数理解析研究所講究録
第542巻 1985年 59-66

On the cobordisms of links

大阪工大　渋谷哲夫 (Tetsuo Shibuya)

R^3 に含まれる tame oriented link につぎの3種類の cobordisms を定義しそれらの間の関係と各々の cobordism invariant について考える。

2つの links $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n \subset R^3[0]$, $l' = k'_1 \cup \cdots \cup k'_n \subset R^3[1]$ について、

$l \sim l' \overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\mathcal{A} = A_1 \cup \cdots \cup A_n$: locally flat non-singular mutually disjoint annuli in $R^3[0,1]$ with $\partial\mathcal{A} = l \cup (-l')$, $\partial A_i = k_i \cup (-k'_i)$,

$l \underset{semi}{\sim} l' \overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\mathcal{A} = A_1 \cup \cdots \cup A_n$: non-singular mutually disjoint annuli in $R^3[0,1]$ with $\partial\mathcal{A} = l \cup (-l')$, $\partial A_i = k_i \cup (-k'_i)$,

$l \underset{B}{\sim} l' \overset{def}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\mathcal{A} = A_1 \cup \cdots \cup A_n$: locally flat, except finite points $P_1, \cdots, P_m$ in $\mathrm{Int}\,\mathcal{A}$, mutually disjoint annuli in $R^3[0,1]$ with $\partial\mathcal{A} = l \cup (-l')$, $\partial A_i = k_i \cup (-k'_i)$ satisfying that for $B^4_i = N(P_i : R^4)$,

$(\partial B^4_i, \partial B^4_i \cap A)$ is the Borromean rings for each $i = 1, \cdots, m$ (この条件を満たす annuli を B-annuli と呼ぶ),

where $-\ell'$ is the reflective inverse of ℓ'.

明らかに $\sim$, $\underset{\text{semi}}{\sim}$, $\underset{B}{\sim}$ は equivalence relation になる。まずこれらの間の関係を調べる。

<u>Lemma 1</u> ([2], [7]) 任意の knot k は $k \underset{B}{\sim} O$.

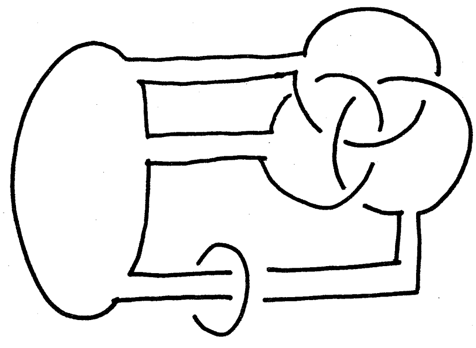
これを使うと Theorem 1 が得られる。

<u>Theorem 1</u> 2つの links ℓ, ℓ' in R^3 について,

$$\ell \sim \ell' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ell \underset{\text{semi}}{\sim} \ell' \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ell \underset{B}{\sim} \ell'.$$

Theorem 1 で $\ell \underset{B}{\sim} \ell'$ で $\ell \underset{\text{semi}}{\not\sim} \ell'$ である例としてつぎのような link がある。

L:



$L \underset{B}{\sim} O$ は明らかで最後で $L \underset{semi}{\not\sim} O$ なることを証明する。そこでどんな条件を付加すれば逆が成立するかという問題を考える。

２つの knots $k \subset R^3[0], k' \subset R^3[1]$ に対し任意に non-singular annulus A in $R^3[0,1]$ with $\partial A = k \cup (-k')$ をはるとき，A の locally knotted point をすべて通る A 上の simple arc を α とする。そのとき $(\partial N(\alpha : R^4), \partial N(\alpha : A))$ を (S^3, κ_A) で表す。そのときつぎの Lemma が簡単にわかる。

<u>Lemma 2</u>　$\kappa_A \sim k \# (-k')$.

$k \sim k' \longleftrightarrow k \# (-k') \sim 0$ (i.e. $k \# (-k')$ は slice knot, [1]) であるから Lemma 2 より Theorem 2 が証明できる。

<u>Theorem 2</u>　$l = k_1 \cup \cdots \cup k_n, l' = k_1' \cup \cdots \cup k_n'$ in R^3 が $l \underset{semi}{\sim} l'$ で各 $k_i \sim k_i'$ ならば $l \sim l'$.

<u>Question</u>　$l \underset{B}{\sim} l'$ のときどんな条件を付加すれば $l \sim l'$ (or $l \underset{semi}{\sim} l'$) になるか。

つぎに各 cobordism の invariant について考える。

"$\sim$"の invariant として signature (σ) と Arf invariant (φ) をとりあげる。ただし Arf invariant のときの link は proper に限る(すなわち $l=k_1\cup\cdots\cup k_n$ が proper とは各 i について linking number of k_i and $l-k_i$ が偶数).

<u>Theorem 3</u> ([3], [4]) 2つの links l, l' について.

$l\sim l'$ ならば $\sigma(l)=\sigma(l')$

$\varphi(l)=\varphi(l')$.

しかし σ, φ は "$\underset{semi}{\sim}$" の invariant でない。そこで "$\underset{semi}{\sim}$" の invariant としてつぎを定義する。$l=k_1\cup\cdots\cup k_n$ に対して.

$$\bar{\sigma}(l)\equiv\sigma(l)-\sigma(k_1)-\cdots-\sigma(k_n).$$

そのとき $\bar{\sigma}$ が "$\underset{semi}{\sim}$" の invariant であることがわかる。

<u>Theorem 4</u> ([5]) 2つの links l, l' について,

$l\underset{semi}{\sim}l'$ ならば $\bar{\sigma}(l)=\bar{\sigma}(l')$.

<u>Proof</u> $l\underset{semi}{\sim}l'$ だから定義より $\mathcal{A}=A_1\cup\cdots\cup A_n$: non-singular mutually disjoint annuli で l と l' を span するものがある。そこで $l=k_1\cup\cdots\cup k_n$ より $l_0=(k_1\#(-K_{A_1}))\cup\cdots\cup(k_n\#(-K_{A_n}))$ をつくると $l\underset{semi}{\sim}l'$ だから $l_0\underset{semi}{\sim}l'$. さらに Lemma 2 より $k_i\#(-K_{A_i})\sim k_i\#(-k_i)\#k_i'\sim k_i'$ for each i. だから Theorem 2 より

$l_0 \sim l'$. したがって Theorem 3 と[3]より，

$$\sigma(l') = \sigma(l_0) = \sigma(l) + \sigma(-K_{A_1}) + \cdots + \sigma(-K_{A_n})$$
$$= \sigma(l) - \sigma(K_{A_1}) - \cdots - \sigma(K_{A_n})$$
$$= \sigma(l) - \sigma(k_1) - \cdots - \sigma(k_n) + \sigma(k_1') + \cdots + \sigma(k_n')$$

故に $\bar{\sigma}(l) = \bar{\sigma}(l')$.

そこで L in Figure について $L \underset{semi}{\sim} O$ を証明する。

$$\bar{\sigma}(L) = \sigma(L) - \sigma(3_1) - \sigma(O) = \pm 1 - (\pm 2) \neq 0 .$$

ところで $L \underset{B}{\simeq} O$ だから $\bar{\sigma}$ は B-cobordism の invariant でない。そこで proper link $l = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ について，$\bar{\varphi}(l) \equiv \varphi(l) - \varphi(k_1) - \cdots - \varphi(k_n) \pmod 2$ と定義すると $\bar{\varphi}$ は "$\underset{B}{\simeq}$" の invariant になることを Theorem 5 で証明する。

$l \subset R^3[0]$ と $l' \subset R^3[1]$ が related とは locally flat non-singular surface F in $R^3[0,1]$ of genus 0 で $\partial F = l \cup (-l')$ なるものが存在するときをいう。そのとき[4]より Lemma 3 は明らか。

<u>Lemma 3</u> l と l' が proper links で related ならば，$\varphi(l) = \varphi(l')$.

Borromean rings は 3_1 に related だから φ(Borromean rings) $= 1$. これより Lemma 4 を得る。

Lemma 4　l と l' が proper links とする．$l \underset{B}{\sim} l'$ で $\mathcal{A}$ を l と l' を span する B-annuli とするとき．$\varphi(l) \equiv \varphi(l') + (\mathcal{A}$ の singular points の数$) \pmod 2$, for $l \subset R^3[0]$, $l' \subset R^3[1]$ and $\mathcal{A} \subset R^3[0,1]$.

Proof　$\mathcal{A}$ の各 singularity と $R^3[2]$ の点を simple arc で結び (arc の内点が $\mathcal{A}$ と交わらないようにして), その arc にそって $\mathcal{A}$ の singularity を $R^3[2]$ 内に deform する。この deformation で得られた annuli を $\mathcal{A}'$ とする。$F = \mathcal{A}' \cap R^3[0,1]$ は locally flat non-singular surface of genus 0 with $\partial F = l \cup (-l' \circ (m$ completely splitted Borromean rings, $L_0))$ for $m = (\mathcal{A}$ の singular points の数$)$, ここで $l_1 \circ l_2$ は l_1 と l_2 が split していることである。すなわち l と $l' \circ L_0$ は related で互いに proper だから Lemma 3 より $\varphi(l) = \varphi(l' \circ L_0) \equiv \varphi(l') + m \pmod 2$.

Lemma 4 より Theorem 5 が得られる。

Theorem 5　l を proper link とし $l \underset{B}{\sim} l'$ ならば l' も proper link で $\overline{\varphi}(l) = \overline{\varphi}(l')$.

Proof　Borromean rings は proper だから l' も proper になる。つぎに Lemma 4 の式に $\varphi(l) \equiv \overline{\varphi}(l) + \varphi(k_1) + \cdots + \varphi(k_n)$, $\varphi(l') \equiv \overline{\varphi}(l') + \varphi(k_1') + \cdots + \varphi(k_n')$ を代入すると,

$$\bar{\varphi}(\ell) \equiv \bar{\varphi}(\ell') + \varphi(k_1') + \cdots + \varphi(k_n') - \varphi(k_1) - \cdots - \varphi(k_n) + m.$$

各 k_i, k_i' についても Lemma 4 を適用すると，

$$\varphi(k_i) \equiv \varphi(k_i') + m_i, \quad \text{where } m_1 + \cdots + m_n = m.$$

したがって $\bar{\varphi}(\ell) = \bar{\varphi}(\ell')$.

Borromean rings, Whitehead link は 3_1 に related でしたがってその Arf invariant は 1 であり，しかも各成分は trivial knot だから Theorem 5 よりつぎの Corollary を得る。

Corollary ℓ が Borromean rings 又は Whitehead link ならば，$\ell \underset{B}{\sim} O$.

References

[1] R. H. Fox and J. W. Milnor : Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, Osaka J. Math, 3 (1966), 257–267.

[2] H. Murakami : Borromean rings and knot cobordism, Master Thesis (1982), Osaka City Univ.

[3] K. Murasugi : On a certain numerical invariant of link type, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965),

387–422.

[4] R. Robertello: An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 543–555.

[5] D. Rolfsen: Piecewise-linear I-equivalence of links, to appear.

[6] T. Shibuya: On the cobordisms of links in 3-space, Kobe J. of Math, to appear.

[7] K. Sugishita: Triple points and knot cobordism, Master Thesis (1982), Osaka City Univ.