

曲面上の同相写像がすべて拡張する 3次元多様体

東工大・理 根上生也 (Seiya Negami)

0. はじめに

ここでは、空間 X 上の同相写像の isotopy 類全体のつくる群を $\Lambda(X)$ と書いて、homeotopy 群と呼ぶ。曲面の homeotopy 群については古くから研究されており、最近でも多くの関心を集めているが、本稿では、曲面とそれが埋蔵されている 3次元多様体の homeotopy 群の間の関係を考察する。

X を空間 Y の部分空間とするとき、 X が Y に 忠実に埋蔵されている (faithfully embedded) とは、homeotopy 群の間の単射準同形 $\psi: \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(Y)$ で X 上の各同相写像 $f: X \rightarrow X$ をその拡張 $\tilde{f}: Y \rightarrow Y$ ($\tilde{f}|_X = f$) に送るものが存在することと定義する。言い換えると、 X 上の同相写像がすべて Y 上の同相写像に拡張し、その拡張が写像の合成に関してうまくいっているとき、 X は Y に忠実に埋蔵されているという。

たとえば, $F^2 \times I$ や $F^2 \times S^1$ 内の fiber の曲面 F^2 は忠実に埋蔵されているよい例だが, これら以外の例がなかなか構成できない。そのかわりに, 次の定理が証明されてしまった。

定理 1. M^3 を irreducible, ∂ -irreducible, orientable, compact な 3次元多様体, F^2 ($\neq S^2$) を M^3 内の orientable な閉曲面とする。もし F^2 が M^3 に忠実に埋蔵されているならば, 次の (i), (ii) のいずれかが成立する。

$$(i) M^3 = F^2 \times I \supset F^2 \times \{*\} = F^2$$

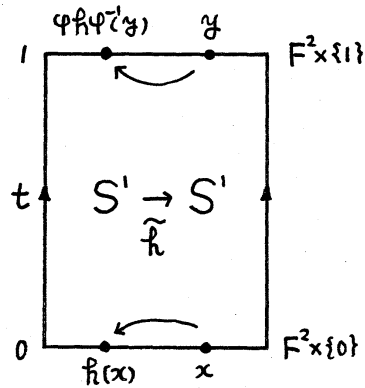
$$(ii) M^3 = F^2 \times S^1 \supset F^2 \times \{*\} = F^2$$

以下, 二の定理の証明の概説をしていく。

1. S^1 上の F^2 -bundle の場合

まず, M^3 が monodromy φ を持つ S^1 上の F^2 -bundle $F^2 \times_{\varphi} S^1$ で F^2 がその fiber の場合を考える。 F^2 上の同相写像 $\rho: F^2 \rightarrow F^2$ が M^3 上の同相写像 $\tilde{\rho}: M^3 \rightarrow M^3$ に拡張したとき, isotopic に変形して $\tilde{\rho}$ を fiber-preserving にすることができる。 M^3 を F^2 で切り開いて得られる $F^2 \times I$ を考えると, $\tilde{\rho}$ は ρ によって誘導された $F^2 \times \{0\}$ と $F^2 \times \{1\}$ 上の同相写像の間の isotopy を定義する。 $\tilde{\rho}$

が M^3 の S^1 方向を保つか逆にするかに依じて, その isotopy は次のとおり。ただし, monodromy は $\varphi: F^2 \times \{0\} \rightarrow F^2 \times \{1\}$ とする。

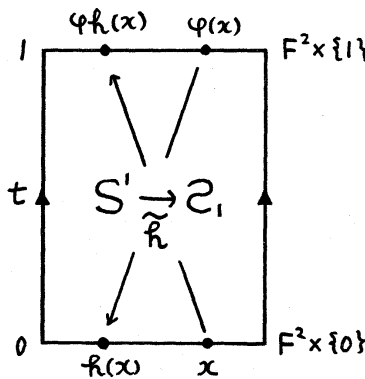


$$H_t : F^2 \times \{t\} \rightarrow F^2 \times \{t\}$$

$$H_0 : (x, 0) \rightarrow (h(x), 0)$$

$$H_1 : (y, 1) \rightarrow (\varphi h \varphi^{-1}(y), 1)$$

$$\therefore h \sim \varphi h \varphi^{-1}$$



$$H_t : F^2 \times \{t\} \rightarrow F^2 \times \{1-t\}$$

$$H_0 : (x, 0) \rightarrow (\varphi h(x), 1)$$

$$H_1 : (\varphi(x), 1) \rightarrow (\underbrace{h(x)}_{h \varphi^{-1}(y)}, 0)$$

$$\therefore \varphi h \sim h \varphi^{-1}$$

これから, すべての同相写像 $h: F^2 \rightarrow F^2$ が拡張するならばそれらに対して $\varphi h \sim h \varphi^{\pm 1}$ が成立しなければならぬ。特に h を simple loop C に沿った Dehn twist τ_C とする。 $\varphi \tau_C \varphi^{-1} = \tau_{\varphi(C)}^{\pm 1}$ (+ if φ : ori-pre; - if φ : ori-rev) に注意すると,

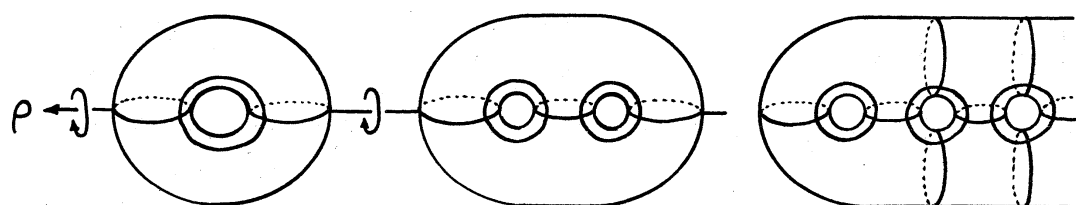
$$\varphi \tau_C^2 \varphi^{-1} = (\varphi \tau_C \varphi^{-1})^2 = (\tau_{\varphi(C)})^{\pm 2}$$

$$\sim \tau_C \varphi^{\pm 1} \tau_C \varphi^{-1} \sim \tau_C^2 \varphi \varphi^{-1} = \tau_C^2$$

$$\therefore (\tau_{\varphi(C)})^{\pm 2} \sim \tau_C^2$$

ここで, Dehn twist の特殊な構造に着目すると, "-" の場合

は起らず, つまり φ は orientation-preserving で, $\varphi(C) \sim C$ となる
 ことがわかる。ただし, φ は C の向きを逆にすることもし
 れない。そこで, 下図のような F^2 上の simple loop の組を考
 える。 φ は各 loop を不変にするとしてよいので, $\text{genus } F^2 \geq 3$ のときは
 $\varphi \sim \text{id}$ となり, $\text{genus } F^2 = 1, 2$ のときは $\varphi \sim \text{id or } \rho$ (横軸回転)
 となることがわかる。



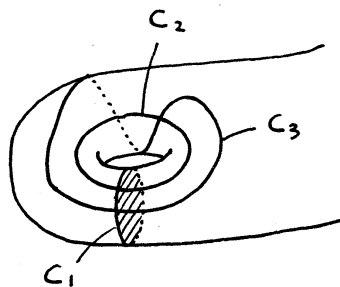
$\rho^2 = \text{id}$ であるから, φ はすべての $\rho: F^2 \rightarrow F^2$ と可換になる
 ので, 上の議論は $\Lambda(F^2)$ の center を決定している:

$$\text{center}(\Lambda(F^2)) \cong \begin{cases} 0 & (\text{genus } F^2 \geq 3) \\ \mathbb{Z}_2 & (\text{genus } F^2 = 1, 2) \end{cases}$$

以上により, $\text{genus } F^2 \geq 3$ のときは $M^3 = F^2 \times S^1$ となること
 がわかった。 $\text{genus } F^2 = 1, 2$ のとき, $\varphi \sim \rho$ の場合を個別に
 調べると, monodromy の φ 自身が id_{M^3} と isotopic な M^3 上の同
 相写像に拡張する。実際, F^2 を M^3 の S^1 方向に 1 周させれば,
 φ が実現できる。このときは, F^2 は M^3 に忠実に埋蔵されてい
 ない。したがって, いずれの場合も $\varphi \sim \text{id}$ となる。

2. Seifert多様体の場合

一般に、 F^2 が M^3 に忠実に埋蔵されているならば、 F^2 は M^3 で incompressible になる。たとえば、 F^2 上の handle を切る loop C_1 に disk D_1 がはれていたらとする。下図のように、互いに1点で交差し合う loop C_2, C_3 を考える。この3つの loop C_1, C_2, C_3 は互いに F^2 上の同相写像でうつり合う。それらは M^3 上の同相写像に拡張するので、 C_2, C_3 もそれぞれ disk D_2, D_3 を bound する。ところが、 C_i と C_j ($i \neq j$) は1点のみで交差しているので、 D_i と D_j は F^2 の同じ側にははれない。互いに異なる側にいるという D_1, D_2, D_3 の三巴の状況は不可能だから、 C_1 には disk がはれないことになる。 F^2 を separate する loop についても同様の三巴を考えれば、 F^2 に compression が存在しないことがわかる。



ところで、Seifert多様体の中の incompressible な曲面は fiber の和集合になっている (vertical) が、すべての fiber と横断的に交わっている (horizontal)。 M^3 を Seifert多様体として、 F^2 が vertical のときは torus になる。 F^2 上の fiber は同相写像

$f: F^2 \rightarrow F^2$ によって任意の simple loop にうつされるが, その拡張 $\hat{f}: M^3 \rightarrow M^3$ はもとのものとは異なる M^3 の Seifert fibering を誘導する。これは, ほとんどの Seifert 多様体に対して fibering の一意性が成立することに矛盾する。 F^2 が horizontal のときは, $M^3 - F^2$ には I -bundle の構造が入る。 F^2 が M^3 を separate するときは省略するが, そうでないときは $M^3 - F^2$ は $F^2 \times I$ に他ならない。この場合は M^3 自身は $F^2 \times \{0\}$ と $F^2 \times \{1\}$ を貼り合せて得られる F^2 -bundle になっており, 前の場合に帰着される。

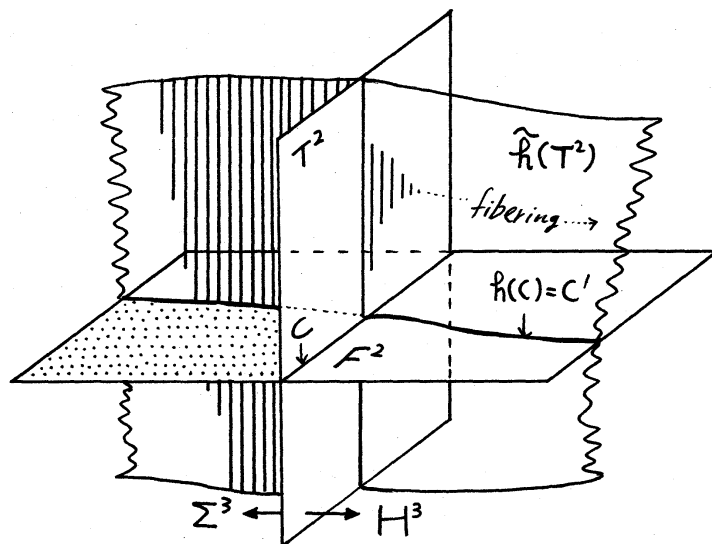
3. 一般の場合

$\partial M^3 \neq \emptyset$ のときは, M^3 の double $D(M^3)$ を考えればよいので M^3 は closed であると仮定する。 M^3 は irreducible で, incompressible な曲面 F^2 を含むので, M^3 は Haken 多様体となる。すると, M^3 は torus 分解によって極大な Seifert 多様体 Σ^3 と simple な多様体 H^3 の2つの部分にわけられる。このとき, F^2 と torus 分解の torus の交わりは可能な限り減らしてあるとする。

まず, F^2 が Σ^3 と H^3 の両方にまたがっている場合を考える。 F^2 は $\Sigma^3 \cap H^3$ 内の torus T^2 といくつかの simple loop C で交わっている。 F^2 上の simple loop C' で, C との交差が絶対に解消できないものを適当に選べば, 同相写像 $f: F^2 \rightarrow F^2$ で $f(C) = C'$ と

なるものが存在する。その拡張を $\widehat{h}: M^3 \rightarrow M^3$ とすると, torus $\widehat{h}(T^2)$ は isotopy で Σ^3 の中に押し込むことはできない。 $\widehat{h}(T^2) \cap H^3$ はいくつかの annulus になるが, この annulus に沿って Σ^3 の fibering を拡張していくことができるので, Σ^3 の極大性に矛盾してしまう。したがって, $F^2 \subset \Sigma^3$ or H^3 と仮定できる。

Johannson は "On the mapping class group of simple 3-manifolds" (Lect. Notes in Math. 722, Springer) の中で simple な多様体の homeotopy 群は有限であることを示している。したがって, $|\Lambda(H^3)| < \infty$ だが $|\Lambda(F^2)| = \infty$ なので, $F^2 \subset H^3$ のときは F^2 は忠実に埋蔵されていない... この議論は正確ではないが, 基本的なアイデアはこれで, $F^2 \subset H^3$ の場合は除外される。



$F^2 \subset \Sigma^3$ のとき, F^2 が Σ^3 の中で vertical の場合は 2 の場合と同様の矛盾が生じる。 F^2 が horizontal の場合, もし $\partial \Sigma^3 \neq \emptyset$ ならば, F^2 をずっとなぜていくといずれ $\partial \Sigma^3$ に到達し, $\partial F^2 \neq \emptyset$

となってしまう。今、 F^2 はclosedだから $\partial\Sigma^3 = \phi$ となり、 M^3 は Σ^3 と一致する($M^3 = \Sigma^3$, $H^3 = \phi$)。このときも、 M^3 自身がSeifert多様体となり、2の場合に帰着される。

厳密ではないが、以上で定理1が証明された。■

4. おわりに

上の議論を整理していくと、 M^3 がirreducibleのときには、写像 $\psi: \Lambda(F^2) \rightarrow \Lambda(M^3)$ が単射準同形であるという条件はあまり本質的ではない。実際、genus $F^2 \geq 3$ のときには F^2 上の同相写像がすべて拡張するという仮定だけで同じ結論を得ることができる。“単射”については、次の命題が成立するので、議論にはほとんど影響がない。

命題2. M^3 を3次元多様体(特に何も仮定しない), F^2 をその中の閉曲面とする。もし F^2 上の同相写像 $f: F^2 \rightarrow F^2$ で、 $f \neq \text{id}_{F^2}$ on F^2 だが拡張すると $\tilde{f} \sim \text{id}_{M^3}$ on M^3 となるものが存在すれば、 $M^3 = F^2 \times_{\varphi} S^1$ ($\varphi^n \sim f$)となる。特に、 M^3 は必然的にclosedかつirreducibleになってしまう。

ψ が準同形であるという条件の方は, M^3 が irreducible であると仮定しないときに役目を果たす。 F^2 上の同相写像は適当に何個か合成すると id_{F^2} と isotopic になるが, もし M^3 が irreducible でないと incompressible な S^2 が障害となって, それらの拡張の合成が id_{M^3} と isotopic にならない場合が多い。したがって, ほとんどの場合に F^2 が M^3 に忠実に埋蔵されているならば M^3 は必然的に irreducible になってしまう。

以下, M^3 が closed のときにわかっていることを列挙しておく。

1. $\exists \psi : \Lambda(F^2) \rightarrow \Lambda(M^3) : \text{map} \iff M^3 = F^2 \times_{\varphi} S^1 \# N^3$
 (おてのれが拡張する.) ($\varphi \in \text{Center } \Lambda(F^2)$)
2. $\exists \psi : \Lambda(F^2) \rightarrow \Lambda(M^3) : \text{homo} \iff M^3 = F^2 \times_{\varphi} S^1$
 (合成に関しても拡張する.) or = $T^2 \times_{\varphi} S^1 \# N^3$
($\varphi \in \text{Center } \Lambda(F^2)$, $T^2 = F^2$)
↑
torus
3. $\exists \psi : \Lambda(F^2) \rightarrow \Lambda(M^3) : 1-1 \text{ homo}$
 (忠実に埋蔵されている.) \iff $M^3 = F^2 \times S^1$
or = $T^2 \times_{\varphi} S^1 \# N^3$
($\varphi \sim \text{id or } \rho$, $T^2 = F^2$)

以上