数理解析研究所講究録
第 542 巻 1985 年 48-58

On knots with companions

河野正晴（神戸大・教養）
（Masaharu Kouno）

V_0 を oriented solid torus とします。V_0 の中の knot k_0 が geometrically essential であるとは、V_0 の任意の meridian disk と k_0 が交わることを言います。

さて、向きづけられた3次元球面 S^3 の中に knot k を考えます。このとき次の様にしてきまる S^3 の中の knot を $k(k_0)$ と書きます。V を S^3 における k の regular neighborhood とします。S^3 から定まる向きがはいっているとします。このとき V_0 から V への$\underbrace{\text{同位}}_{\text{向きを保つ}}$写像 f が存在しますが、これによる k_0 の像を $k(k_0)$ と書きます。つまり、$k(k_0) \equiv f(k_0)$ 。

（注意）$k(k_0)$ は k と k_0 から一意的にはきまらず、ひねりの分の自由度がでますが、これらのうちのどれでもいいから1つとります。

このとき渋谷さんにより次の予想が提出されています（［ 3 ］）。

予想

V_0の中のgeom. ess. なknot k_0を任意に1つ固定する。
k_1, k_2をS^3の中の2つのknotとする。このとき
$$k_1(k_0) \approx k_2(k_0) \Longrightarrow k_1 \approx k_2$$

ただし "≈" はsame knot typeの意味。

ここでは次の定理を示す。

定理　k_1, k_2 : knotted のとき予想は正しい。

(注意) 研究集会後，相馬氏(早大)により、残りの場合も予想が正しいということが示されました。方法はGromov invariantを使ってやるそうです。

さて証明ですが、証明はSchubertのsolid torusの中のknotについての結果とHakenのfiniteness theoremを用いて行なわれます。

Lemma 0 (Schubert [2])
S^3の中に2つのsolid torus V, V^*がありknotted (i.e core がknotted)とします。更に共通のknot kを含んでおり、kはVでもV^*でもgeom. ess. とします。

このときkをとめたisotopyで次のいずれかにできる。

(1) $\mathring{V} \supset V^*$

(2) $\mathring{V}^* \supset V$

(3) $\mathring{V}^* \supset S^3 - \mathring{V}$

(4) $\exists W$; solid torus $\subset \mathring{V} \cap \mathring{V}^*$

　　ナ $O_V(W) = O_{V^*}(W) = 1$

ただし $O_V(k) = \min\{\#(D \cap k) \mid D$はVのmeridian disk$\}$で $O_V(W) = O_V(\mathrm{core}(W))$ とする。

我々はLemma 0とほぼ同じ形の次のLemmaを用いる。

(証明は同様にできる。)

Lemma 1

k, V, V^*はLemma 0と同じとする。このときkをとめたisotopyで次のいずれかにできる。

(I) $\partial V \cap \partial V^* = \phi$

(II) $\exists D_1, D_2$ ナ

① D_iはV及びV^*のmeridian disk $(i=1,2)$

② $V - \cup D_i$の1つのcomponentの中で$V^* - \cup D_i$の1つのcomponentがball pairとして knotted(図1を参照)。

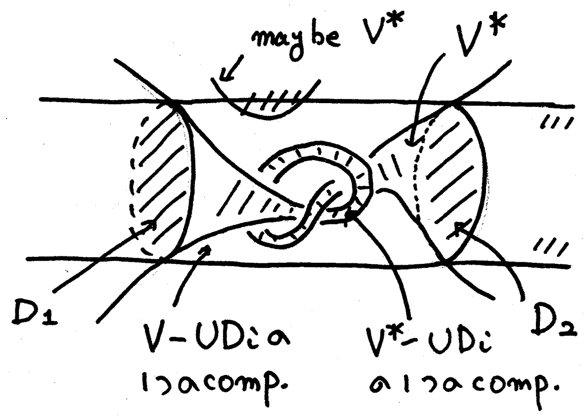


図. 1

<u>Lemma 2</u> (Haken's finiteness theorem)

任意のcompact 3-manifold Mに対して次の条件を満す負でない整数$h(M)$が存在する。

(1) 任意のdisjointな2-sided incompressibleなsurfaceの集まり、$F_1, \cdots, F_n$ に対して $n > h(M)$ならば ある i、j について($i \neq j$)、F_iとF_jはparallel。

(2) (1)の条件を満す数の中で$h(M)$は最小

証明は[1]などを参照して下さい。

さて定理の証明をはじめます。$K_i \equiv k_i(k_0)$ ($i=1,2$) とおくと、$K_1 \approx K_2$ よりS^3上の向きを保つ同相写像hが存在して$h(K_1)=K_2$となる。$V=h^{-1}(V_2)$ とおくと次の状況になっている。

Ⓐ
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & S^3 \arrow[dl, phantom, sloped, "\supset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\ V_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\supset"] & & V \arrow[dl, phantom, sloped, "\subset"] \\ & K_1 & \end{tikzcd}$$

core(V_1), core(V) は knotted で K_1 は V_1 でも V でも geom. ess. 。

Ⓑ
$$\begin{tikzcd} & V_0 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ V_1 & & V_2 \\ & V \arrow[ul, dotted, "\exists f"] \arrow[ur, "h|_V"'] & \end{tikzcd}$$

$f = f_1 \circ f_2^{-1} \circ h|_V$ とおくと f は V から V_1 への向きを保つ同相写像で、$f(K_1) = K_1$ 。

ここで次の Lemma が成立する。

Lemma 3

定理の状況において次のいずれかが成立する。

(i) core$(V) \approx$ core(V_1) つまり $k_1 \approx k_2$

(ii) solid torus V_1' が存在して次を満す。

① $V_1' \supset K_1$ かつ K_1 は V_1' で geom. ess.

② core(V_1') は knotted

③ V と V_1' は Lemma の case Ⅱ の様になっている。

つまり、$\exists D_1, D_2$ ナ

(a) D_i は V 及び V_1' の meridian disk $(i=1,2)$

(b) $V - \cup D_i$ の 1 つの component の中で $V_1' - \cup D_i$ の 1 つの component は knotted

(proof) Ⓐ より Lemma 1 を適用できて、V_1 と V は

case (I) $\partial V \cap \partial V_1 = \phi$, or

case (II) $\exists D_1, D_2$

す ① D_i は V 及び V_1 の meridian disk $(i=1,2)$

② $V - \cup D_i$ の1つ の component の中で $V_1 - \cup D_i$ の1つ の component は knotted

のいずれかとしてよい。case (II) のときは $V_1' = V$ とおけば Lemma 3は成立。よって Case (I) を考える。

$\partial V_1 \cap \partial V = \phi$ より V と V_1 の関係は次の3つ。

ⓐ $V_1 \subset \mathring{V}$

ⓑ $V \subset \mathring{V}_1$

ⓒ $V_1 \cup V = S^3$

($V_1 \cap V \supset K_1 \neq \phi$ より $V_1 \cap V = \phi$ はなし) ここで、$T \equiv \partial V$, $T_1 \equiv \partial V_1$ とする。V と V_1 の役割をいれかえ、f を f^{-1} にとりかえれば ⓐ成立のとき ⓑ成立が言えるので ⓐとⓒの場合のみ示せばよい。

<u>Case ⓐ</u> T と T_1 が parallel のときは $\mathrm{core}(V) \approx \mathrm{core}(V_1)$ なので、T と T_1 は non-parallel とする。$V_1 = f(V) \subset V$ より f^n が定義されるので、$V_n \equiv f^n(V)$, $T_n \equiv \partial V_n$ とおくと次が示される。

① T_i は incompressible in $S^3 - \mathring{U}(K_1)$。ここで $U(K_1)$ は K_1 の regular neighborhood。

② T_i と T_j は non-parallel $(i \neq j)$

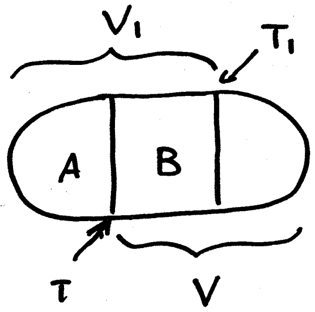
$S^3 - \mathring{U}(K_1)$ には disjoint non-parallel な incompressible surface が何個でもとれるので、Lemma 2 に矛盾。

Case © $T_1 \subset V$ より $T_2 \equiv f(T_1)$ が定義できるが、このとき次の2つの case が考えられる。

case 1 ; $T \cap T_2 = \phi$

case 2 ; $T \cap T_2 \neq \phi$

case 1

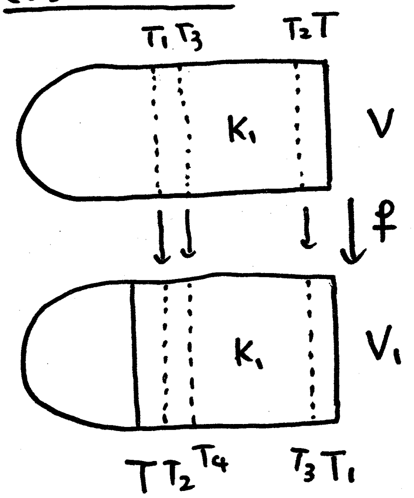


このとき、$B \equiv V \cap V_1$, $A \equiv V_1 - \mathring{B}$ とすると、$T_2 \subset B$ or $T_2 \subset A$。$T_2 \subset A$ のときは V と V_1 の役割をいれかえ、f を f^{-1} にかえることにより前者と思えるので、$T_2 \subset B$ とする。更に2つの case にわける。

case (1-i) T と T_2 は non-parallel

case (1-ii) T と T_2 は parallel

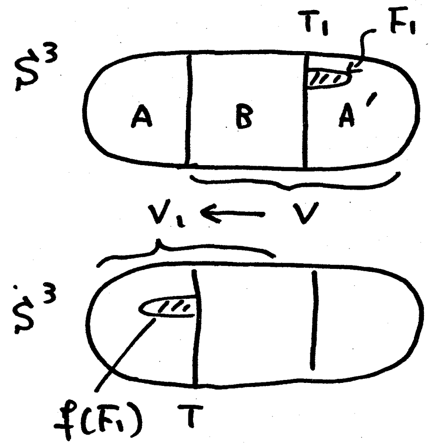
case (1-i)



$T_2 \subset B$ により $T_3 \equiv f(T_2)$ が定義されるが、T_3 と T_1 は non-parallel。$T_3 \subset B$ より $T_4 \equiv f(T_3)$ が定義されるが、$T_3 \not\parallel T_1$ より $T_4 \not\parallel T_2$。以下同様にして T_n が定義される。T_n と T_{n+2} は non-parallel。又 T_n と T_{n+1} で cut した component

でT_n, T_{n+1}を含むものにはK_1がはいっているので$T_n \nparallel T_{n+1}$ in $S^3 - \mathring{U}(K_1)$。これより$T_i \nparallel T_j$ $(i \neq j)$が言える。又T_iは$S^3 - \mathring{U}(K_1)$でincompressibleなのでLemma 2に矛盾。

<u>case (1-ii)</u> このとき$f^{-1}(T)$はT_1とparallelなので、V_1を少しふくらませて$\partial V_1 = T_1 = f^{-1}(T)$とすることにより、$f(T_2) = T$としてよい。$A' = V - \mathring{B}$とおくと$f(A') = A$。

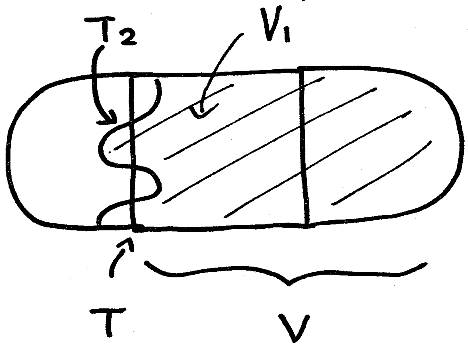


ここでV_1のmeridian diskがTと交わっていてはずせないとするとVが(core(V)が) unknottedとなるので、V_1のmeridian diskはBの中にあるとしてよい。T_1のmeridian m_1に対し、meridian disk D_1が存在して$\partial D_1 = m_1$となるが、$D_1 \subset B$なので$f(D_1)$を考えることができる。よってfはT_1のmeridianをTのmeridianにうつす。又T_1のlongitude l_1に対しては、orientable surface F_1がA'にあって$\partial F_1 = l_1$となり、$f(F_1)$が定義されるので、fはT_1のlongitudeをTのlongitudeにうつす。ここで、

$$A' = S^3 - \mathring{V}_1 = S^3 - \mathring{U}(k_1)$$
$$A = S^3 - \mathring{V} \cong S^3 - \mathring{U}(k_2)$$ である。

$f|_{A'}$はA'からAへの向きを保つ同相写像で、meridianをmeridian. longitudeをlongitudeにうつすので、$k_1 \approx k_2$ 。

<u>case 2</u> ; $T \cap T_2 \neq \phi$

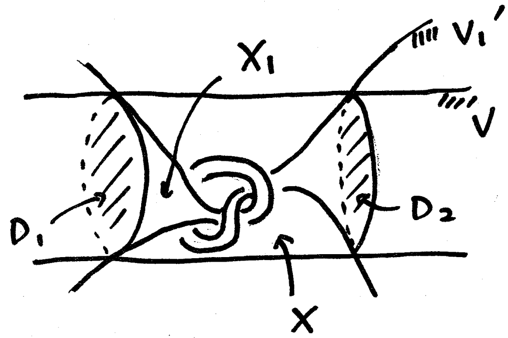


T_2 は $S^3 - \mathring{U}(K_1)$ では incompressible だが S^3 ではそうでないので、$cl(S^3 - T_2)$ の K_1 を含む方の component は solid torus。これを V_1' とおく。V と V_1' が Lemma 1 の条件を満すことはわかるので、V と V_1' に Lemma 1 を適用すると、case (I) はおこらないので、case (II) がおこり、この Lemma の case (ii) がおこる。

induction で定理を示すため $h_T(V, K_1)$ を定義する。
$h_T(V, K_1) \equiv V - \mathring{U}(K_1)$ に含まれる disjoint non-parallel な incompressible tori の数の max。

$\boxed{1}$ $h_T(V, K_1) = 1$ のとき。このときは core$(V) \approx K_1$ $\approx$ core(V_1) なので定理は成立。

$\boxed{n}$ $h_T(V, K_1) = n \geqq 2$ で $n-1$ 以下の k。については定理が示されていると仮定する。V と V_1 に Lemma 3 を適用する。(i) がおこってれば o.k. なので (ii) がおこっているとする。i.e. $\exists D_1, D_2$; $V - \sqcup D_i$ の 1 つの component



(それを X とおく)の中で $V_1' - \cup D_i$ の1つの component (それを X_1 とおく)が knot している。$Y \equiv V - X$,
$\widetilde{W} \equiv Y \cup X_1$, $W \equiv \widetilde{W} - \mathring{U}(\partial \widetilde{W}, \widetilde{W})$ とおく。ただし、
$U(\partial \widetilde{W}, \widetilde{W})$ は $\widetilde{W}$ における $\partial \widetilde{W}$ の regular neighborhood。
このとき K_1 は W で geom. ess. で core(W) は V で geom. ess. で core(W) = core(V) ということはない。

このとき次の2つの case がある。

(a) $\mathrm{core}(W) \approx K_1$

(b) $\mathrm{core}(W) \not\approx K_1$

<u>case (a)</u> (X, X_1) の ball pair に trivial ball pair をはりつけてできる knot の knot type を α とすると、

$$K_1 \approx \mathrm{core}(W) = \mathrm{core}(V) \# \alpha \quad 。$$

又、
$$\mathrm{core}(f(W)) = \mathrm{core}(f(V)) \# \alpha$$
$$= \mathrm{core}(V_1) \# \alpha \quad 。$$

$f(K_1) = K_1$ より $\mathrm{core}(W) \approx \mathrm{core}(f(W))$。knot の decomposition の uniqueness より $\mathrm{core}(V) \approx \mathrm{core}(V_1)$

<u>case (b)</u> $\mathrm{core}(W) \not\approx K_1$ のときは、

$$h_T(V, K_1) > h_T(W, K_1) \quad \text{かつ}$$
$$h_T(V, K_1) > h_T(V, \mathrm{core}(W)) \text{ が成り立つ。}$$

帰納法の仮定より、$\mathrm{core}(W) \approx \mathrm{core}(f(W))$。 更に、
$(V, \mathrm{core}(W))$ と $(V_1, \mathrm{core}(f(W)))$ に帰納法の仮定を

引いて、core(V) $\approx$ core(V_1)。 よって定理は示された。

References

[1] Hempel, "3-manifolds", Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. press, (1976)

[2] Schubert, Knoten und Vollrige, Acta Math. 90

[3] T. Shibuya, On knot types of compound knots, Math. Semi. Notes. Vol 10 (1982)