数理解析研究所講究録
第542巻 1985年 119-127

Teichmüller Spaces of Seifert Fibered Manifolds with Infinite π_1

東大理　大鹿 健一 (Ken-ichi Ohshika)

Thurston により，3次元多様体の geometry は本質的に，8種類，$\mathbb{H}^3$, $\mathbb{E}^3$, S^3, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $S^2\times\mathbb{R}$, $\widetilde{SL}_2$, Nil, Sol であることが知られている。Closed 或は torus boundary の多様体のみを考えれば，$\mathbb{H}^3$, Sol 以外の geometry をもつ多様体は Seifert fibered manifold である。

Geometric manifold M について，M の Teichmüller space $\mathcal{T}(M)$ を M 上の geometric structure 全体を恒等写像に isotopic な isometry で移り合うものを同一視してできる空間とする。位相は C^∞ topology の quotient を入れる。Complete hyperbolic structure with finite volume をもつ Haken manifold M については，Mostow の rigidity theorem より $\mathcal{T}(M)\cong\{*\}$. ここでは $|\pi_1|=\infty$ の Seifert fibered manifold について $\mathcal{T}(M)$ の位相型を定める。

主結果

以下 M は orientable Seifert fibered manifold, O はその base orbifold, X は O の underlying space, k は fibration の singular fiber の本数とする。$O \neq S^2(2,3,r),\ S^2(3,3,r)$ と仮定する.

定理 1 M が $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ geometry をもつ時, 即ち O は hyperbolic で fibration は trivial euler class をもつ時.

$$\mathcal{T}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^{3-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ orientable } \partial X=\phi \\ \mathbb{R}^{2-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ nonori. か } \partial X\neq\phi \text{ の片方.} \\ \mathbb{R}^{1-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ nonorientable } \partial X\neq\phi . \end{cases}$$

定理 2 M が $\widetilde{SL}_2$ geometry をもつ時, 即ち O は hyperbolic で fibration は nontrivial euler class をもつ時

$$\mathcal{T}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^{2-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ orientable} \\ \mathbb{R}^{1-4\chi(X)+2k} & \text{if } X \text{ nonorientable} \end{cases}$$

定理 3 M が $\mathbb{E}^3$- geometry をもつ時, 即ち O は Euclidean で fibration は trivial euler class をもつ時, $\mathcal{T}(M)$ は次表のようになる。

O	$\mathcal{T}(M)$
torus	$\mathbb{R}^6$
Klein bottle, $S^2(2,2,2,2)$	$\mathbb{R}^4$
annulus	$\mathbb{R}^4$
$S^2(2,4,4)$	$\mathbb{R}^2$
Möbius band, $D^2(2,2)$	$\mathbb{R}^3$
$P^2(2,2)$	$\mathbb{R}^3$

定理 4　M が Nil geometry をもつ時，即ち O は Euclidean で fibration は nontrivial euler class をもつ時，$\mathcal{T}(M)$ は次表の通り.

O	$\mathcal{T}(M)$
torus	$\mathbb{R}^5$
Klein bottle	$\mathbb{R}^3$
$S^2(2,2,2,2)$	$\mathbb{R}^3$
$S^2(2,4,4)$	$\mathbb{R}$
$P^2(2,2)$	$\mathbb{R}^2$

定理 1 〜 4 で扱った 4 つの geometry について次の定理が成立つ。

定理 5　γ を M 中の ' loop, arc (properly immersed) の free homotopy class とする。$\mathbb{R}_+^{\gamma}$ を γ から $\mathbb{R}_+$ への関数全体の空間で weak topology をもつとする。$l_* : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\gamma}$ を $m \in \mathcal{T}(M)$ について $l_*(m)$ の s 成分は s の m における geodesic length として定義する。

M が $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2}$, E^3, Nil のいずれかの geometry をもつなら, $l_* ; \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\gamma}$ は proper embedding.

最後に $S^2\times\mathbb{R}$ geometry の場合であるが，この場合，covering $p : S^2\times\mathbb{R} \to M$ について $S^2\times\mathbb{R}$ の foliation $\{\{pt\}\times\mathbb{R}\}$ は必ずしも M の Seifert fibration に写らない。

M の fixed Seifert invariant (α,β) について $\{\{pt\}\times\mathbb{R}\}$ が (α,β) Seifert fibration に写されるような geometric structure のつくる $\mathcal{T}(M)$ の部分空間を $\mathcal{T}^*(M)$ と表す。

定理 6　M が $S^2\times\mathbb{R}$ geometry をもつ時 (即ち $M\cong S^2\times S^1$, $P^3\#P^3$, $S^1\times D^2$) $\mathcal{T}(M)$, $\mathcal{T}^*(M)$ は以下の通り

M	$\mathcal{T}(M)$	$\mathcal{T}^*(M)$
$S^2\times S^1$	$S^3\times\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{R}$
$P^3\#P^3$	$S^3\times\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{R}$
$D^2\times S^1$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$

定理の証明の概略

まず base orbifold O の Teichmüller space を調べる
hyperbolic 及び Euclidean 2-orbifold について次の定理が成立つ。

<u>定理</u>　O を hyperbolic 2-orbifold，X をその underlying space，k を cone points の数とする時，

$$\mathcal{T}(O) \cong \mathbb{R}^{-3\chi(X)+2k}$$

<u>定理</u>　O を Euclidean 2-orbifold とする時，$\mathcal{T}(O)$ は以下の通り．

O	$\mathcal{T}(O)$
torus, $S^2(2,2,2,2)$	$\mathbb{R}^3$
Klein bottle	$\mathbb{R}^2$
annulus, Möbius band	$\mathbb{R}^2$
$D^2(2,2)$, $P^2(2,2)$	$\mathbb{R}^2$
$S^2(p,q,r)$	$\mathbb{R}$

$\mathcal{T}(M)$ と $\mathcal{T}(O)$ の関係を調べる上で，次の2つの補題が基本的である．

補題1（Waldhausen, P. Scott）M を Haken manifold か, base orbifold が $S^2(p,q,r)$ $p,q \geqq 4$ の Seifert fibered manifold とする。$f : M \to M$ が恒等写像に homotopic な homeo なら, f は恒等写像に isotopic.

補題2（Waldhausen, P. Scott）M を Seifert fibered manifold with infinite π_1 で $M \neq S^1\times S^1\times S^1$, $S^1\times S^1\times I$, Klein bottle 上の twisted I-bundle, その double, solid torus, でかつ base orbifold は $S^2(2,3,r)$ $S^2(3,3,r)$ でないとする. このとき M の Seifert fibration は up to isotopy で unique.

補題1より $\mathcal{T}(M)$ は $\pi_1(M)$ の $\mathrm{Isom}^+(E)$（E は model space ; $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2}$, $\mathbb{E}^3$, Nil）への表現の共役類に対応する.
（但表現は discrete faithful）

以下簡単の為, M は補題2の仮定をみたし. $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ geometry をもつ場合を考えよう.

M の fibration は unique だから, M の fibration は $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ の [illegible] の image としてよい。従って $q : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(O)$ が well-defined. $q^{-1}(pt)$ の次元を調べる. 実は q は fibre bundle になっているので, $\mathcal{T}(M) \cong \mathcal{T}(O) \times q^{-1}(pt)$ となる.

$\pi_1(M) \cong \langle a_1, b_1, \cdots\cdots, a_g, b_g, c_1, \cdots, c_k, d_1, \cdots d_e, h;$

(O; oried. の場合) $[a_i, h], [b_i, h], [d_i, h], c_i^{\alpha_i} h^{\beta_i},$

$[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] c_1 \cdots c_k d_1 \cdots d_e \rangle$

但し $(\alpha_i \beta_i)$ は $\sum \frac{\beta_i}{\alpha_i} = 0$ となるようなものをとってある。

$\pi_1(M) / \langle h \rangle \cong \pi_1^{orb}(O)$

$\mathcal{T}(O)$ の元を1つ定めることは，$\pi_1^{orb}(O)$ から $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ への faithful discrete representation を定めることに等しい。従って $g \in \mathcal{T}(O)$ に対して $\mathcal{F}(g)$ は、左の図式を可換にするような faithful discrete representation $\tilde{\rho}$ 全体に対応している。

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\rho}; \pi_1(M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \arrow[d] \\
\rho_g; \pi_1^{orb}(O) \arrow[r] & \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ の kernel は $\mathbb{R}$ であるから，$\pi_1(M)$ の各 generator について $\tilde{\rho}$ での image には $\mathbb{R}$ だけの自由度があるが，それらが $\pi_1(M)$ の relation を保ってなくてはいけない。これより $a_1, b_1 \cdots a_g\ b_g$ の image は自由に lift でき，$h, d_1, \cdots, d_{e-1}$ の lift を決めれば，あとは一意的に決まる。従って $\mathcal{F}(g) \cong \mathbb{R}^{2g+\max\{0,\, e-1\}+1}$

次に O が nonorientable の場合を考える．この場合，

$$\pi_1(M) \cong \langle a_1, \cdots, a_g, c_1, \cdots, c_k, d_1, \cdots, d_e, h \,;\, a_i h a_i^{-1} h,\ [c_i, h],\ [d_i, h],\ c_i^{\alpha_i} h^{\beta_i},\ a_1^2 \cdots a_g^2 c_1 \cdots c_k d_1 \cdots d_e \rangle$$

Oがorientableの場合と同様に考えれば $a_1, \cdots, a_g$ の image はそれぞれ $\mathbb{R}$ だけ自由に動かせることがわかる。しかし a_i の $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ への action は水平な軸をもつ π の rotation なので，全ての lift は互いに conjugate. 従ってそれらの相対的な"高さ"の差だけが geometric structure をかえることになるので，$(g-1)$ コの独立な変数が生じる。あとは orientable の時と同様にして $\mathcal{T}(g) \cong \mathbb{R}^{g+\max\{0, e-1\}}$.

他の geometry についても同様に考えればよい。euler class がある時は $c_1 \cdots c_k$, h の関係が一意的にそれらの lift を決めてしまうので次元が1つへる。

定理5の証明の概略

問題は l_* が injective であることを示すことにある。$\mathcal{S}$ の各元について長さが同じなら $\mathcal{T}(M)$ で同じ元であることをいえばよいのだが，$\mathcal{T}(O)$ で同じ元になることと，$\mathcal{T}(pt)$ 上

で一致することをみる。$\mathcal{T}(O)$ の各元は O の closed curve, proper arc の length で決定される。O での length はその M への lift の minimal length. これは closed curve で attain されるとは限らないが, closed な lift の長さ全体がわかれば一意的に求まる。(2次関数の極小値)。よって $\mathcal{T}(O)$ の元は1つに定まる。lift の長さは O での長さとそれ自身の長さにより決まる、よって $\mathcal{T}(M)$ の元が1つ定まる.