

## 3-bridge knots 上で branch する 3-fold irregular coverings について

神戸大理 中村達夫 (Tatuo Nakamura)

Hilden, Montesinos によれば、すべての closed orientable 3-manifold は knot 上で branch する  $S^3$  の 3-fold irregular covering になる。

また、

$K$ : a knot in  $S^3$ ,  $G = \pi_1(S^3 - K)$ ,

$\mathcal{S}_3$ : 3次対称群,  $M$ : closed orientable 3-manifold

とすると、covering space の一般論から、「 $S^3 - K$  の 3-fold covering  $M - \tilde{K}$  の同値類」と「transitive representation

$\phi: G \rightarrow \mathcal{S}_3$  の同値類」が 1対1に対応することが知られている。

さらに、 $\Delta_K$  を  $K$  の Alexander polynomial とすると、

$$\phi \text{ が存在} \iff \Delta_K(-1) \equiv 0 \pmod{3}$$

が成立することもわかっている。

ここでは、 $\phi$  が存在する場合の  $K$  について考察する。

$K=0$  (trivial knot) の場合、 $\Delta_0=1$  だから、 $\phi$  はない。  
 $K=2$ -bridge knot の場合、 $\phi$  が存在すれば、 $M$  は  $S^3$  に homeomorphic 。

$K=3$ -bridge knot の場合、 $\phi$  が存在すれば、 $M$  は lens space になることがわかっている。

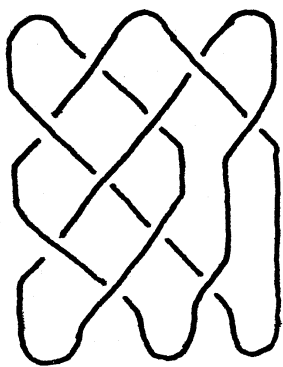
そこで、以下では、3-bridge knot の場合の、 $M$  の homeomorphic type を知る方法を述べることにする。

$\Sigma_3$  において、

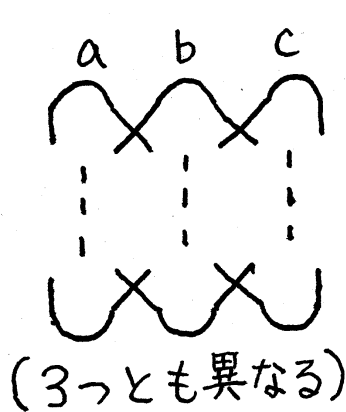
$$a = (01), \quad b = (02), \quad c = (12)$$

とする。

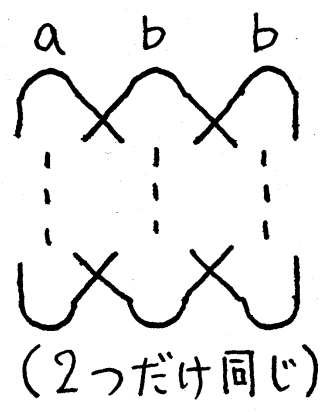
図の様な 3-bridge knot の projection に  $\phi$  が与えられている時、上の 3 つの bridge から  $\Sigma_3$  への対応は、本質的には、次の 2 種類しかない。



821

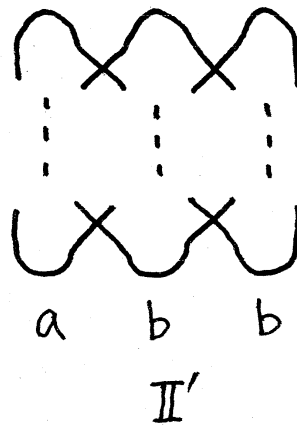
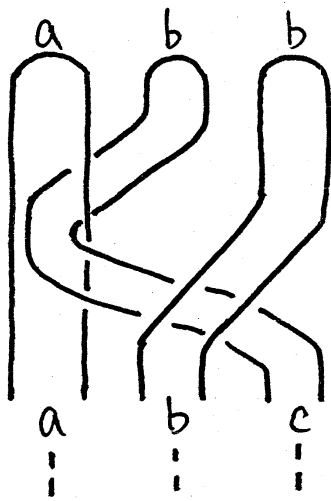


I



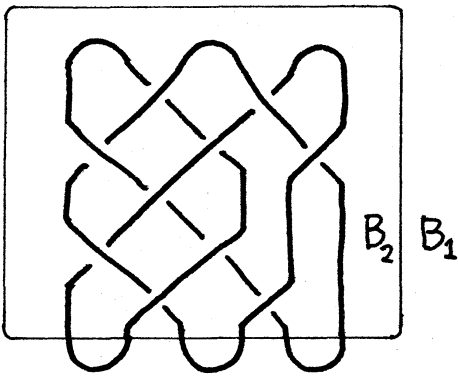
II

I は、次の様な、knot type を変えない修正をすることによって、II に帰着されることがわかる。



同様にして、下の3つの bridge も II' の様に修正出来る。

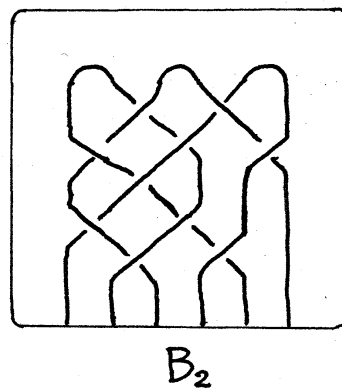
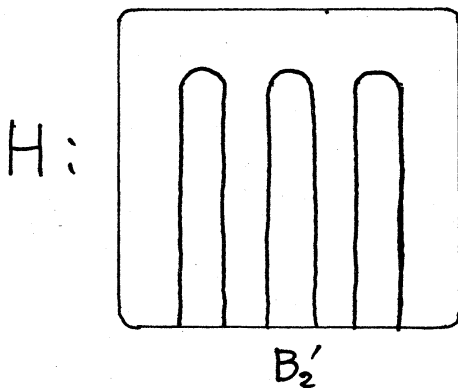
そこで、実際に example で調べてみよう。



$B_1, B_2, B_2'$ : 3-balls

$H: B_2' \rightarrow B_2$   $\partial B_2'$  上の 6 点を  
setwise に保存する homeomorphism.

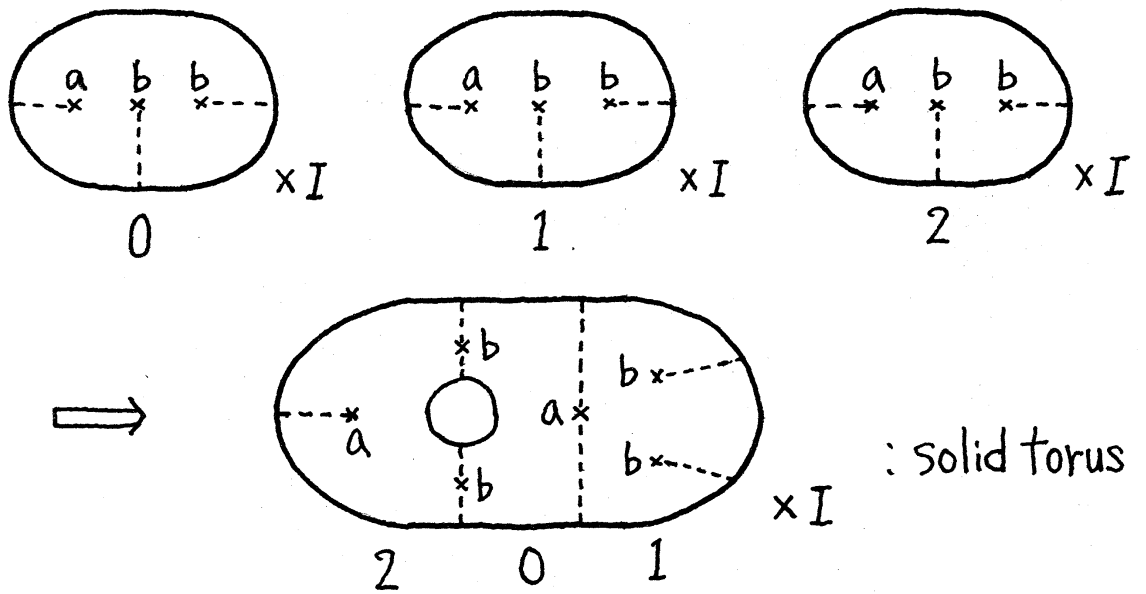
$\underline{i}: \partial B_2 \rightarrow \partial B_1$  identity map.



$\underline{h} = \underline{i} \circ (H|_{\partial B_2'})$  とおくと、 $S^3 = B_1 \cup_{\underline{h}} B_2'$

$B_1$  ( $B_2'$ ) の 3-fold irregular covering を構成する。

$B_1$  を  $(2\text{-disk}) \times I$  と思う。



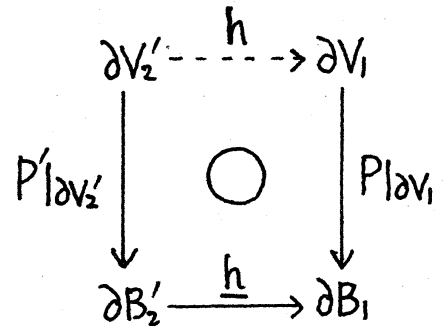
この構成で出来た covering を、

$$P : V_1 \rightarrow B_1$$

$$P' : V_2' \rightarrow B_2 \quad (V_1, V_2' : \text{solid tori})$$

とすると、 $h$  は次の diagram を可換にする homeomorphism  $h$  を induce する。

この  $h$  がわかれば、上の  $M$  がわかる。そのために、 $S^2 - \{6 \text{ 点}\}$  の unbranched covering  $T^2 - \{12 \text{ 点}\}$  を調べる。

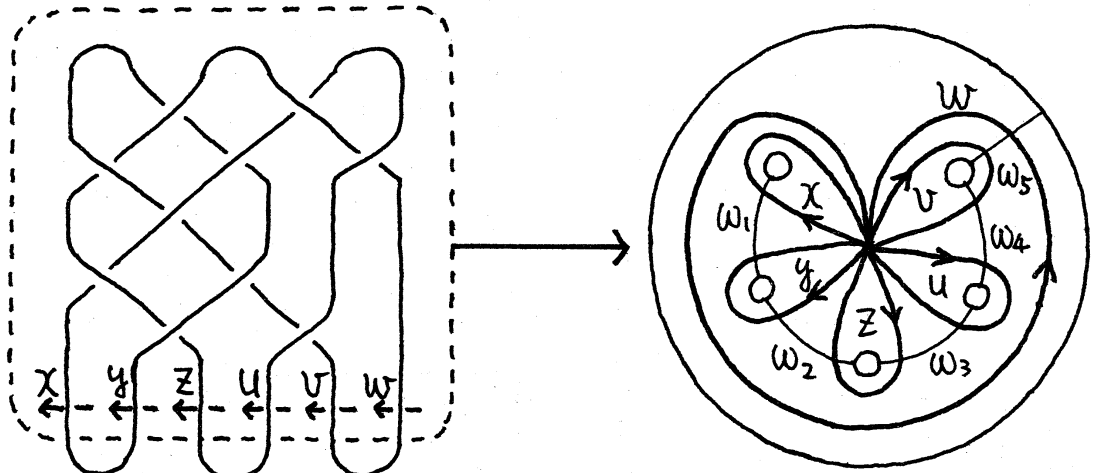


$K$  は  $\omega_i$  に関する disk twist

によって得られる。その twist の影響は、次の図で言うと、上の crossing の箇所から順次表われてくる。

example の場合、 $\bar{\omega}_2, \omega_4, \omega_1, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_5, \bar{\omega}_2, \omega_1, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_2,$   
4

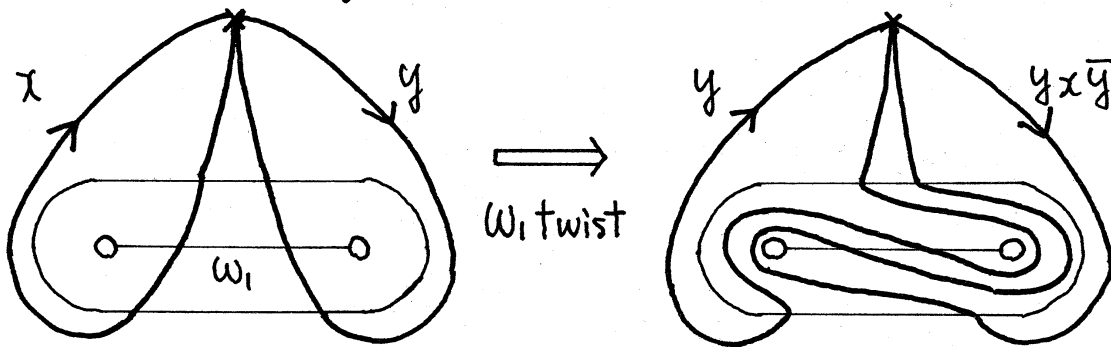
$\bar{\omega}_4$  の順に施したことになる。(ここで、 $\bar{\omega}_i$  は  $\omega_i$  の逆方向の twist) これらの合成が  $h$  である。



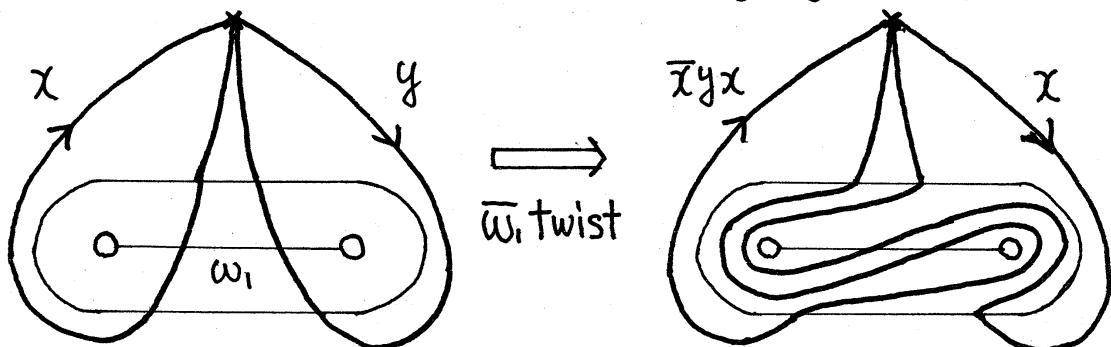
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$   
 $x, y, z, u, v, w$ : generators

$\omega_i$ : arc  
 2-disk with 5 holes

各 twist による generators への影響を見ると、



$x \rightarrow y, \quad y \rightarrow yx\bar{y}$



$x \rightarrow x\bar{y}x, \quad y \rightarrow x$

5

以下同様に、

$$\omega_2: \begin{cases} y \longrightarrow z \\ z \longrightarrow zy\bar{z} \end{cases}$$

$$\bar{\omega}_2: \begin{cases} y \longrightarrow \bar{y}zy \\ z \longrightarrow y \end{cases}$$

$$\omega_3: \begin{cases} z \longrightarrow u \\ u \longrightarrow uz\bar{u} \end{cases}$$

$$\bar{\omega}_3: \begin{cases} z \longrightarrow \bar{z}uz \\ u \longrightarrow z \end{cases}$$

$$\omega_4: \begin{cases} u \longrightarrow v \\ v \longrightarrow vu\bar{v} \end{cases}$$

$$\bar{\omega}_4: \begin{cases} u \longrightarrow \bar{u}vu \\ v \longrightarrow u \end{cases}$$

$$\omega_5: \begin{cases} v \longrightarrow w \\ w \longrightarrow wv\bar{w} \end{cases}$$

$$\bar{\omega}_5: \begin{cases} v \longrightarrow \bar{v}wv \\ w \longrightarrow v \end{cases}$$

(ここで、 $\omega_i, \bar{\omega}_i$  の対応を示したものの以外は identity)

example の場合

$$x \longrightarrow \bar{y}zy\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}vuzyx\bar{y}\bar{z}y$$

$$y \longrightarrow \bar{y}zy\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}vuzyx\bar{y}\bar{z}y\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}\bar{v}uy\bar{u}vuzy$$

$$x\bar{y}zy\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}\bar{v}uy\bar{u}vuzyx\bar{y}\bar{z}y$$

$$z \longrightarrow \bar{y}zy\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}vuzyx\bar{y}zy\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}\bar{v}vuzyx\bar{y}\bar{z}y$$

$$u \longrightarrow \bar{u}wu$$

$$v \longrightarrow \bar{u}wuy\bar{y}zy\bar{x}\bar{y}\bar{z}y\bar{u}\bar{w}u$$

$$w \longrightarrow u$$

となっている。これらを構成した covering に lift してやる。  
ここで必要なのは、meridian  $U_0 z_2$  の行き先  $h(U_0 z_2)$  だけ  
である。(次の図参照)

$$h(u_0 z_2) = \bar{u}_2 w_2 u_0 \bar{y}_2 z_2 y_0 \bar{x}_0 \bar{y}_1 \bar{z}_1 \bar{u}_1 v_1 u_1 z_1 y_1 x_0 \bar{y}_0 z_0 y_2 \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \bar{z}_0 \bar{u}_2 \bar{v}_0 u_0 z_2 y_0 x_1 \bar{y}_1 \bar{z}_1 y_1$$

これを、0 を base point にした loop として、homology の要素として読んでやると、

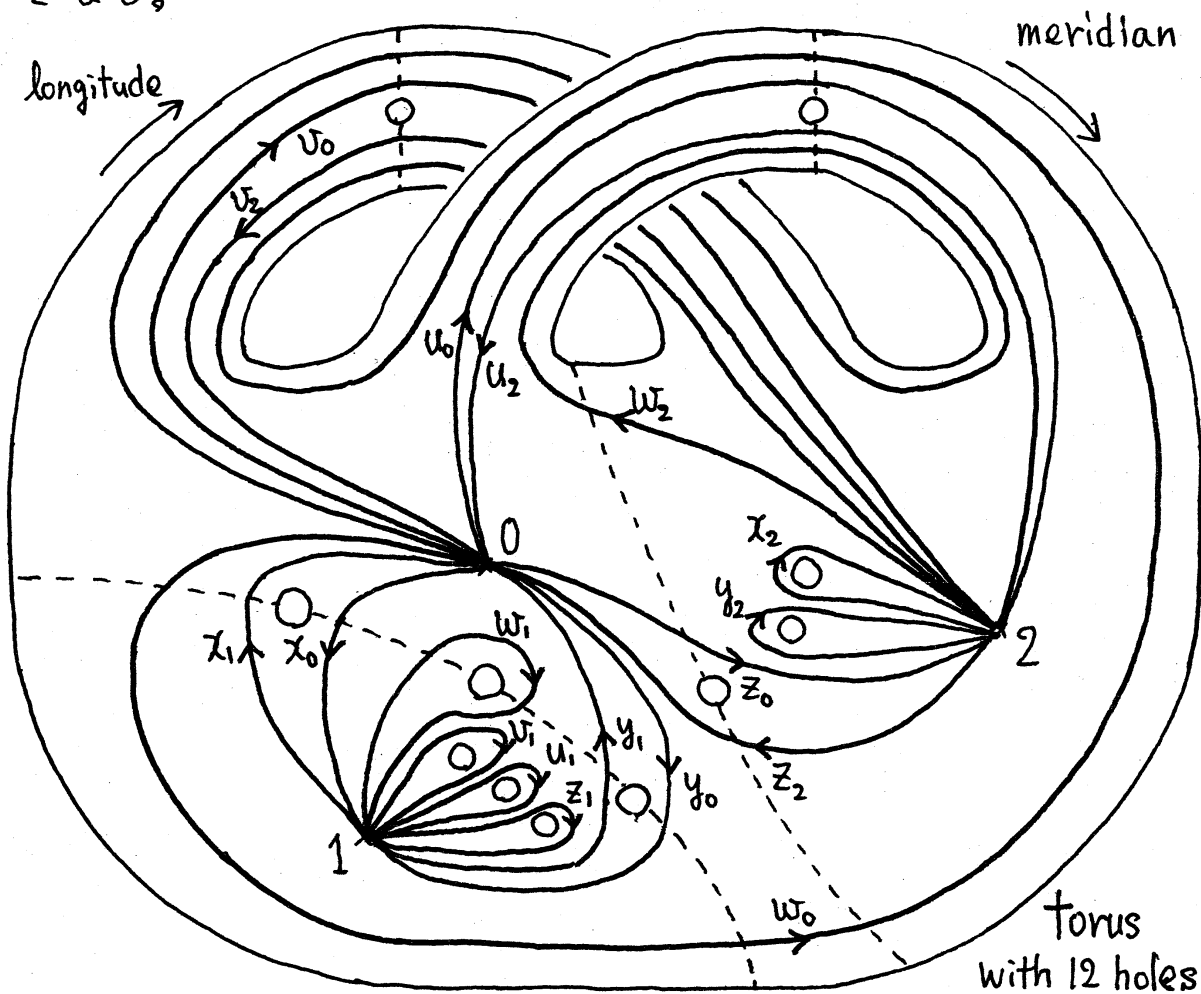
$$(\text{meridian}) \longrightarrow -2 (\text{longitude}) + 5 (\text{meridian})$$

となっていることがわかる。

従って、この場合、上の lens space は、

$$L(-2, 5) \cong L(2, 1) \cong p^3$$

となる。



( 図中の 0, 1, 2 は base point の copies. また,  $\chi_0,$   
 $\chi_1, \chi_2$  は, それぞれ 0, 1, 2 を base point にとった  
 $\chi$  の lift である. 以下同じ. )

この様にすれば, 上の homeomorphic type はいつでもわかる.  
 この方法を使って調べてやると, 次のことがわかる.

### Theorem

任意の lens space  $L(p, q)$  は, 次の 3-bridge knot  
 or link の 3-fold irregular covering になる.

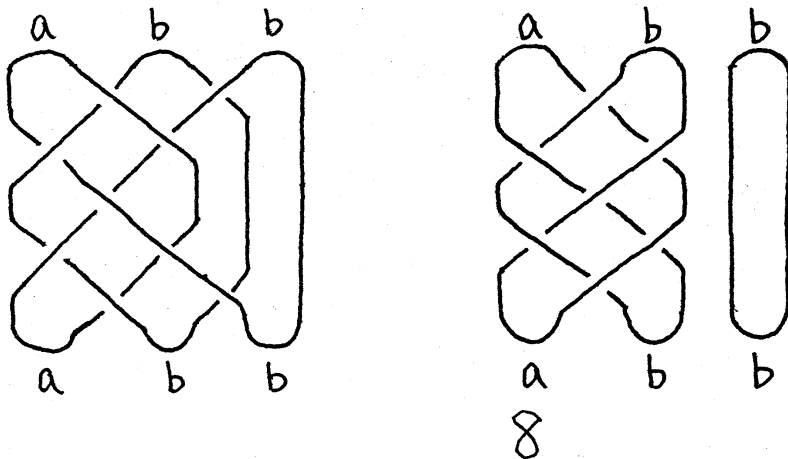
ここで,  $C_i$  は, 連分数展開

$$\frac{p}{q} = C_1 + \frac{1}{C_2 + \dots + \frac{1}{C_r}}$$

の係数である. (図は次のページ)

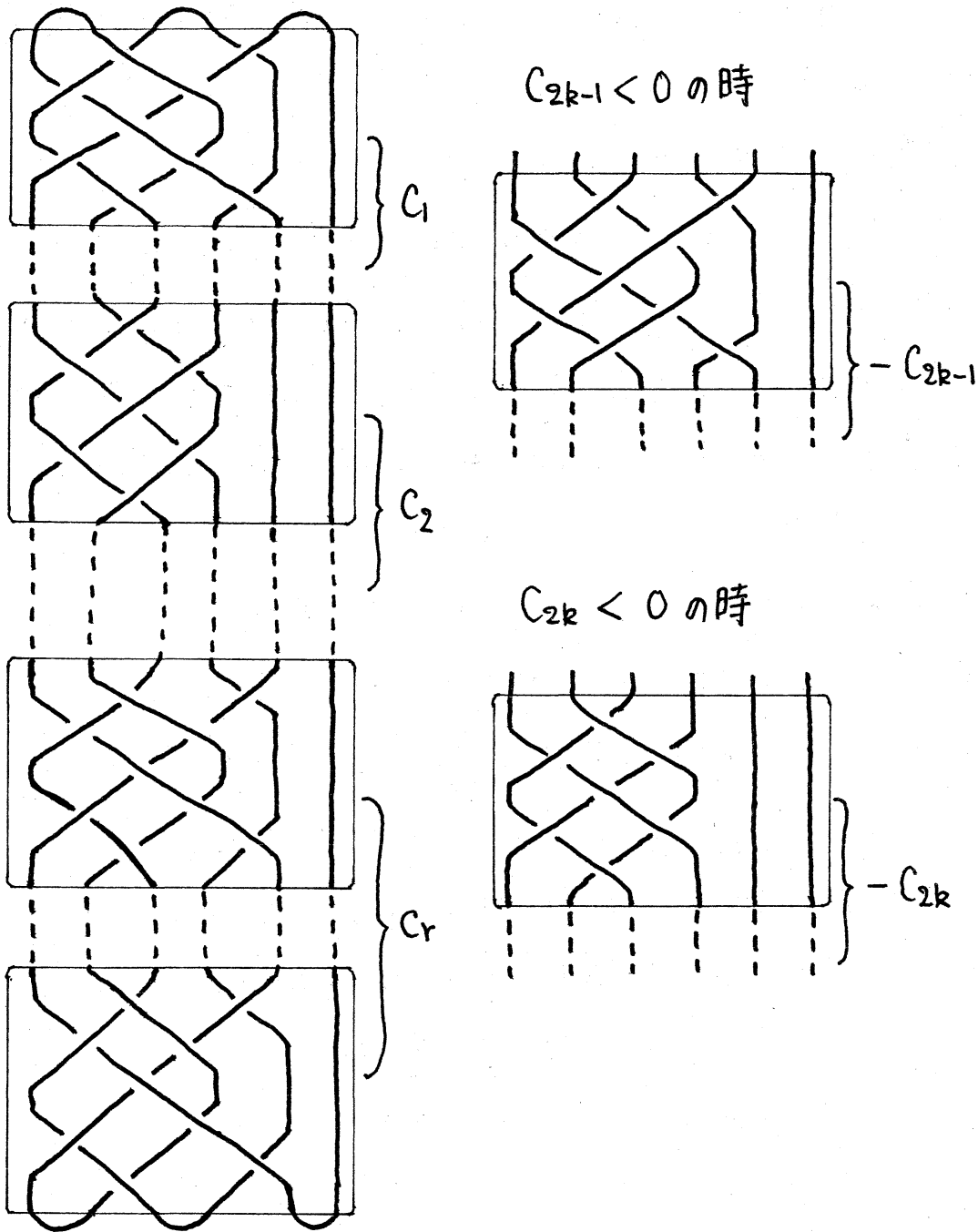
(略証)

$L$ : longitude,  $M$ : meridian とする. 今までの方法か  
 ら, 次の 2つは, 上でそれぞれ, longitudinal twist,  
 meridinal twist を与えていることがわかる.





従って、2-bridge knot の 2-fold covering が lens space になるのと同じ理由で、 $C_i$  を連分数展開の係数としてもつ  $P, \varphi$  で、上の lens space が決まる。□



以上のことは、 $K$ の bridge index が高々3の場合で、2-bridge knot も含んでいる。初めに述べた様に、2-bridge knot の 3-fold irregular covering は  $S^3$  だから、「上が、 $S^3$ でない lens space になれば、 $K$ の bridge index は3である」ことはすぐにわかるが、その逆はどうか、という問題が起ってくる。

講演後、調べてみると、多分、その反例となりそうな knot が次の図に示されるものである。上が  $S^3$  になることは、先の Theorem によってわかる。現在、3-bridge になることの証明を与えようとしているところである。もしそうであれば、反例が無限に存在することが、Alexander polynomial の計算によってわかる。

参考までに、それを示して終わりにする。

$$\begin{aligned} \Delta_k(t) = & 2 - 19t + 89t^2 - 271t^3 + 554t^4 - 767t^5 + 719t^6 \\ & - 456t^7 + 197t^8 - 58t^9 + 11t^{10} - t^{11} \\ & + \left( \sum_{n=-2k+2}^{-1} (-1)^n t^n \right) (1 - 9t + 40t^2 - 111t^3 + 199t^4 \\ & - 235t^5 + 187t^6 - 101t^7 + 37t^8 - 9t^9 + t^{10}) \\ & + \left( \sum_{n=-2k+1}^{-1} (-1)^n t^n \right) (1 - 9t + 40t^2 - 117t^3 + 229t^4 \\ & - 298t^5 + 250t^6 - 133t^7 + 44t^8 - 9t^9 + t^{10}) \end{aligned}$$

$$\text{degree}(\Delta_k(t)) = 2k + 10$$

## References

[1] H.M. Hilden :

Three-fold branched coverings of  $S^3$ ,  
 Amer. J. Math. Vol 98 (1976), 989-997.

[2] J.M. Montesinos :

Three manifolds as 3-fold  
 branched covers of  $S^3$ ,

Quart. J. Math. Oxford (2) 27  
 (1976), 85-94.

[3] S. Suzuki & F. Hosokawa :

いくつかの単純な絡み輪の分岐被覆  
 空間,

数理解析研究所講究録 (1977)

[4] F. Hosokawa & Y. Nakanishi :

Irregular 3-fold cover について.

数理解析研究所講究録 (1984)

