (A.4) の仮定の下で, (1.1) の任意の解 $u^p \in W^{2,1,\ell}(Q)$, $p = 1, \cdots, m$ に対して

$$u^1(x,t) = J_x^1(t; \hat{\theta}, \hat{\tau})$$

が成立し, (4.2) を満たす任意の *stopping times* の列 θ, τ に対して

$$J_x^1(t; \theta, \hat{\tau}) \leqq u^1(x,t) \leqq J_x^1(t; \hat{\theta}, \tau)$$

が成立する.

証明には Itô の公式を用いる. その際 $u^p \in W^{2,1,\ell}(Q)$ が要求される. 詳しくは [7] 又は [8] を参照されたい.

References

[1]　A. Bensoussan et J. L. Lions, Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique, Dunod (1978).

[2]　L. C. Evans and A. Friedman, Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equation, Trans. Amer. Math. Soc., 253 (1979), 365 - 389.

[3] L. C. Evans and S. Lenhart, The parabolic Bellman equation, Nonlinear Anal., 5 (1981), 765 - 773.

[4] L. C. Evans et P. L. Lions, Résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman, C. R. Acad. Sci. Paris, 290 (1980),1049 - 1052.

[5] P. L. Lions, Résolution analytique des problèmes de Bellman-Dirichlet, Acta. Math., 146 (1981), 151 - 166.

[6] P. L. Lions, Le problème de Cauchy pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman, Ann. Fac. Sci. Toulouse, 3 (1981), 59 -68.

[7] N. Yamada, A system of elliptic variational inequalities associated with a stochastic switching game, Hiroshima Math. J., 13 (1983) 109 - 132.

[8] N. Yamada, A system of parabolic variational inequalities associated with a stochastic switching game, to appear.